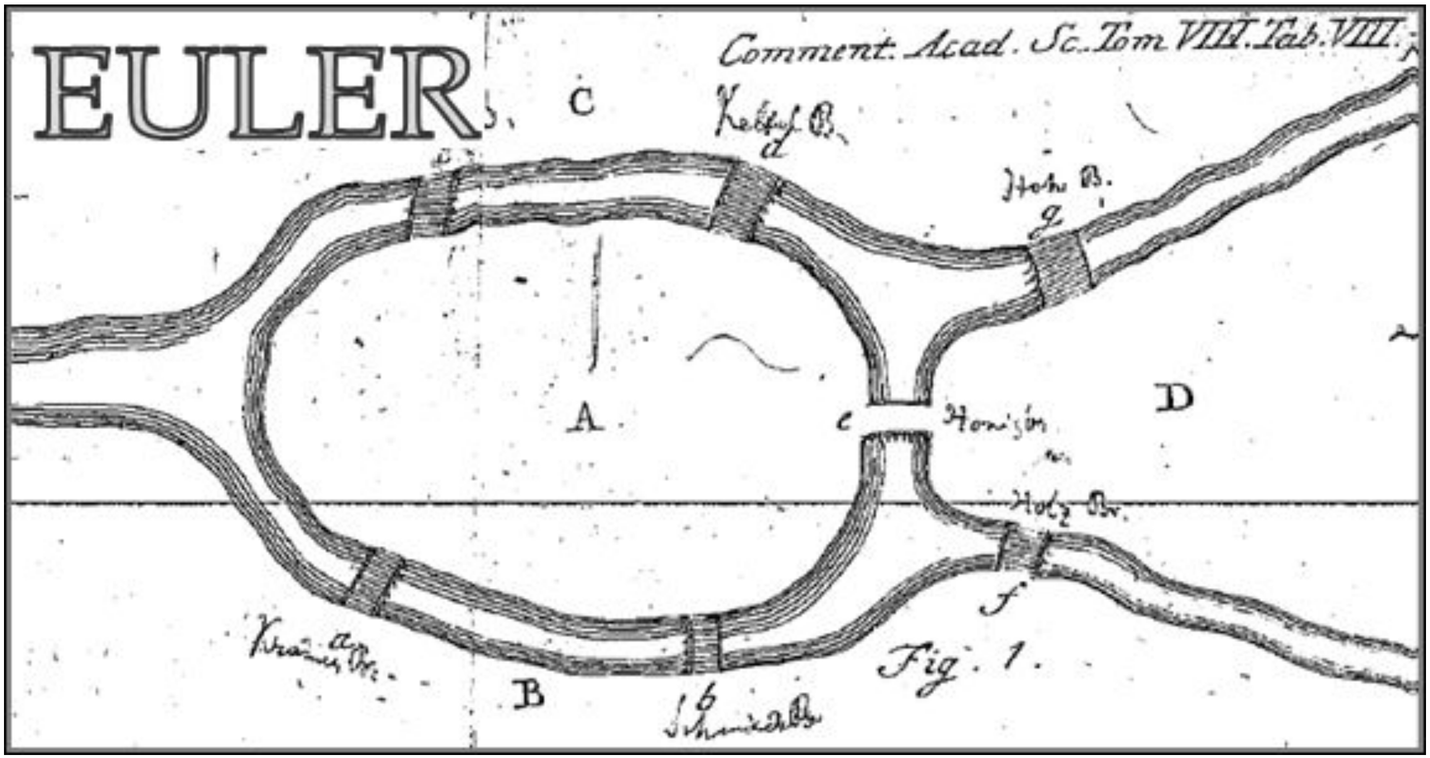
Теория графов

Лекция 1

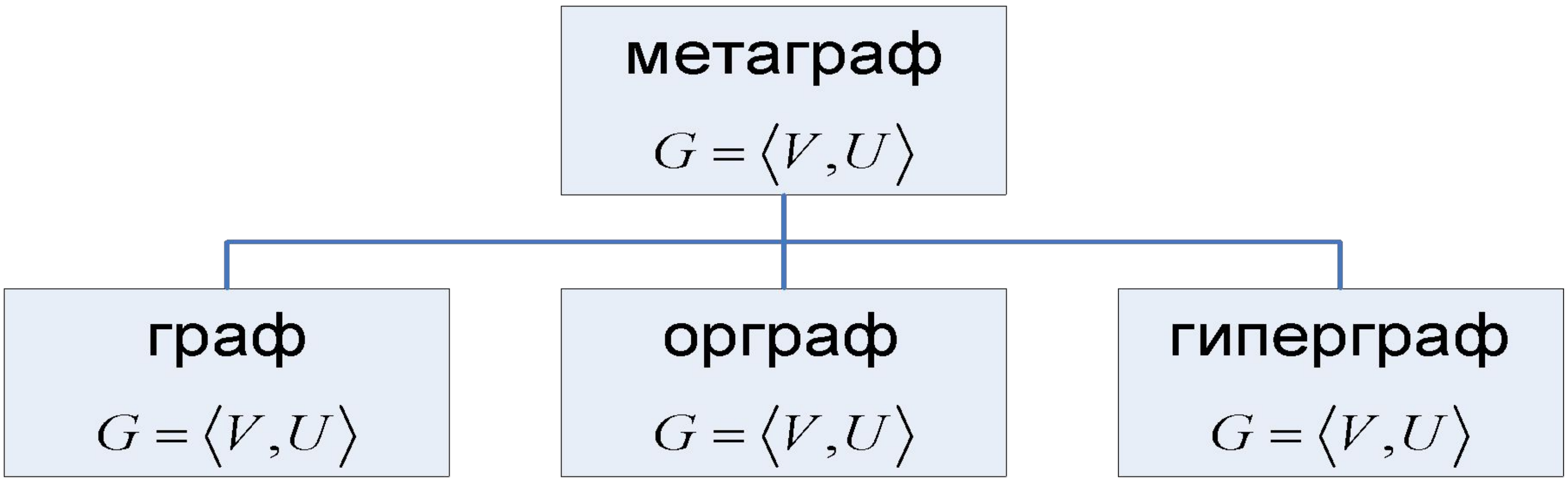
Литература

1. В.А. Горбатов Дискретная математика М.: АСТ; Астрель, 2003
2. Харари Ф. Теория графов, 2003г
3. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход. 1978
4. Кузнецов О.П., Дискретная математика для инженера, 2009.
5. Тихомирова А.Н. Теория графов, МИФИ,

Задача о Кёнигсбергских мостах Леонард Эйлер(1707-1783)



Основные объекты графов



- носитель метаграфа (конечное множество вершин). V=$\{v_1, v_2, \ldots v_p\}$
- сигнатура метаграфа (конечное множество связей между вершинами). U=$\{u_1, u_2, \ldots u_q\}$

Понятие графа и орграфа

Граф $G=\langle V,U\rangle$, где

$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $n\geq 1$ –

множество вершин (носитель),

$U\subseteq V\times V$ (сигнатура).

Неориентированный граф (граф)

$G = \langle V, U \rangle$,

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, n \geq 1$,

$U \subseteq V \times V$

$(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$

(v_i, v_j) – ребро графа

(v_i, v_i) - петля

Ориентированный граф (орграф)

$G = \langle V, U \rangle$,

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, n \geq 1$

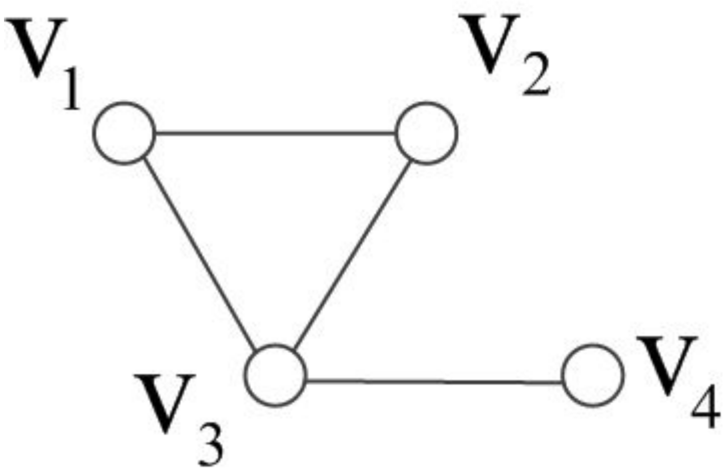
$U \subseteq V \times V$

$(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$

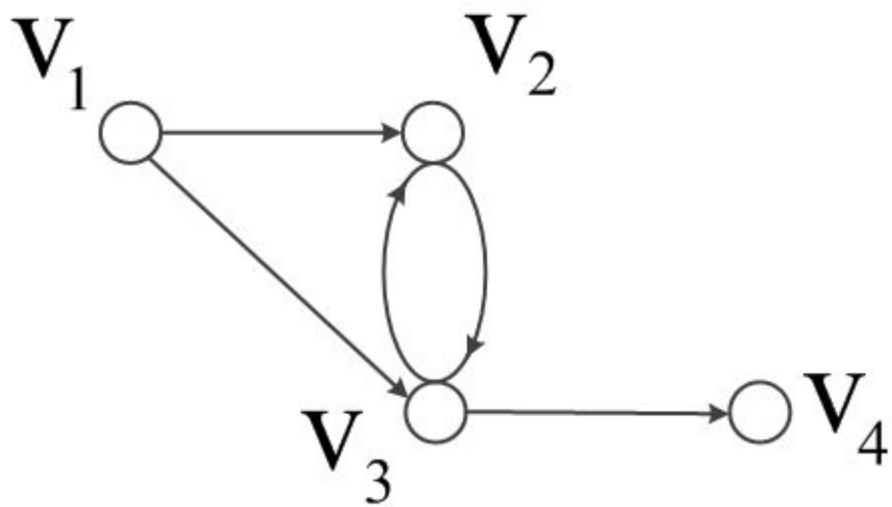
(v_i, v_j) - дуга

Геометрический граф

Граф



Орграф



Обозначение

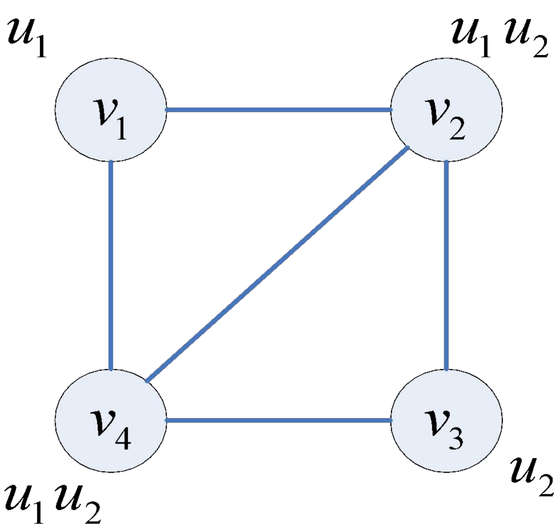
$$G_{p,q} \quad |V| = p, \ |U| = q$$

$G_{1,0}$ - тривиальный граф

типы метаграфов
ГИПЕРГРАФ (модельный граф)

Сигнатура (U) - множество граней, каждая из которых связывает некоторое подмножество вершин. **Грань** – подмножество вершин гиперграфа

$$u \in U \to u \subseteq V$$



$$G = \langle V, U \rangle$$

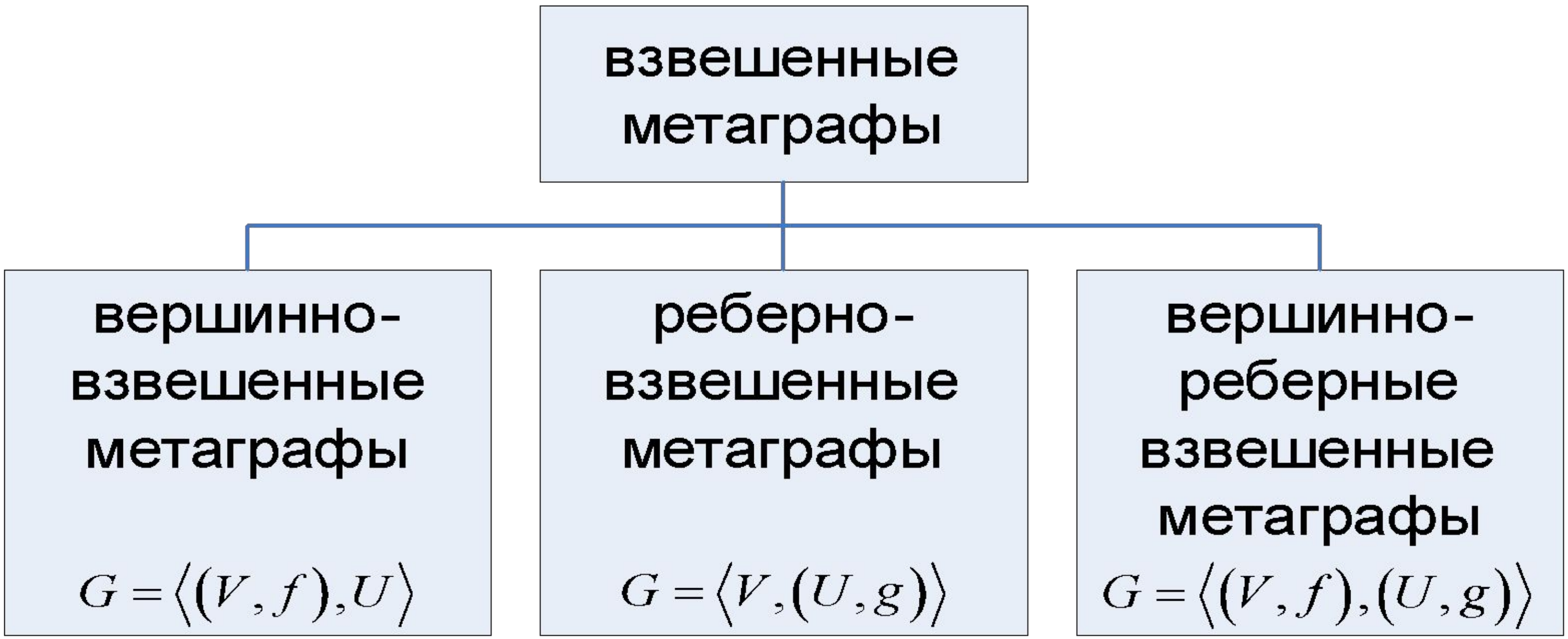
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$U = \{u_1, u_2\}$$

$$u_1 = \{v_1, v_2, v_4\}$$

$$u_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$$

взвешенные метаграфы



$f\colon V \to N$ - весовая функция для носителя (вершин)

$g\colon U \to K$ - весовая функция для сигнатуры (ребер или дуг)

N, K – некоторые множества (весовые характеристики)

Локальная структура графа

$(v_i, v_j) \in U$ – v_i и v_j – смежны

$u_k = (v_i, v_j)$ – u_k инцидентно v_i,

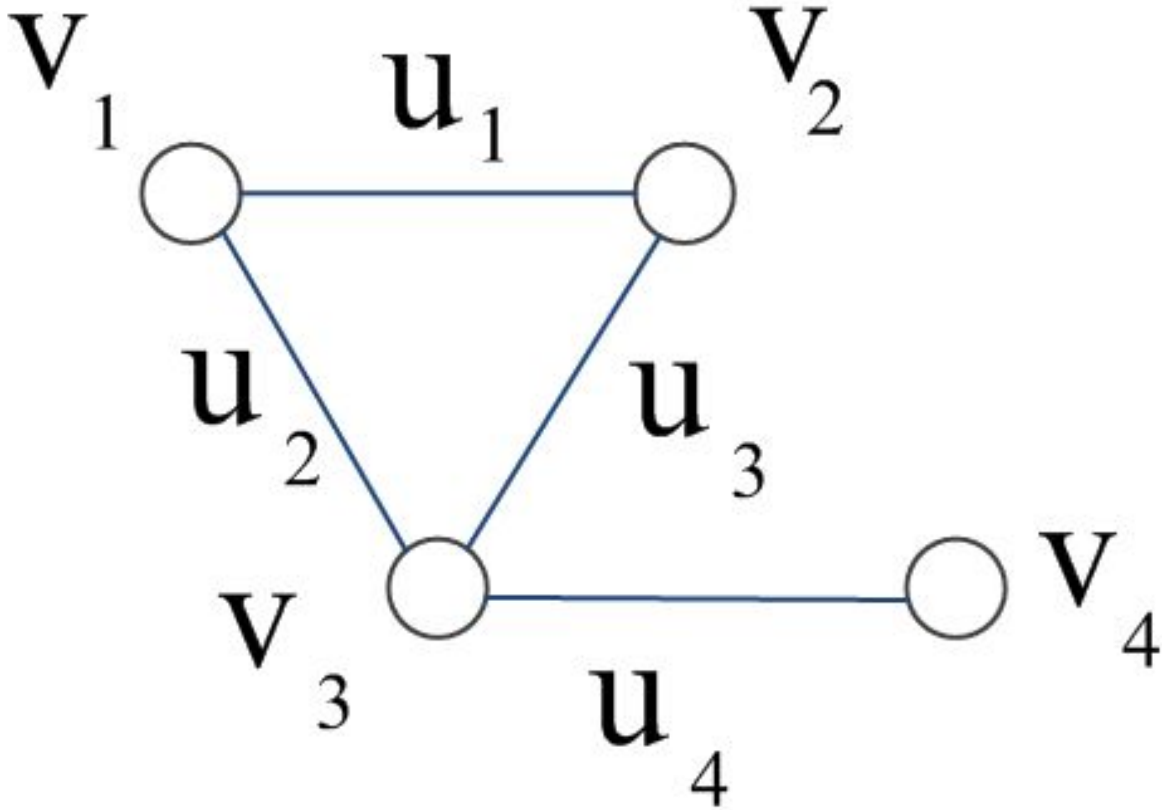
u_k инцидентно v_j, v_i инцидентно u_k

v_j инцидентно u_k

$u_k = (v_i, v_j)$, $u_n = (v_i, v_m)$ –

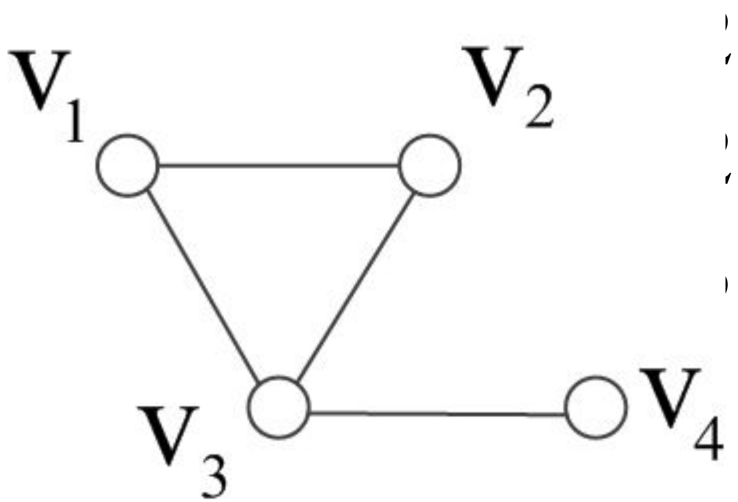
u_k и u_n – смежны

Пример



Степень вершины

Степень вершины ($d(v_i)$) – число рёбер, инцидентных вершине



Теорема

В любом конечном графе число вершин нечётной степени чётно.

Свойства степеней графа

$G_{p,q}$

$$\sum_{i=1}^{p} d(v_i) = 2q$$

Степень графа

Степень графа (максимальная степень вершины)

$$\Delta(G) = \max_{vi \in V}\{d(v_i)\}$$

Минимальная степень вершины графа

$$\delta(G) = \min_{vi \in V}\{d(v_i)\}$$

Локальная структура ориентированного графа

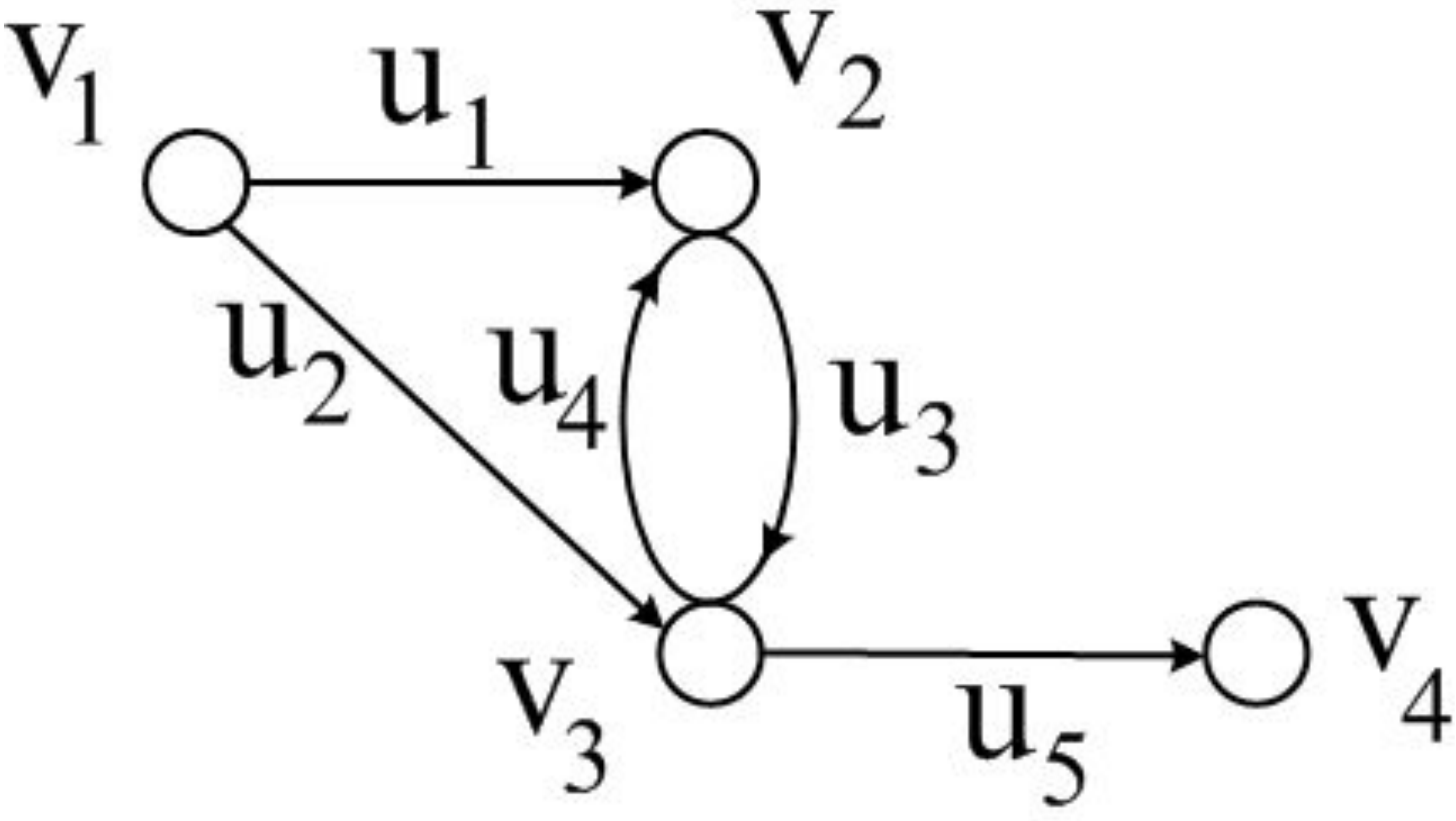
$\mathbf{u_k} = (\mathbf{v_i},\mathbf{v_j})$ – дуга $\mathbf{u_k}$ положительно инцидентна $\mathbf{v_i}$,

дуга $\mathbf{u_k}$ отрицательно инцидентна $\mathbf{v_j}$,

$\mathbf{u_k} = (\mathbf{v_i},\mathbf{v_j})$, $\mathbf{u_n} = (\mathbf{v_i},\mathbf{v_m})$ –

$\mathbf{u_k}$ и $\mathbf{u_n}$ – смежны

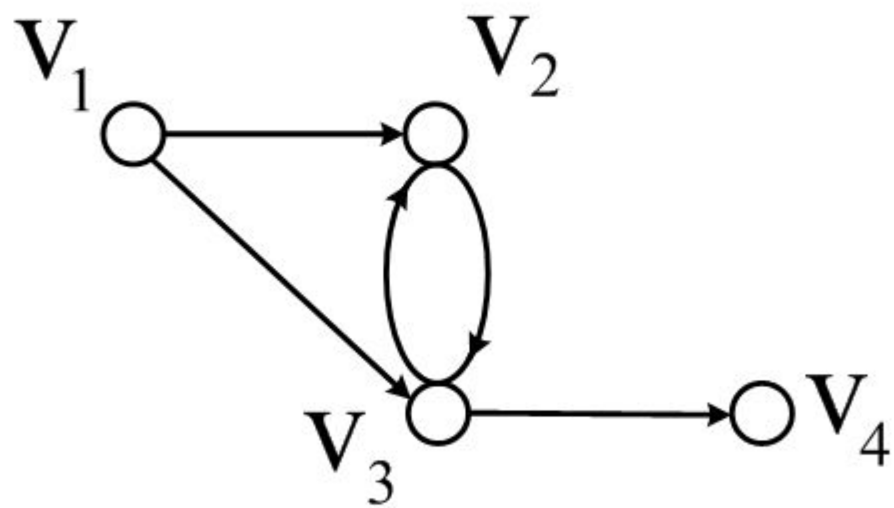
Пример



Степени вершин в орграфе

$d^+(v_i)$ – число положительно инцидентных дуг вершины v_i.

$d^-(v_i)$ – число отрицательно инцидентных дуг вершины v_i.



$\mathbf{d^+(v_1) = 2,\ d^-(v_1) = 0;}$

$\mathbf{d^+(v_2) = 1,\ d^-(v_2) = 2.}$

Свойства степеней орграфа

Для любого ориентированного графа

$$\sum_{v_i \in V} d^+(v_i) = \sum_{v_i \in V} d^-(v_i)$$

Свойства степеней орграфа

Для любого ориентированного графа

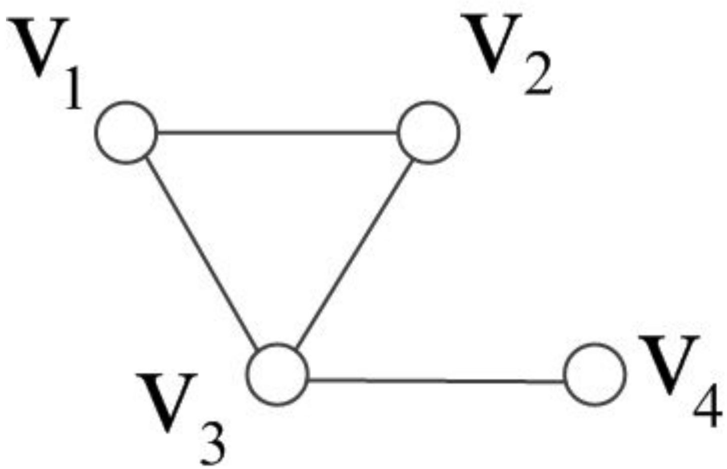
$$\sum_{v_i \in V} (d^+(v_i) + d^-(v_i)) = 2q$$

Матричное представление графа

Матрица смежности A:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, (v_i, v_j) \in U \\ 0, (v_i, v_j) \notin U \end{cases}$$

Пример



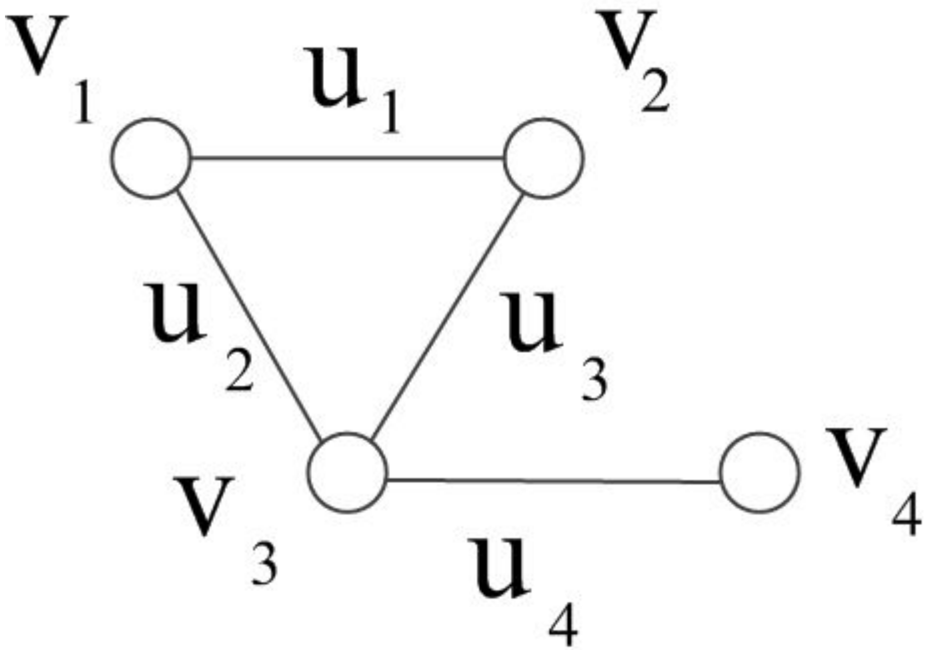
A=

0	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**0**

Матрица инцидентности B

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, v_i \text{ инцидентно } u_j \\ 0, v_i \text{ не инцидентно } u_j \end{cases}$$

Пример



B=

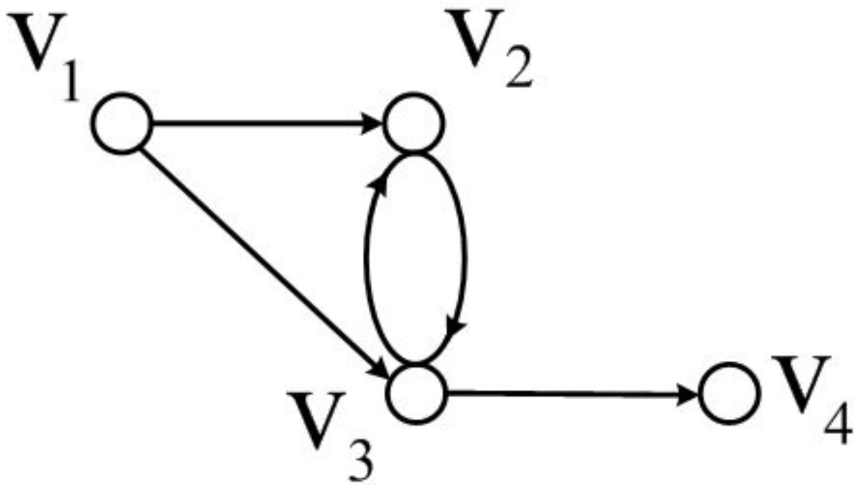
1	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**

Матрица смежности орграфа

A:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, (v_i, v_j) \in U \\ 0, (v_i, v_j) \notin U \end{cases}$$

Пример



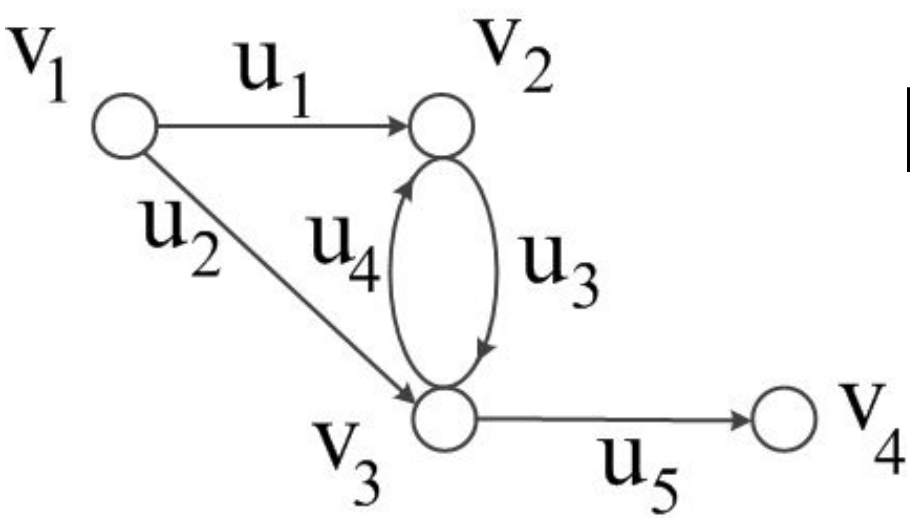
A=

0	1	1	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	0	0	0

Матрица инцидентности B

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, u_j = (v_i, v_k) \\ -1, u_j = (v_k, v_i) \\ 0, v_i \text{ не инцидентно } u_j \end{cases}$$

Пример



B=

1	**1**	**0**	**0**	**0**
-1	**0**	**1**	**-1**	**0**
0	**-1**	**-1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**-1**

Функциональный способ задания графов

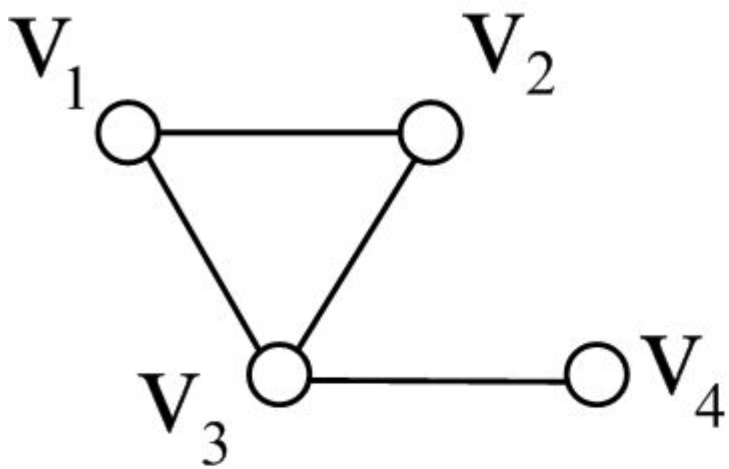
$\boldsymbol{G = \langle V, \Gamma \rangle}$

$\boldsymbol{\Gamma}$- функция окрестности вершин

$\boldsymbol{\Gamma :} V \rightarrow P(V)$

$\boldsymbol{\Gamma}(v) = \{v_i \mid v_i \textit{ смежна с } v\}$

Пример

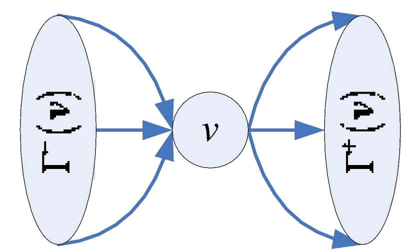


$$\Gamma(v_1)=\{v_2, v_3\}$$
$$\Gamma(v_2)=\{v_1, v_3\}$$
$$\Gamma(v_3)=\{v_1, v_2, v_4\}$$
$$\Gamma(v_4)=\{v_3\}$$

Функциональный способ задания орграфов

$$G=\langle V,\Gamma^{+}\rangle \quad G=\langle V,\Gamma^{-}\rangle$$

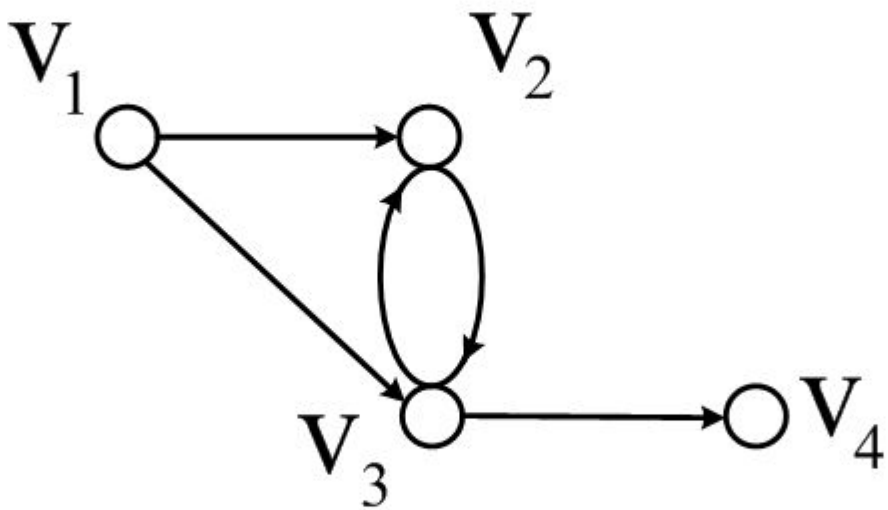
Γ^{+}, Γ^{-} - функции положительной и отрицательной полуокрестности вершины, соответственно



$$\Gamma^{+}: V \rightarrow P(V) \qquad \Gamma^{-}: V \rightarrow P(V)$$

$$\Gamma^{+}(v)=\{v_i \mid (v,v_i) \in U\} \qquad \Gamma^{-}(v)=\{v_i \mid (v_i,v) \in U\}$$

Пример



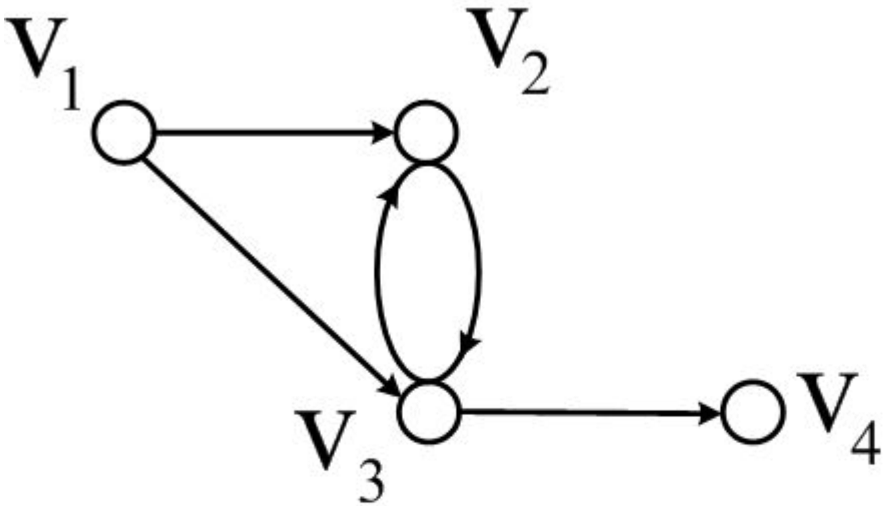
$\Gamma(v_1)^+=\{v_2, v_3\}$

$\Gamma(v_2)^+=\{v_3\}$

$\Gamma(v_3)^+=\{v_2, v_4\}$

$\Gamma(v_4)^+=\varnothing$

Пример



$\Gamma(v_1)^- = \varnothing$

$\Gamma(v_2)^- = \{v_1, v_3\}$

$\Gamma(v_3)^- = \{v_1, v_2\}$

$\Gamma(v_4)^- = \{v_3\}$

Изоморфизм графов

Графы изоморфны, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами вершин, сохраняющее отношение смежности

Функциональное задание изоморфизма графов

Два графа $G_a = \langle V_a, U_a \rangle$ и $G_b = \langle V_b, U_b \rangle$ **изоморфны**, если существует взаимно однозначная функция

h: $V_a \rightarrow V_b$ такая, что:

1) если $(v_{\boldsymbol{a1}}, v_{\boldsymbol{a2}}) \in U_a$, то $(h(v_{\boldsymbol{a1}}), h(v_{\mathbf{a2}})) \in U_b$;

2) если $(v_{\boldsymbol{b1}}, v_{\boldsymbol{b2}}) \in U_b$, то

$(h^{-1}(v\ldots), h^{-}(v\ldots)) \in U\ldots$

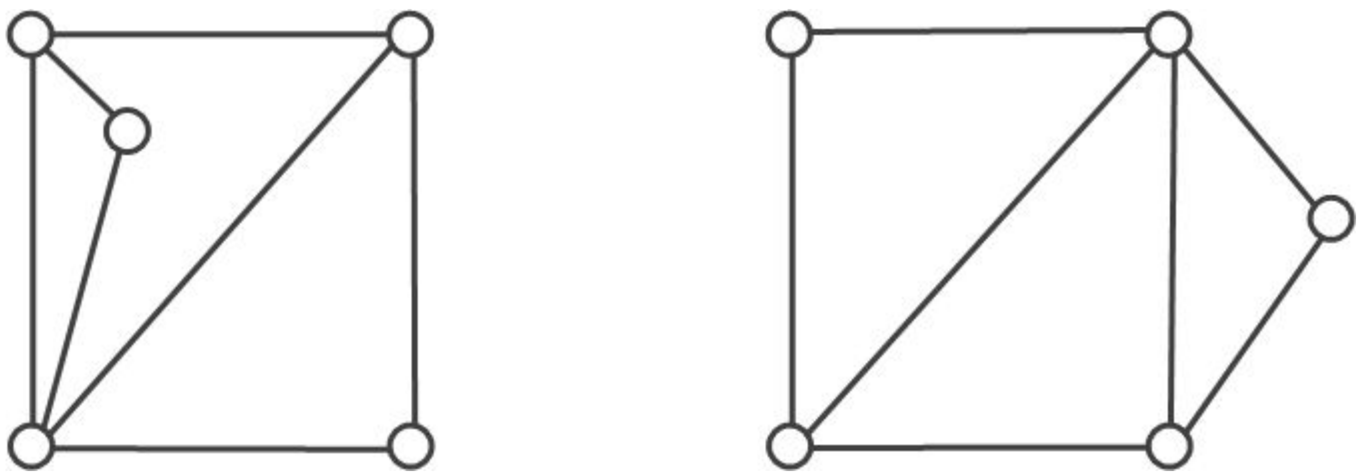
Свойства изоморфизма

Отношение

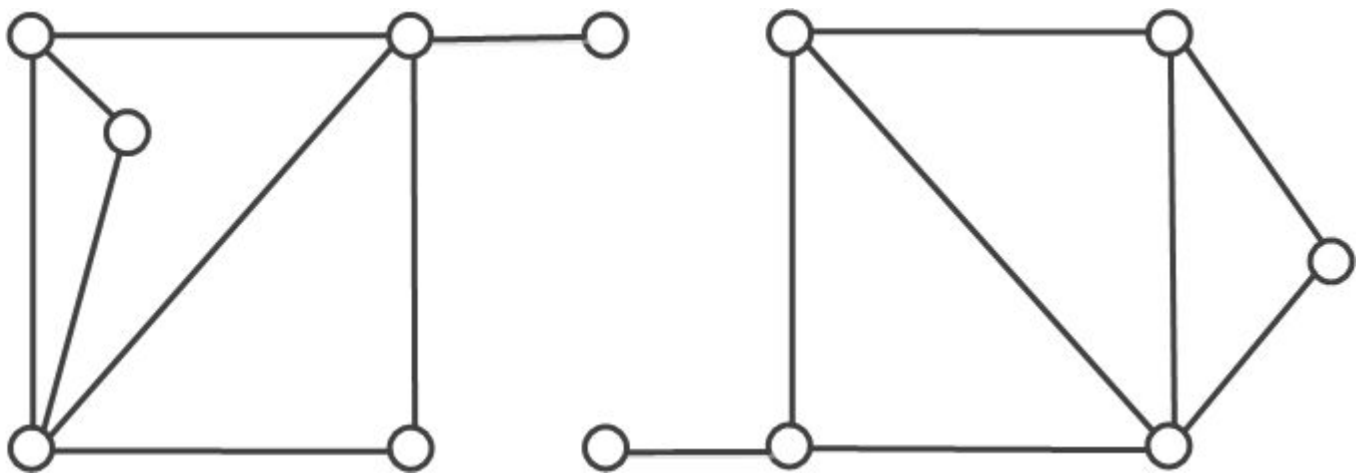
- рефлексивно
- симметрично
- транзитивно

Эквивалентность

Пример изоморфных графов



Пример не изоморфных графов



Инварианты графа

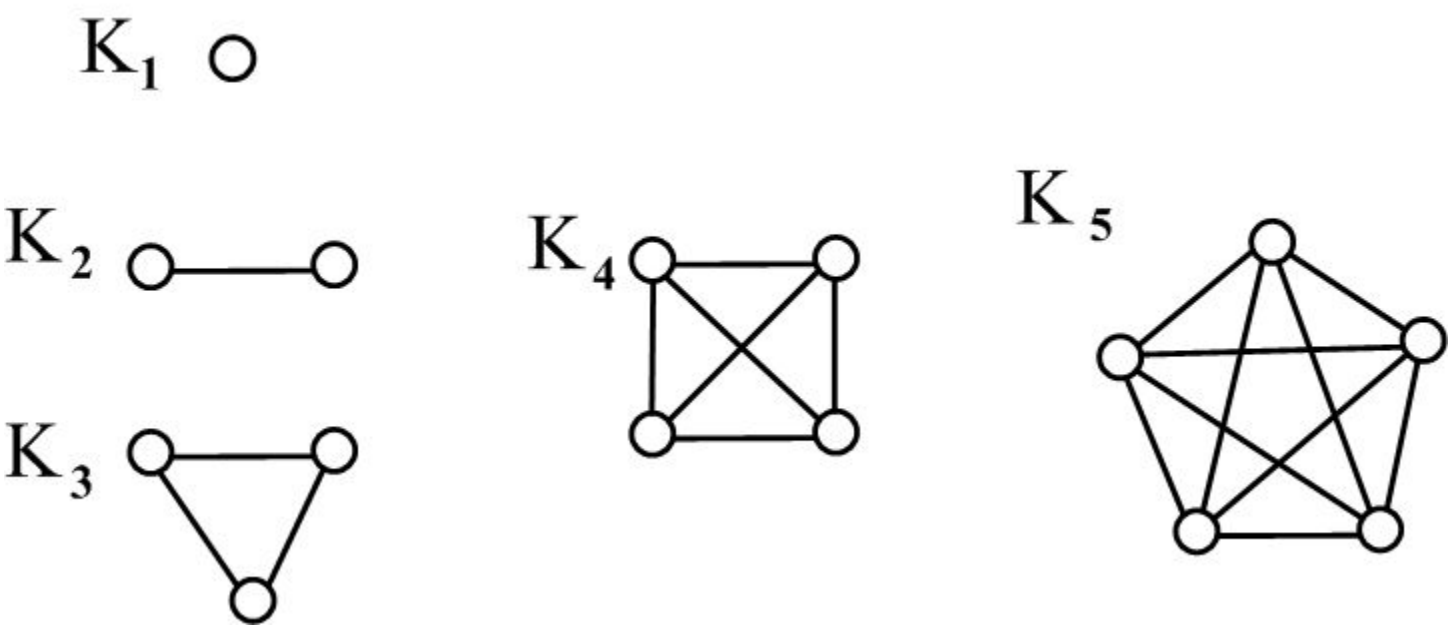
Количественная или качественная характеристики, неизменные для всех изоморфных между собой графов (орграфов) называется **<u>ИНВАРИАНТОМ</u>**

Поиск полной системы инвариантов графа, задающей граф с точность до изоморфизма – основная задача теории графов (***полная система инвариантов ещё не найдена***)

Полный граф K_n

Граф полный, если каждая вершина смежна с каждой.

Полный граф с n вершинами - K_n

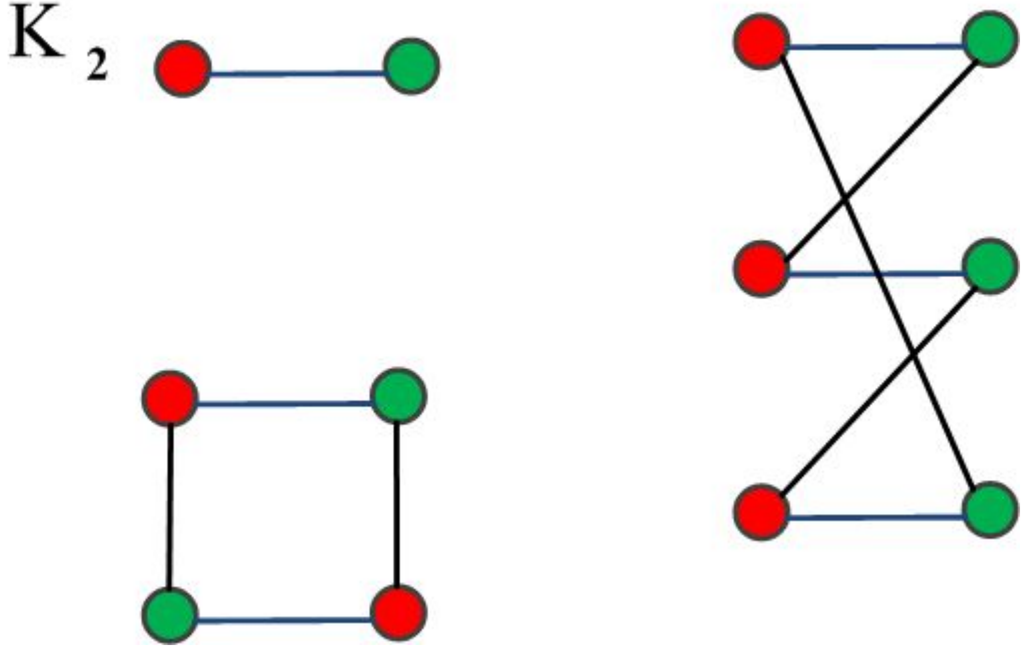


Двудольный граф

Граф двудольный, если множество вершин графа можно разбить на два непересекающихся подмножества, в каждом из которых никакая пара вершин не смежна.

$$G=\langle V, U\rangle,\ V=V_1 \cup V_2,$$
$$V_1 \cap V_2=\varnothing,\ U \subseteq V_1 \times V_2$$

Двудольные графы. Примеры



Полный двудольный граф $K_{m,n}$

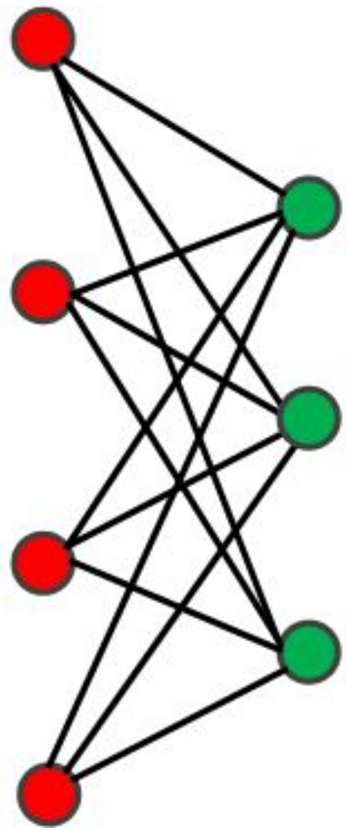
$K_{m,n}$ - граф двудольный и каждая вершина из множества V_1 смежна с каждой вершиной из V_2, $|V_1|=m$, $|V_2|=n$.

$G=<V, U>$, $V=V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2=\varnothing$,

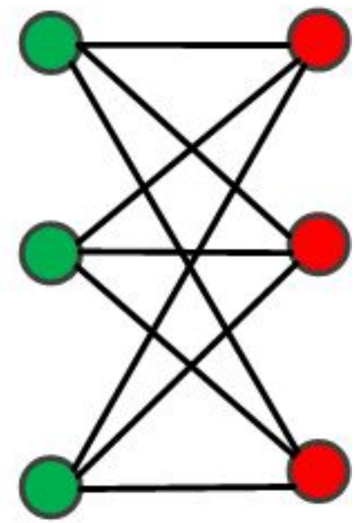
$U=V_1 \times V_2$

Полные двудольные графы $K_{m,n}$

$K_{4,3}$



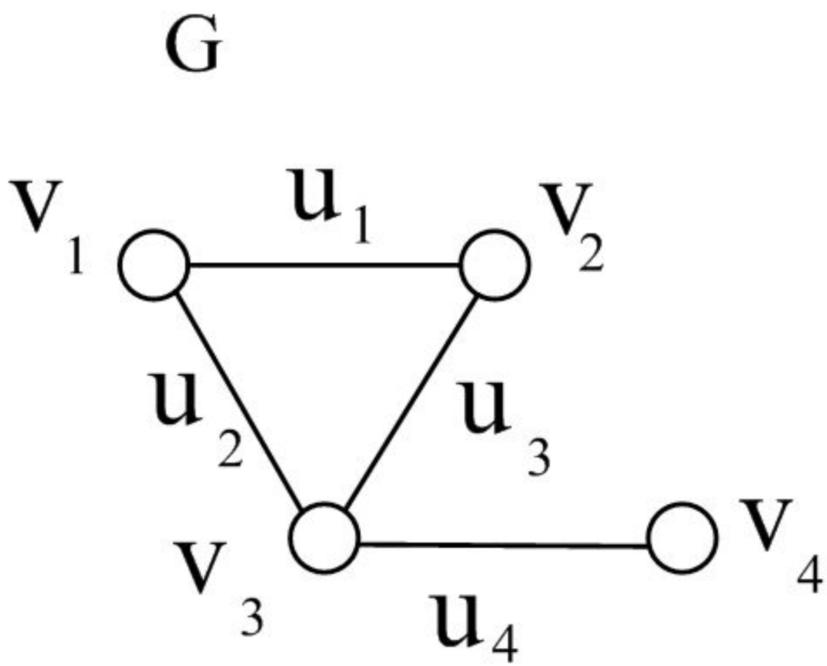
$K_{3,3}$

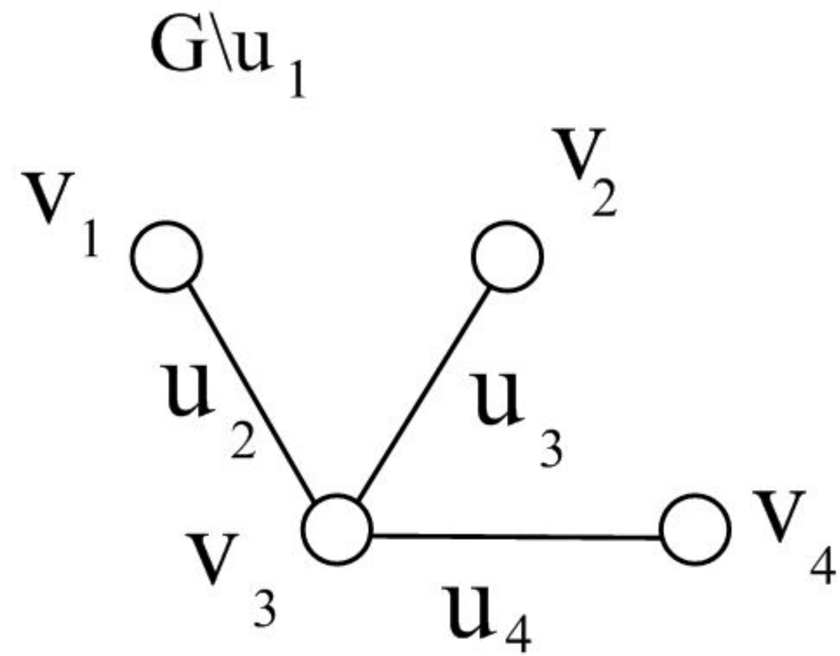


Операции над графами

Удаление ребра

$G=\langle V, U\rangle$, $G\backslash u=\langle V, U\backslash\{u\}\rangle$

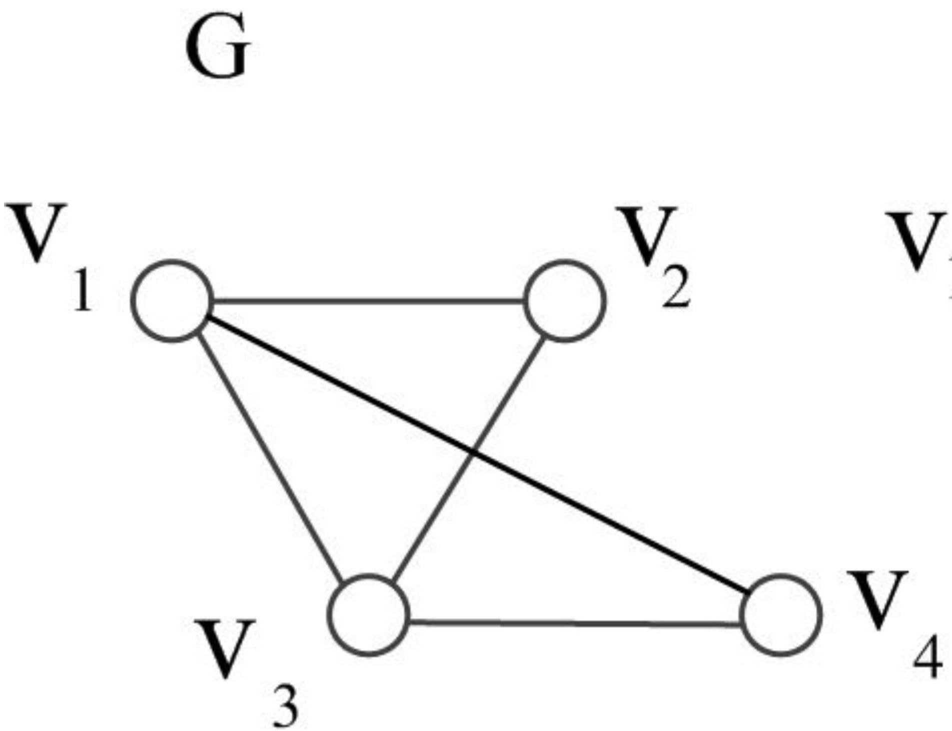


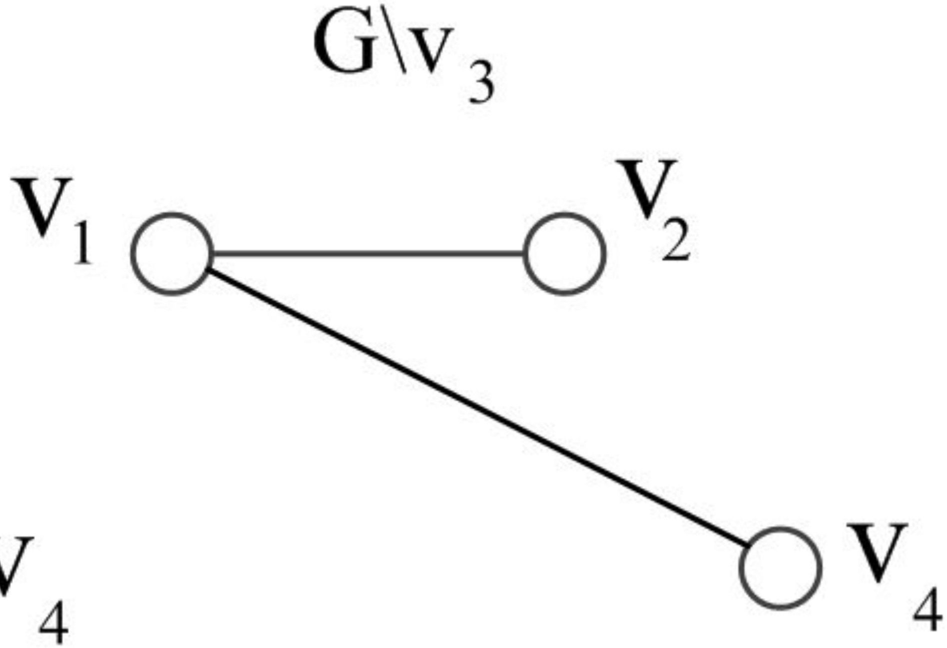


Удаление вершины

$G=\langle V, U\rangle$, $G\backslash v=\langle V', U'\rangle$

$V'=V\backslash\{v\}$, $U'=U\cap(V'\times V')$



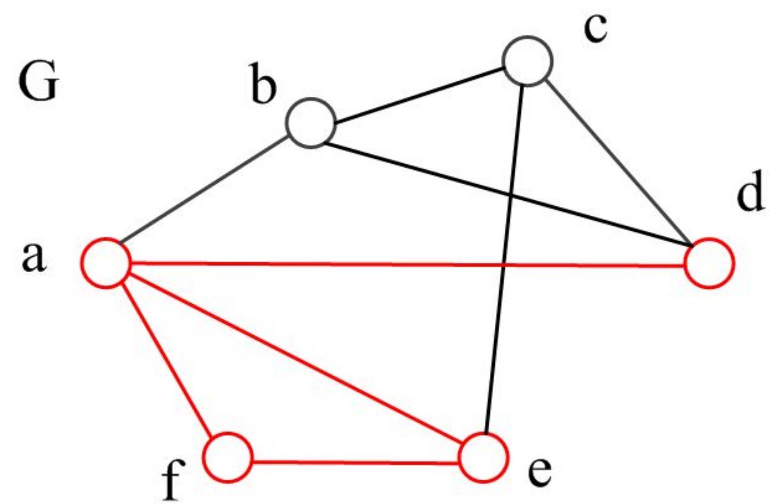


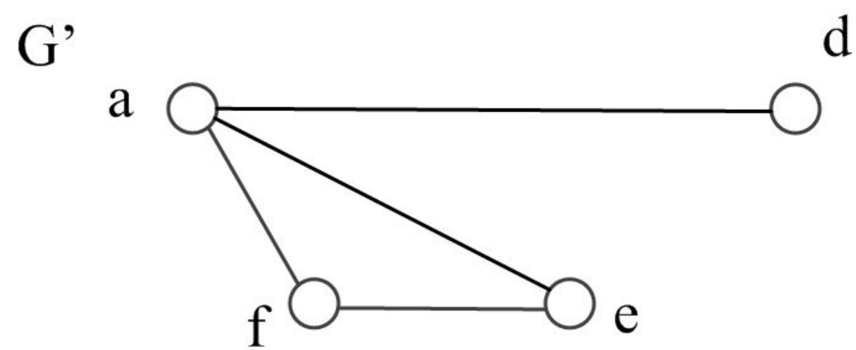
Подграфы

G’=<V’, U’> - **подграф** графа G=<V, U>, если

$V' \subseteq V,\ U' = U \cap (V' \times V')$

(*порождённый подграф*)



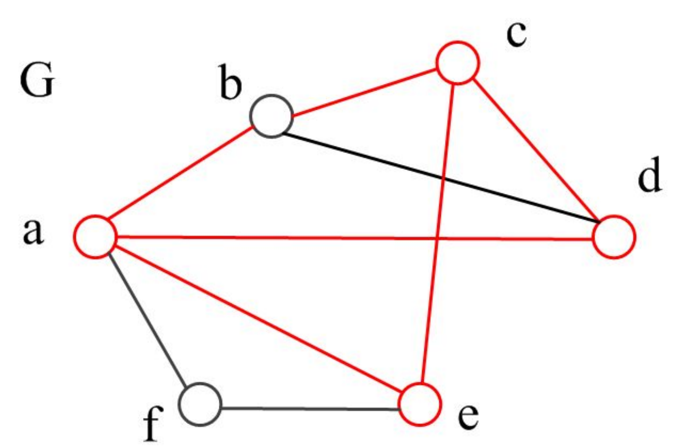


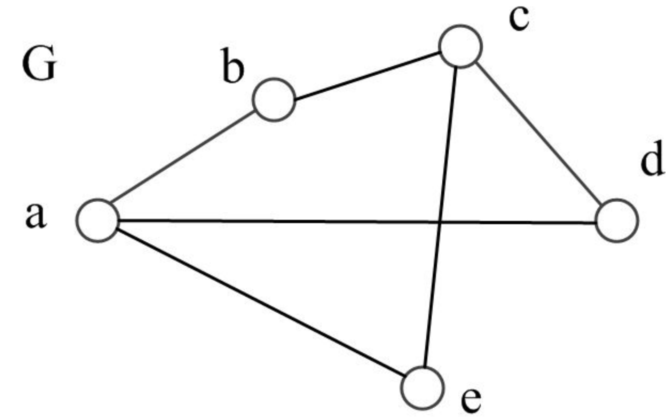
Подграфы

$G'=<V', U'>$ - частичный подграф графа $G=<V, U>$, если

$V' \subseteq V$, $U' \subseteq U \cap (V' \times V')$

(*частичный граф, подграф*)

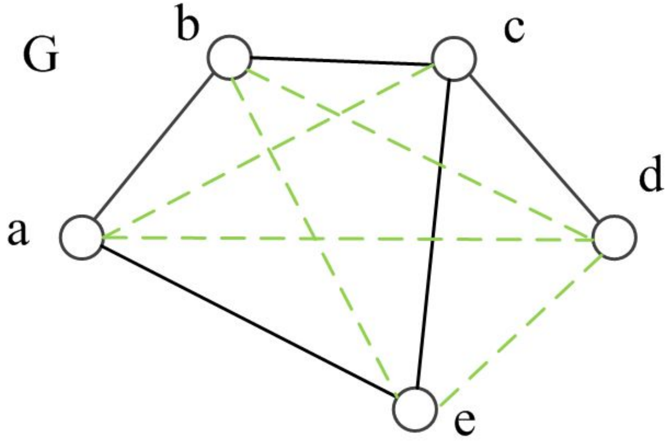


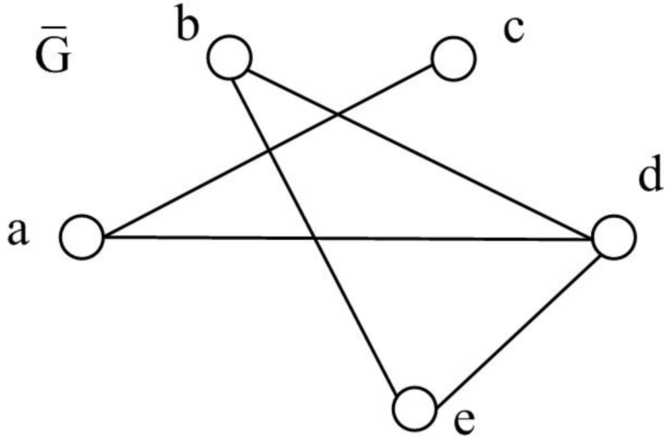


Дополнение графа

- $\bar{G}$=<V, U’> - дополнение графа G=<V,U>, если

U’=((V×V)\U)\I





Самодополнительные графы

Граф, изоморфный своему дополнению - самодополнительный