Теорема 5. Любое бесконечное множество A содержит счетное подмножество B.

Доказательство. Построение счетного множества B будем вести индукцией по номеру элемента n. Так как A бесконечно, то оно не пусто, то есть существует $a_1 \in A$. Обозначим $B_1 = \{a_1\}$. Допустим построено $B_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ $(a_i \neq a_j$ при $1 \leq i < j \leq n)$. Множество $A \backslash B_n$ не пусто в силу бесконечности A, поэтому существует $a_{n+1} \in A \backslash B_n$. Положим $B_{n+1} = \{a_1, a_2, ..., a_{n+1}\}$. Тогда все элементы в B_{n+1} попарно различны. Положим $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Так как $B_n \subseteq A$, то и $B \subseteq A$, причем B – счетное множество. Теорема доказана.

Теорема 6. $|(0;1)| = |[0;1]|$.

Доказательство. Рассмотрим множество $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ – счетное подмножество множества $A = (0;1)$. Построим биекцию f между множествами $A = (0;1)$ и $C = [0;1]$, используя существенным образом структуру множества B.

Пусть f (1/2)=0, f (1/3)=1, f (1/4)=1/2, f (1/5)=1/3,…, $f\ (\frac{1}{n+2}) = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$. Эта "часть" отображения f биективно отображает множество B на $B \cup \{0; 1\}$.

Таким образом, задав f следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{если } x \in A \setminus B; \\ \dfrac{1}{n}, \text{если } x = \dfrac{1}{n+2}, n = 1,2,\ldots \\ 0, \text{если } x = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

получим $f:(0;1) \to [0;1]$, причем f – биекция. Теорема доказана.

Следствие 7. $|(a;b)| = |[a;b]| = |(a;b]| = |[a;b)|$.

Определение 8. Множество X называется бесконечным, если существуют $Y \subset X$ такое, что $|X| = |Y|$. Другими словами X бесконечно, если оно равномощно какому – либо своему собственному подмножеству. В противном случае множество X называется конечным.

§2. Объединение конечных и счетных множеств

Теорема 1. Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_k, ...\}$ − счетное множество, $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ − конечное множество, причем $A \cap B = \varnothing$. Тогда $A \cup B$ - счетное множество.

Доказательство. Построим биекцию между множествами N и $A \cup B$:

$$f(k) = b_k,\ k = 1, 2, 3, \ldots, m,$$

$$f(k) = a_{k-m},\ k = m+1, m+2, \ldots.$$

Отображение f каждому натуральному числу ставит в соответствие элемент множества $A \cup B$, причем отображение f - биекция.

Теорема 2. Если A – счетное множество и B – конечное подмножество A, тогда $A \backslash B$ счетно.

Доказательство. Поскольку $A \backslash B$ есть подмножество счетного множества A, то $A \backslash B$ конечно или счетно. Допустим $A \backslash B$ конечно. Тогда в силу равенства $(A \backslash B) \cup B = A$ и в силу конечности B получаем конечность множества A, но A по условию счетное. Допущение неверно, значит $A \backslash B$ счетно.

Теорема 3. Если A счетное и B конечное множества, то $A \cup B$ счетно.

Доказательство. Отметим, что теорема 3 отличается от теоремы 1 тем, что здесь не требуется, чтобы A и B не пересекались. Пусть $C = A \cap B$. Так как $C \subseteq B$, то C также конечно. По теореме 2 $A_1 = A \setminus C$ - счетное множество, причем $A_1 \cup B = A \cup B$ и $A_1 \cap B = \varnothing$. Тогда по теореме 1 $|A \cup B| = |A_1 \cup B| = \omega$.

Теорема 4. Пусть A и B счетные множества и $A \cap B = \varnothing$. Тогда $A \cup B$ - счетное множество.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots\}$ - списки множеств A и B. Построим биекцию между $A \cap B$ и N, следующим образом:

$$f\,(a_k) = 2k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

$$f\,(b_k) = 2k\text{-}1, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \ldots.$$

Так как $A \cap B = \varnothing$, то отображение f задано корректно. Биективность f очевидна и проверяется стандартным образом.

Следствие 5. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ - счетные попарно пересекающиеся множества, тогда $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ также счетное множество.

Доказательство. Применим метод математической индукции по k. При $k=1$ утверждение очевидно. Допустим утверждение верно при $k=l$, то есть множество $B=A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_l$ счетно, и докажем это утверждение для $k=l+1$. Заметим, что $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_l \cup A_{l+1} = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_l) \cup A_{l+1} = B \cup A_{l+1}$. Множество B счетно по индуктивному предположению, кроме того

$$A_{l+1} \cap B = A_{l+1} \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_l) = (A_{l+1} \cap A_1) \cup (A_{l+1} \cap A_2) \cup \ldots$$

$$\ldots \cup (A_{l+1} \cap A_l) = \varnothing.$$

По теореме 4 $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_l \cup A_{l+1}$ счетно. Следствие доказано.

Доказательство. Если все $A_1, A_2, ..., A_n$ конечны, то и объединение очевидным образом конечно. Теперь пусть среди A_i есть как конечные, так и счетные множества. После переобозначения можно считать, что $B_1, B_2, ..., B_l$ - конечные множества, $C_1, C_2, ..., C_m$ – счетные множества, причем $m+l=n$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $C_i \cap C_j = \varnothing$, $B_i \cap C_j = \varnothing$, $(1 \le i < j \le m)$. Множество $B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_l$ конечно, множество $C = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_m$ счетно по следствию 5, причем $B \cap C = \varnothing$. По теореме 3 $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = B \cup C$ - счетное множество. Теорема доказана.

Теорема 7. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – счетные множества. Тогда $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ также счетно.

Доказательство. Рассмотрим следующую совокупность конечных или счетных множеств: $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), ...$ $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$. Тогда $B_1, B_2, ..., B_n$ есть совокупность попарно непересекающихся конечных или счетных множеств, причем $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n$. По теореме 6 это множество является счетным.

Теорема 8. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – конечная совокупность конечных или счетных множеств. Тогда множество $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ счетно или конечно. Если все A_i конечны, то и объединение конечно; если среди A_i есть хотя бы одно счетное множество, то и объединение счетно.

Доказательство. Пусть некоторое A_i (i =1, 2, ..., n) счетно. После переобозначения можно считать, что вся совокупность исходных множеств разбита на две группы: $B_1, B_2, ..., B_l$ – совокупность конечных множеств, $C_1, C_2, ..., C_m$ –совокупность счетных множеств ($m + l = n$). Тогда $B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_l$ – конечное множество, $C = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_m$ – счетное множество по теореме 7, $B \cup C = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ – счетное множество.

Теорема 9. Пусть A – счетное множество и $f : A \xrightarrow{на} B$. Тогда B не более чем счетно.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Обозначим через $A_b \subseteq A$ прообраз b при отображении f, то есть $A_b = f^{-1}(b)$ для любого $b \in B$. Так как f – отображение “на”, то $A_b \neq \varnothing$. Выберем в множестве A_b по одному элементу $a_b \in A_b$ – представитель множества A_b, так как $A_b \neq \varnothing$. Обозначим через $A' = \{a_b \mid b \in B\}$. Отображение $g : A' \to B$, $g(a_b) = b$, является биекцией между множествами A' и B, значит $|A'| = |B|$. С другой стороны, $A' \subseteq A$, то есть A' является конечным или счетным множеством как подмножество счетного множества. Теорема доказана.

Теорема 10. Пусть B – счетное множество и $f : A \xrightarrow{1-1} B$. Тогда A не более, чем счетно.

Доказательство. Обозначим через $A' = f(A)$ образ множества A при отображении f. Отображение $f' : A \to A'$, $f'(a) = f(a)$, $a \in A$, есть биекция, поэтому $|A| = |A'|$. С другой стороны, A' есть подмножество счетного множества B, значит является конечным или счетным, значит A есть конечное или счетное множество. Теорема доказана.

§3. Декартовы произведения и счетные объединения счетных множеств

Обозначим:

$P=\{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ множество всех простых чисел. Нами было доказано, что P бесконечно, кроме того, P является подмножеством счетного множества, значит P счетно.

$P_k=\{p_k^n \mid n\in N\}$ – множество всех степеней простого числа p_k. Например $P_3=\{5^1, 5^2, 5^3, \ldots, 5^n, \ldots\}$. Ясно, что для любого $k\in N$ P_k счетно и для любых $i, j \in N$, $i\neq j$, $P_i \cap P_j = \varnothing$.

$P^* = \bigcup\limits_{k\in N} P_k$ – множество всех степеней всех простых чисел. Поскольку $P^* \subseteq N$ и бесконечно, то P^* является счетным множеством.

Теорема 1. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ – счетная совокупность счетных попарно непересекающихся множеств. Тогда множество $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ также является счетным.

Доказательство. Так как A_k и P_k счетные множества, то существует биекция $f_k : A_k \to P_k$. Так как A_k попарно не пересекаются, то семейство отображений f_k согласовано. Так как P_k попарно не пересекаются, то $f = \bigcup_{k \in N} f_k$ является биекцией между множествами $\bigcup_{k \in N} A_k$ и $P^* = \bigcup_{k \in N} P_k$, то есть $\left| \bigcup_{k \in N} A_k \right| = \left| P^* \right| = \omega$. Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ – счетная совокупность счетных или конечных множеств A_k, которые попарно не пересекаются. Тогда $\bigcup\limits_{k \in N} A_k$ счетно.

Доказательство. Применим теорему 1, дополнив каждое конечное множество до счетного таким образом, чтобы эти расширенные множества по-прежнему попарно не пересекались. Разобьем совокупность всех данных множеств на две группы:

$B_1, B_2, ..., B_l, ...$ - все конечные множества исходной совокупности,

$C_1, C_2, ..., C_n, ...$ - все счетные множества исходной совокупности.

Множество $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_l \cup \ldots$ конечно или счетно, множество $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n \cup \ldots$ счетно, причем $B \cap C = \varnothing$. По доказанному ранее $B \cup C$ счетно.

Теорема 3. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ – счетная совокупность счетных множеств и $A = \bigcup_{n \in N} A_n$. Тогда A счетное множество.

Доказательство. Построим счетную совокупность конечных или счетных попарно непересекающихся множеств, объединение которых равно A: $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus \left(A_1 \cup A_2\right), \ldots,$ $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$. Очевидно, что $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A$. По следствию 2 множество $A = \bigcup_{n \in N} B_n = \bigcup_{n \in N} A_n$ счетно.

Следствие 4. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n, \ldots$ – счетная совокупность конечных или счетных попарно различных множеств. Тогда множество $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \ldots$ счетно.

Теорема 5. Пусть A и B счетные множества. Тогда декартово произведение $A \times B$ также является счетным множеством.

Доказательство. Перечислим элементы множеств A и B: $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots\}$. Тогда $A \times B$ = $\{(a_i; a_j) \mid i, j \in N\}$. Разобьем $A \times B$ на счетное объединение счетных множеств:

$$A_1 = \{(a_1; b_1), (a_1; b_2), \ldots, (a_1; b_n), \ldots\},$$

$$A_2 = \{(a_2; b_1), (a_2; b_2), \ldots, (a_2; b_n), \ldots\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_m = \{(a_m; b_1), (a_m; b_2), \ldots, (a_m; b_n), \ldots\}.$$

Очевидно, что $A_i \cap A_j = \varnothing$, при $i \neq j$, т.к. $a_i \neq a_j$, и

$\bigcup\limits_{m \in N} A_m = A \times B$, то есть $A \times B$ есть объединение счетного числа счетных попарно непересекающихся множеств. Значит $A \times B$ счетно.

Следствие 6. Пусть $A_1, A_2, ..., A_m$ – счетные множества, тогда $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ – счетно.

Теорема 7. Множество рациональных чисел Q счетно.

Доказательство. Множество целых чисел Z счетно, значит и множество $Z \times Z$ счетно. Множество $Z \times (Z \setminus \{0\})$ также счетно. Каждой паре (a; b), где $a \in Z, b \in Z \setminus \{0\}$ поставим в соответствие рациональное число a: b. Это отображение $f : Z \times (Z \setminus \{0\}) \to Q$ является отображением “на”, поэтому Q не более чем счетно, а так как оно бесконечно, то $|Q| = \omega$.

Определение 8.

а) Число α называется алгебраическим числом степени n, если α есть корень целочисленного многочлена $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

б) Число α называется алгебраическим, если оно есть алгебраическое некоторой степени.

Примеры.

1)Любое рациональное число $a\colon b$ является алгебраическим степени 1, так как оно является корнем целочисленного уравнения $bx + a = 0$.

2)Число $\sqrt{2}$ является алгебраическим числом степени 2, так как является корнем целочисленного уравнения $x^2 - 2 = 0$.

3)Докажем, что $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ является алгебраическим числом степени 6. В самом деле,

$$x = \sqrt[3]{1-\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^3 = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x^3 - 1 = -\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$(x^3 - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^6 - 2x^3 - 1 = 0.$$

Теорема 9. Множество алгебраических чисел счетно.

Доказательство. Каждый многочлен степени n $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ полностью определяется набором целых чисел $(a_0, a_1, ..., a_n)$ длины $n+1$. Поэтому целочисленных многочленов существует столько же, сколько существует таких наборов, то есть $\left|Z^{n+1}\right|$, но $\left|Z^{n+1}\right| = \omega$. Таким образом, целочисленных многочленов степени n существует счетное число. Пусть P_n - множество всех целочисленных многочленов степени n и $P = \bigcup_{n \in N} P_n$ - множество всех целочисленных многочленов. Так как P есть счетное объединение счетных множеств, то оно само счетно.

Итак, множество всех целочисленных многочленов имеет счетную мощность. Перечислим все его элементы: $P=\left\{P_1^{k_1}, P_2^{k_2}, \ldots, P_n^{k_n}, \ldots\right\}$. Индекс сверху показывает степень многочлена P_n. По основной теореме алгебры многочлен $P_n^{k_n}$ имеет k_n корней. Обозначим через A_n конечное множество всех корней многочлена $P_n^{k_n}$. Тогда $A = \bigcup\limits_{n\in N} A_n$ есть множество всех алгебраических чисел. Поскольку A есть счетное объединение конечных множеств, то A счетно. Теорема доказана.