

Теория вероятностей и математическая статистика

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Тема 4

Теорема сложения для двух несовместных событий

? Вероятность суммы двух
несовместных событий
равна сумме вероятностей
этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Теорема сложения для двух несовместных событий

?

► ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть событию A благоприятствуют m_A исходов, событию B – m_B исходов из общего числа n всех возможных исходов. В силу несовместимости событий A и B ни один из исходов благоприятствующих B , не может благоприятствовать A , и наоборот.

Следовательно событию $A+B$ благоприятствует m_A+m_B исходов:

$$P(A+B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B)$$

Теорема сложения для n несовместных событий

- Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Теорема сложения для n несовместных событий

➤ Следствие 1.

Сумма вероятностей событий A_1, A_2, \dots, A_n образующих полную группу попарно несовместных событий, равна 1:

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: так как события A_1, A_2, \dots, A_n образуют полную группу попарно несовместных событий, то их сумма есть событие достоверное: $\sum A_i = \Omega$

Так как вероятность достоверного события равна 1, то

$$P \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n P(A_i) = P(\Omega) = 1$$

Теорема сложения для n несовместных событий

➤ Следствие 2.

Сумма вероятностей противоположных равна 1:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: противоположные события A и \bar{A} несовместимы, а их сумма есть достоверное событие, то согласно следствию 1, имеем:

$$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$



Теорема сложения двух совместных событий

? Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей их совместного наступления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Теорема сложения двух совместных событий

► ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$$A + B = A\bar{B} + \bar{A}B + AB$$

Так как события $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ и AB несовместные, то по теореме о сумме несовместных событий имеем:

$$P(A + B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB) \quad (*)$$

$$\text{При этом } P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$$

$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$$

Подставим эти равенства в уравнение (*):

$$\begin{aligned} P(A + B) &= P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) = \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

Условная вероятность события

- **Условной вероятностью $P_B(A)$** события A называется его вероятность, вычисленная при условии, что событие B произошло.
- Событие A называется **независимым** от события B , если его вероятность не меняется от того, произошло событие B или нет, т.е.

$$P_B(A) = P(A)$$

Несовместимые события зависимы, так как появление любого из них обращает в 0 вероятность появления всех остальных

Теорема умножения двух зависимых событий

? Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, при условии, что первое произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

Теорема умножения двух зависимых событий

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

- ? ➤ Пусть событию А благоприятствует m исходов, событию В – k исходов, событию С – l исходов из общего числа n равновероятных и несовместных исходов ($l \leq m, l \leq k$).
- Тогда: $P(A) = \frac{m}{n}$, $P(AB) = \frac{l}{n}$
- После того, как событие А произошло, число всех исходов стало равным m , а число исходов благоприятствующих событию В – l .

$$\text{Поэтому } P_A(B) = \frac{1}{m} = \frac{l/n}{m/n} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$\text{Аналогично } P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Умножая обе части полученных равенств соответственно на $P(A)$ и $P(B)$, окончательно имеем:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

Теорема умножения двух независимых событий

? Вероятность умножения независимых событий равна произведению их вероятностей

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема умножения двух независимых событий ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

? Если события A и B независимы,
то $P(A) = P_B(A)$, из чего следует:

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A) = P(B) \cdot P(A)$$

► Следствия:

1. Если события A и B независимы, то независимы и события \bar{A} и \bar{B} , \bar{A} и B , A и \bar{B}
2. Для множества независимых испытаний, в каждом из которых случайное событие A может появиться с вероятностью p , вероятность P появления события A хотя бы один раз равна

$$P = 1 - (1-p)^n$$

Формула полной вероятности

- Вероятность $P(B)$ события B , которое может произойти только при условии появления одного из событий H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез H_1, H_2, \dots, H_n на соответствующие условные вероятности событий B

$$P(B) = \sum_i^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(B)$$

Формула полной вероятности

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

- ▶ Пусть H_1, H_2, \dots, H_n - полная система попарно несовместных событий, связанная с некоторым опытом, и B - произвольное событие, связанное с тем же опытом.
- ▶ Очевидно, что для произвольного события A справедливо равенство: $A = A \cdot \Omega$.
- ▶ С другой стороны, по определению полной системы событий

$$\Omega = H_1 + H_2 + \dots + H_n \text{ и поэтому}$$

$$\begin{aligned} \Omega \cdot B &= (H_1 + H_2 + \dots + H_n) \cdot B \\ B &= H_1 \cdot B + H_2 \cdot B + \dots + H_n \cdot B \end{aligned}$$

Формула полной вероятности

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

События H_iB и H_jB несовместимы, поэтому $P(B) = P(H_1B) + P(H_2B) + \dots + P(H_nB)$, или, короче,

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cdot H_i)$$

По теореме умножения для зависимых событий имеем: $P(B \cdot H_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(B)$ и, следовательно,

$$P(B) = \sum_i^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(B)$$

Формула Байеса

- Вероятность $P_B(H_i)$ гипотезы H_i при условии, что событие B произошло, равна:

$$P_B(H_i) = \frac{P(H_i) * P_{H_i}(B)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) * P_{H_i}(B)}$$