

ГЛАВА II ТЕОРИЯ БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

§1. Счетные множества. Примеры. Минимальность счетной мощности

- **Определение 1.**
- Множества A и B называются **равномощными** (обозначим: $|A| = |B|$), если существует биекция $f : A \rightarrow B$.

- **Теорема 2.** Отношение равномощности есть отношение эквивалентности.
- **Доказательство.**
- Необходимо проверить три условия:
рефлексивность, **симметричность,**
транзитивность.

- **Рефлексивность** выполняется, так как отображение
- $I_A: A \rightarrow A$ осуществляет биекцию множества A на себя, то есть $|A| = |A|$.
- **Симметричность.** Пусть $|A| = |B|$,
- то есть существует биекция, тогда существует отображение,

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$
- которое также является биекцией, то есть

$$|B| = |A|$$

- **Транзитивность.** Пусть $|A| = |B|$, $|B| = |C|$,
- то есть существуют биекции

$$f : A \rightarrow B$$

и

$$g : B \rightarrow C$$

- Тогда $g \circ f$ является биекцией,
- причем $g \circ f : A \rightarrow C$, то есть $|A| = |C|$.
Транзитивность, а вместе с ней и теорема доказаны.

- **Примеры.1)** Докажем, что $|(0;1)| = |(a;b)|$
- то есть докажем, что любые два интервала равномощны, то есть, грубо говоря, состоят из одного и того же количества точек, независимо от их длины. Рассмотрим функцию

$$y = a + (b - a) \cdot x$$

- $y(0) = a, y(1) = b$. Так как эта функция линейна и отлична от константы, то

$$f(x) = a + (b - a) \cdot x$$

- биективно отображает $(0;1)$ на (a, b) .
- Заметим, что по теореме 2 для любых открытых промежутков $|(a;b)| = |(c;d)|$

- 2) $|R| = |R_+|$, то есть прямая равномощна открытой полупрямой. В самом деле, отображение, определяемое функцией

$$y = 2^x$$

- есть не что иное, как биекция между R и R_+ .

- **Определение 3.**
- **Множество A называется счетным, если оно равномощно множеству натуральных чисел, то есть $|A| = |\mathbb{N}|$.**
- **Другими словами, множество A счетно, если его элементы можно занумеровать натуральными числами, то есть представить в виде: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$**

- **Теорема 4.** Любое подмножество счетного множества **или конечно или счетно** (*т.е. не может содержать никаких других бесконечностей*).

- **Доказательство.**
- Пусть A – счетное множество и $B \subseteq A$.
Перенумеруем все элементы множества A :

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$
- "Передвигаясь" в перечне элементов множества A от с меньшими номерами к элементам с большими номерами, будем выбирать из этого списка элементы подмножества B :
- $B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots\}, i_1 < i_2 < i_3 \dots$

- Если какой-то элемент a_{ik} окажется последним в списке B , то B является конечным множеством, состоящим из k элементов:
- Если же a_{ik} для каждого элемента из B в списке A всегда найдется следующий элемент
- то мы получаем список (множество)
- который занумерован числами $1, 2, 3, \dots, k, \dots$

- Если переобозначить

$$a_{ik} = b_k$$

то

$$|B| = |N| = \omega$$

- Теорема доказана.