Теория вероятностей и математическая статистика

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Тема 4

Теорема сложения для двух несовместных событий

- *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Теорема сложения для двух несовместных событий

?

- **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:**

Пусть событию А благоприятствуют m_A исходов, событию В – m_B исходов из общего числа n всех возможных исходов. В силу несовместимости событий А и В ни один из исходов благоприятствующих В, не может благоприятствовать А, и наоборот.

Следовательно событию А+В благоприятствует m_A+m_B исходов:

$$P\,(A+B)=\frac{m_A+m_B}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}=P(A)+P(B)$$

Теорема сложения для n несовместных событий

- Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Теорема сложения для n несовместных событий

- **Следствие 1.**

Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образующих полную группу попарно несовместных событий, равна 1:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: *так как события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, то их сумма есть событие достоверное:* $\sum A_i = \Omega$

Так как вероятность достоверного события равна 1, то

$$P\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\Omega) = 1$$

Теорема сложения для n несовместных событий

- **Следствие 2.**

Сумма вероятностей противоположных *равна 1:*

$$\mathbf{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: противоположные события A и $\overline{A}$ несовместимы, а их сумма есть достоверное событие, то согласно следствию 1, имеем:

$$P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Теорема сложения <u>двух</u> совместных событий

- Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей их совместного наступления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Теорема сложения <u>двух</u> совместных событий

- **Доказательство:**

$$A + B = A\bar{B} + \bar{A}B + AB$$

Так как события $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ и AB несовместные, то по теореме о сумме несовместных событий имеем:

$$\mathbf{P(A + B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB)} \qquad \mathbf{(*)}$$

При этом $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$

$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$

Подставим эти равенства в уравнение (*):

$$\mathbf{P(A + B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) =}$$

$$\mathbf{= P(A) + P(B) - P(AB)}$$

Условная вероятность события

- **Условной вероятностью $P_B(A)$** события А называется его вероятность, вычисленная при условии, что событие В произошло.
- Событие А называется **независимым** от события В, если его вероятность не меняется от того, произошло событие В или нет, т.е.

$$P_B(A) = P(A)$$

Несовместимые события зависимы, так как появление любого из них обращает в 0 вероятности появления всех остальных

Теорема умножения двух зависимых событий

? Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, при условии, что первое произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

Теорема умножения двух <u>зависимых</u> событий

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

?

- Пусть событию A благоприятствует m исходов, событию B – k исходов, событию C – ℓ исходов из общего числа n равновозможных и несовместных исходов ($\ell \le m$, $\ell \le k$).
- Тогда: $P(A) = \frac{m}{n}$, $P(AB) = \frac{l}{n}$
- После того, как событие A произошло, число всех исходов стало равным m, а число исходов благоприятствующих событию B – ℓ.

Поэтому $\mathrm{P_A(B)} = \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{m}} = \frac{l/n}{m/n} = \frac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(A)}}$

Аналогично $\mathrm{P_B(A)} = \frac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(B)}}$.

Умножая обе части полученных равенств соответственно на P(A) и P(B), окончательно имеем:

$$P(AB) = P(A) \bullet P_A(B) = P(B) \bullet P_B(A)$$

Теорема умножения двух <u>независимых</u> событий

? Вероятность умножения независимых событий равна произведению их вероятностей

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема умножения двух <u>независимых</u> событий ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

? Если события А и В независимы, то $P(A) = P_B(A)$, из чего следует:

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A) = P(B) \cdot P(A)$$

Следствия:

1. Если события А и В независимы, то независимы и события $\bar{A}$ и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и В, А и $\bar{B}$
2. Для множества независимых испытаний, в каждом из которых случайное событие А может появиться с вероятностью р, вероятность Р появления события А хотя бы один раз равна

$$P = 1 - (1-p)^n$$

Формула полной вероятности

- Вероятность P(B) события B, которое может произойти только при условии появления одного из событий H_1, H_2, . . . , H_n, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез H_1, H_2, . . . , H_n на соответствующие условные вероятности событий B

$$P(B) = \sum_{i}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(B)$$

Формула полной вероятности

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

- Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n$ - полная система попарно несовместных событий, связанная с некоторым опытом, и B - произвольное событие, связанное с тем же опытом.
- Очевидно, что для произвольного события А справедливо равенство: $A = A \cdot \Omega$.
- С другой стороны, по определению полной системы событий

  $\Omega = H_1 + H_2 + \dots + H_n$ и поэтому

$$\Omega \cdot \mathrm{B} = (\boldsymbol{H_1} + \boldsymbol{H_2}, + \dots + \boldsymbol{H_n}) \cdot \mathrm{B}$$

$$\mathrm{B} = \boldsymbol{H_1} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{H_2} \cdot \boldsymbol{B} + \dots + \boldsymbol{H_n} \cdot \boldsymbol{B}$$

Формула полной вероятности

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

События $\mathrm{H_iB}$ и $\mathrm{H_jB}$ несовместимы, поэтому $\mathbf{P(B) = P(H_1B) + P(H_2B) + \ldots + P(H_nB)}$, или, короче,

$$\mathrm{P(B)} = \sum_{i=1}^{n} P(B \cdot H_i)$$

По теореме умножения для зависимых событий имеем: $\mathrm{P(B \cdot H_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(B)}$ и, следовательно,

$$P(B) = \sum_{i}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(B)$$

Формула Байеса

- Вероятность $P_B(H_i)$ гипотезы H_i при условии, что событие В произошло, равна:

$$P_B(H_i) = \frac{P(H_i) * P_{H_i}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) * P_{H_i}(B)}$$