

## Лекция 10.

Тема: Теоремы сложения и умножения вероятностей.

**Цель:** Рассмотреть события и действия над ними на языке теории множеств. Разобрать теоремы сложения и умножения вероятностей.

# Терминология

- $\Omega$  – множество всех возможных исходов опыта.
- $\omega \in \Omega \Rightarrow \omega$  – элементарное событие (неразложимый исход опыта).
- Любое событие  $A$  есть некоторое подмножество  $\Omega$  ( $A \subseteq \Omega$ ).
- $\Omega$  – достоверное событие,
- $\emptyset$  – невозможное событие.

# Пример

- Опыт – получение оценки на экзамене.
- $\Omega = \{2,3,4,5\}$  ,
- $A = \{ \omega : \omega \text{ – положительная оценка} \}$
- $A = \{3;4;5\}$

# Основные определения

- Определение 1: Суммой двух событий  $A$ ,  $B$  называется событие  $C$ , состоящее в выполнении события  $A$  или события  $B$   
 $C = A \cup B = A + B$  . Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в выполнении хотя бы одного из этих событий.
- Определение 2: Произведением нескольких событий называется событие  $C$ , состоящее в совместном выполнении всех этих событий  
 $C = A \cap B = A \cdot B$

# Основные определения

- Определение 3: События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – образуют полную группу, если  
$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$
- Определение 4: События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  несовместные, если  $A_j \cap A_i = \emptyset$  ( $i \neq j$ )
- Определение 5: Противоположным по отношению к событию  $A$  называется событие  $\bar{A}$ , состоящее в не появлении  $A$ , а значит дополняющее его до  $\Omega$

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

# Пример

- Опыт – получение оценки на экзамене.
- $\Omega = \{2,3,4,5\}$ ,
- Событие  $A$  : получение пятерки
- Событие  $\bar{A}$  : ?
- $\bar{A}$  : получение 2, 3, 4.

# Теорема сложения вероятностей

- Теорема 1: Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (AB = \emptyset)$$

Пример: Студент берет билет (1,2,3,...,10). Какова вероятность того, что он выберет билет с четным номером?

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$$

# Теорема сложения вероятностей

- В случае, когда события  $A$  и  $B$  совместны, вероятность их суммы выражается формулой:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

- **Пример**: Студент берет билет  $(1, 2, 3, \dots, 10)$ . Какова вероятность того, что студент вытянет билет, номер которого делится на 2 или на 3?

$$\frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$



# Теорема сложения вероятностей

- Теорема 2:

1) 
$$P\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (A_i A_j = \emptyset, i \neq j),$$

2) 
$$P\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i A_j) + \sum P(A_i A_j A_n) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

- Если  $A_1, \dots, A_n$  – несовместны, образуют полную группу, то 
$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$

- Сумма вероятностей противоположных событий равна 1: 
$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

# Определения

- Определение 6: Условной вероятностью события  $A$  при наличии  $B$  называется вероятность события  $A$ , вычисляемая при условии, что событие  $B$  произошло. Обозначается  $P(A|B)$ .
- Определение 7: События  $A$  и  $B$  называются независимыми, если появление одного не меняет вероятности появления другого.  
 $P(A | B) = P(A)$ ,  $P(B | A) = P(B)$ , для независимых событий.

# Теорема умножения вероятностей

- Теорема 3:
- Для независимых событий:  
 $P(AB) = P(A) \cdot P(B),$   
 $P(\cap A_i) = \prod P(A_i)$
- Для произвольных событий  
 $P(AB) = P(A) \cdot P(B | A),$   
 $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n) =$   
 $= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 \dots A_{n-1})$

# Примеры:

- Из 25 билетов, студент знает 20 билетов. Какова вероятность того, что студент ответит на 3 вопроса?

- Студент знает  $\frac{20}{25}$  билетов, какова вероятность того, что он ответит на три вопроса?  
 $\frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{4 \cdot 19 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 23} = \frac{19 \cdot 3}{5 \cdot 23} = \frac{57}{115}$

- Студент знает  $\frac{n}{2n}$  материала. Вопросы задаются случайным образом по всему курсу. Какова вероятность ответить на три вопроса?  
 $\frac{n}{2n} \cdot \frac{\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\frac{n}{2}-2}{\frac{n}{2}-1} = \frac{(n-2) \cdot (n-4)}{8n} = \frac{n-4}{8n}$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

# Примеры

- Студент сдает три экзамена.  $A_i$  – сдан  $i$  экзамен. Представить в виде суммы, произведения следующие события:

- A – все три экзамена сданы

$$A_1 A_2 A_3$$

- B – все три экзамена не сданы

$$\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$$

- C – первый и второй не сдан

$$\bar{A}_1 \bar{A}_2 = \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$$

- D – хотя бы один сдан

$$A_1 + A_2 + A_3 = \overline{\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3}$$

- E – хотя бы один не сдан

$$\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 = \overline{A_1 A_2 A_3}$$

- G – только 3-ий сдан

$$\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$$

- F – не менее двух сдано

$$A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3 = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$$

- H – не более одного сдано

$$\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 A_2 A_3$$

# Примеры

- Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания первого 0,6, второго – 0,7. Записать указанные события и найти вероятность того, что
- а) попадут оба стрелка
- б) промахнуться оба
- с) попадет первый и не попадет второй стрелок
- д) попадет только один стрелок

• Решение:  $P(\bar{A}_1) = 1 - 0,6 = 0,4; P(\bar{A}_2) = 1 - 0,7 = 0,3$

• а)  $P(A_1 A_2) = P(A_1) * P(A_2) = 0,6 * 0,7 = 0,42$

• б)  $P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) * P(\bar{A}_2) = 0,4 * 0,3 = 0,12$

• с)  $P(A_1 \bar{A}_2) = P(A_1) * P(\bar{A}_2) = 0,6 * 0,3 = 0,18$

• д)  $P(\underbrace{A_1 \bar{A}_2}_{\text{несовм.}} + \underbrace{\bar{A}_1 A_2}_{\text{несовм.}}) = P(\underbrace{A_1 \bar{A}_2}_{\text{незав.}}) + P(\underbrace{\bar{A}_1 A_2}_{\text{незав.}}) = P(A_1)P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)P(A_2) = 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,7 = 0,46$

- **Вопросы:**
- Чему равно произведение противоположных событий?
- Описать множество элементарных событий  $\Omega$  для последнего примера.