ГЛАВА II ТЕОРИЯ БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

§1. Счетные множества. Примеры. Минимальность счетной мощности

- **Определение 1.**
- Множества A и B называются **равномощными** (обозначим: $|A|=|B|$), если существует биекция $f: A \to B$.

- **Теорема 2.** Отношение равномощности есть отношение эквивалентности.
- **Доказательство.**
- Необходимо проверить три условия: **рефлексивность, симметричность, транзитивность**.

- **Рефлексивность** выполняется, так как отображение
- I_A: $A \to A$ осуществляет биекцию множества A на себя, то есть $|A| = |A|$.
- **Симметричность**. Пусть $|A| = |B|$,
- то есть существует биекция , тогда существует отображение ,

$$f^{-1} : B \to A$$

- которое также является биекцией, то есть

$$|B| = |A|$$

- **Транзитивность**. Пусть $|A| = |B|$, $|B| = |C|$,
- то есть существуют биекции

$$f : A \to B$$

и

$$g : B \to C$$

- Тогда $g \circ f$ является биекцией,
- причем $g \circ f : A \to C$, то есть $|A| = |C|$. Транзитивность, а вместе с ней и теорема доказаны.

- **Примеры.** 1) Докажем, что $|(0;1)| = |(a;b)|$
- то есть докажем, что любые два интервала равномощны, то есть, грубо говоря, состоят из одного и того же количества точек, независимо от их длины. Рассмотрим функцию

$$y = a + (b - a) \cdot x$$

- $y(0) = a$, $y(1) = b$. Так как эта функция линейна и отлична от константы, то

$$f(x) = a + (b - a) \cdot x$$

- биективно отображает (0;1) на (a, b).
- Заметим, что по теореме 2 для любых открытых промежутков $|(a;b)| = |(c;d)|$

- 2) $|R| = |R_+|$, то есть прямая равномощна открытой полупрямой. В самом деле, отображение, определяемое функцией

$$y = 2^x$$

- есть не что иное, как биекция между R и R_+.

- **Определение 3.**
- **Множество** $\boldsymbol{A}$ называется **счетным**, если оно равномощно множеству натуральных чисел, то есть $|A| = |N|$.
- Другими словами, множество $\boldsymbol{A}$ счетно, если его элементы можно занумеровать *натуральными числами*, то есть представить в виде: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$

- **Теорема 4.** Любое подмножество счетного множества **или конечно или счетно** ***(т.е. не может содержать никаких других бесконечностей).***

- **Доказательство.**
- Пусть A – счетное множество и $B \subseteq A$. Перенумеруем все элементы множества A:

$A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$

- "Передвигаясь" в перечне элементов множества A от с меньшими номерами к элементам с большими номерами, будем выбирать из этого списка элементы подмножества B:
- $B = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, ...\},\ i1 < i2 < i3...$

- Если какой-то элемент a_{ik} окажется последним в списке *B*, то *B* является конечным множеством, состоящим из к элементов:

$$B=\{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{ik}\}$$

- Если же для каждого элемента a_{ik} из *B* в списке *A* всегда найдется следующий элемент $a_{i(k+1)} \in B$
- то мы получаем список (множество) $B=\{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{ik}, \ldots\} \subseteq A$
- который занумерован числами 1,2,3,…,*k*,….

- Если переобозначить

$$a_{ik} = b_k$$

то

$$|B| = |N| = \omega$$

- Теорема доказана.