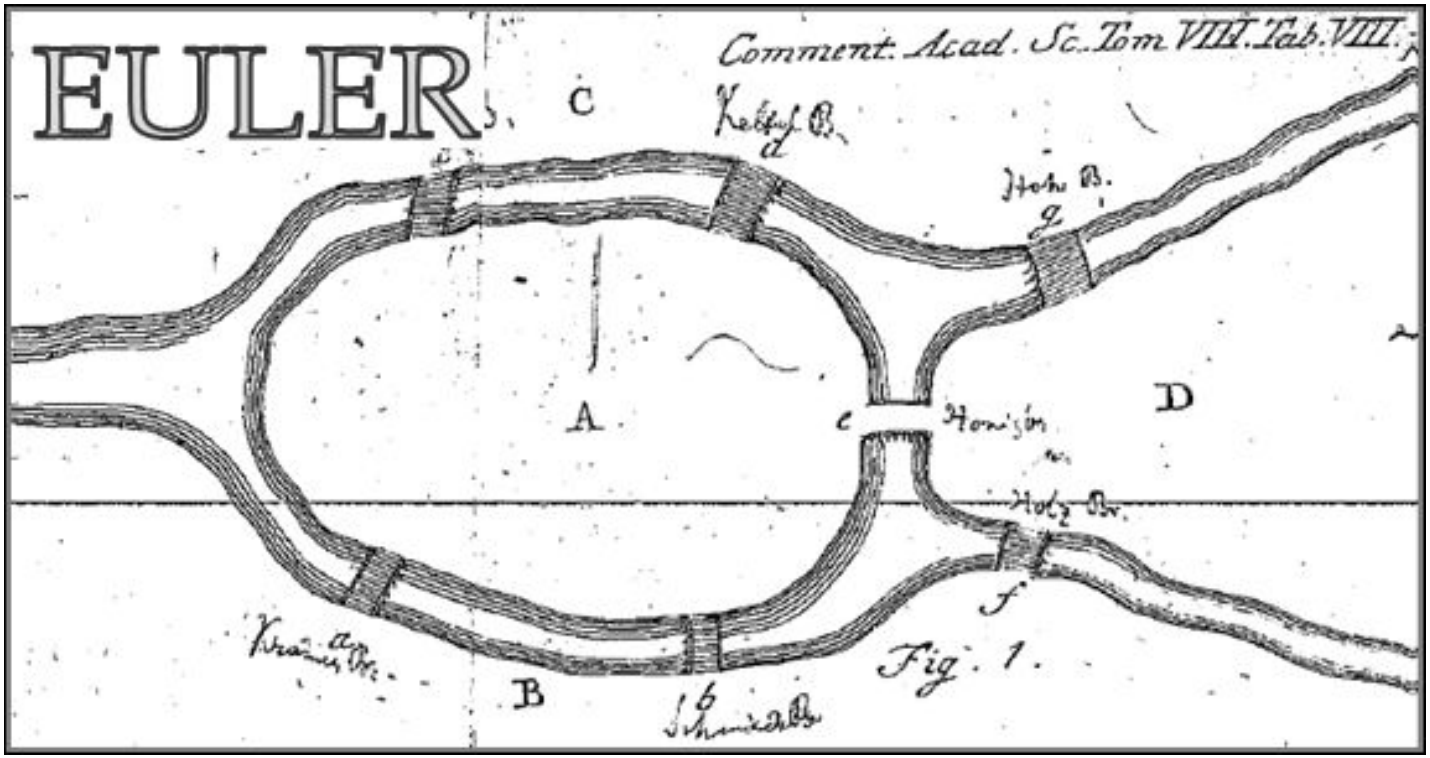
Теория графов

Лекция 1

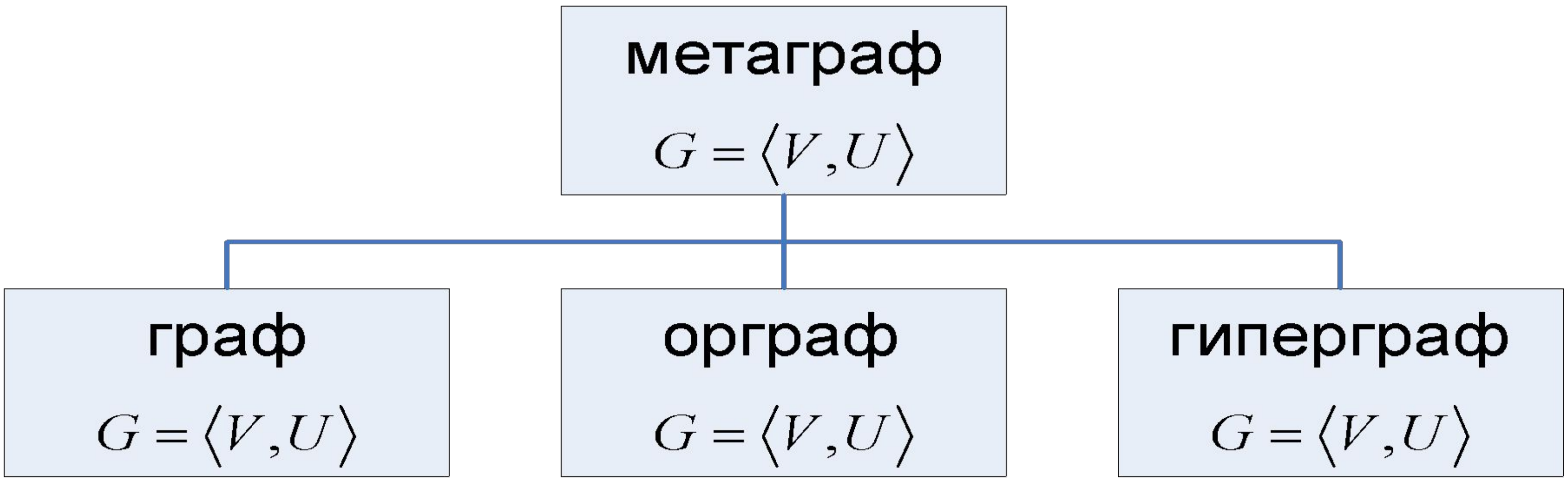
Литература

1. В.А. Горбатов Дискретная математика М.: АСТ; Астрель, 2003
2. Харари Ф. Теория графов, 2003г
3. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход. 1978
4. Кузнецов О.П., Дискретная математика для инженера, 2009.
5. Тихомирова А.Н. Теория графов, МИФИ,

Задача о Кёнигсбергских мостах Леонард Эйлер(1707-1783)



Основные объекты графов



- носитель метаграфа (конечное множество вершин). $V=\{v_1, v_2, \dots v_p\}$
- сигнатура метаграфа (конечное множество связей между вершинами). $U=\{u_1, u_2, \dots u_q\}$

Понятие графа и орграфа

Граф $G=\langle V,U \rangle$, где

$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $n \geq 1$ –

множество вершин (носитель),

$U \subseteq V \times V$ (сигнатура).

Неориентированный граф (граф)

$G = \langle V, U \rangle$,

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, n \geq 1$,

$U \subseteq V \times V$

$(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$

(v_i, v_j) – ребро графа

(v_i, v_i) - петля

Ориентированный граф (орграф)

$G=\langle V,U\rangle$,

$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\},n\geq 1$

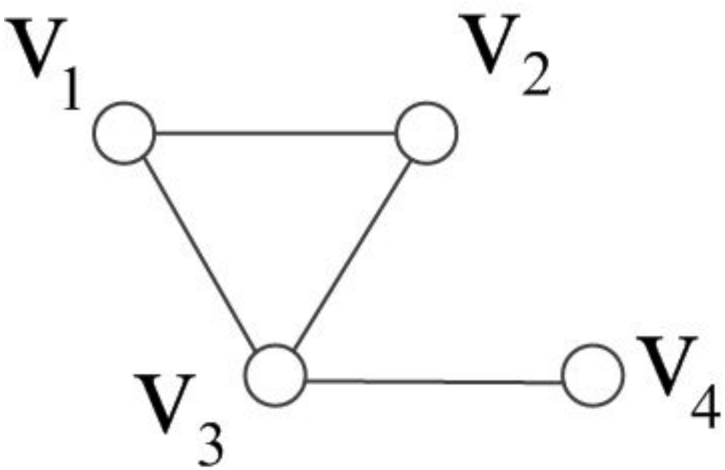
$U\subseteq V\times V$

$(v_i,v_j) \neq (v_j, v_i)$

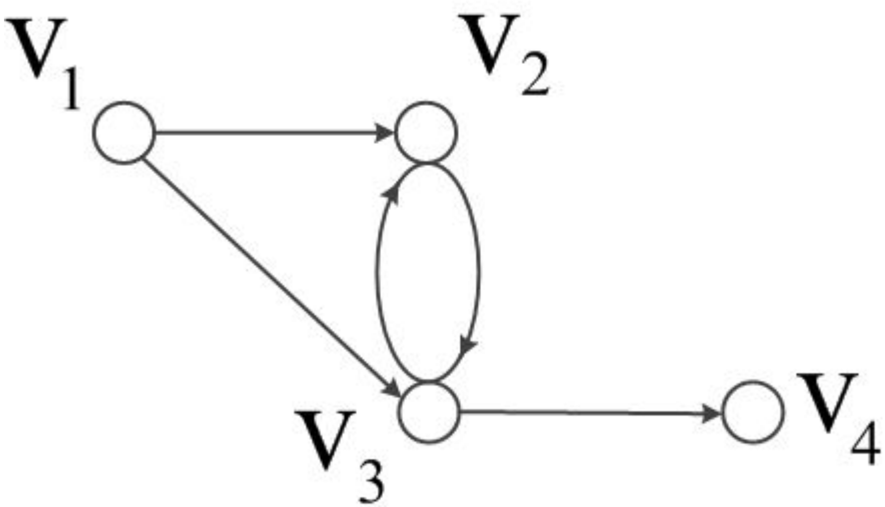
(v_i,v_j) - дуга

Геометрический граф

Граф



Орграф



Обозначение

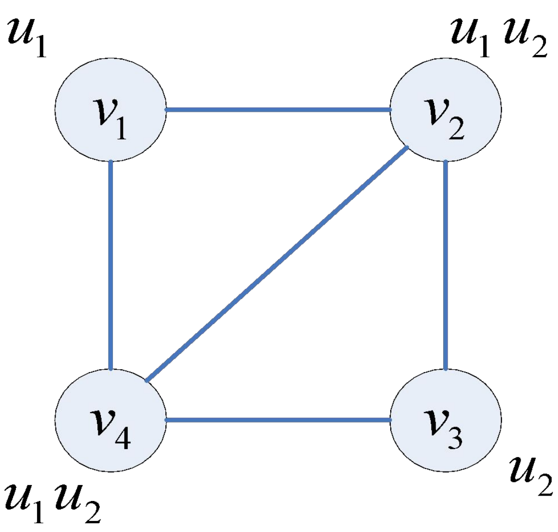
$$G_{p,q} \quad |V| = p, \ |U| = q$$

$G_{1,0}$ - тривиальный граф

типы метаграфов
ГИПЕРГРАФ (модельный граф)

Сигнатура (U) - множество граней, каждая из которых связывает некоторое подмножество вершин. **Грань** – подмножество вершин гиперграфа

$$u \in U \rightarrow u \subseteq V$$



$$G = \langle V, U \rangle$$

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$U = \{u_1, u_2\}$$

$$u_1 = \{v_1, v_2, v_4\}$$

$$u_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$$

взвешенные метаграфы

взвешенные метаграфы

вершинно-взвешенные метаграфы	реберно-взвешенные метаграфы	вершинно-реберные взвешенные метаграфы
$G = \langle (V, f), U \rangle$	$G = \langle V, (U, g) \rangle$	$G = \langle (V, f), (U, g) \rangle$

f: V→N - весовая функция для носителя (вершин)

g: U →K - весовая функция для сигнатуры (ребер или дуг)

N, K – некоторые множества (весовые характеристики)

Локальная структура графа

$(v_i,v_j)\in U$ – v_i и v_j – смежны

$u_k = (v_i,v_j)$ – u_k инцидентно v_i,

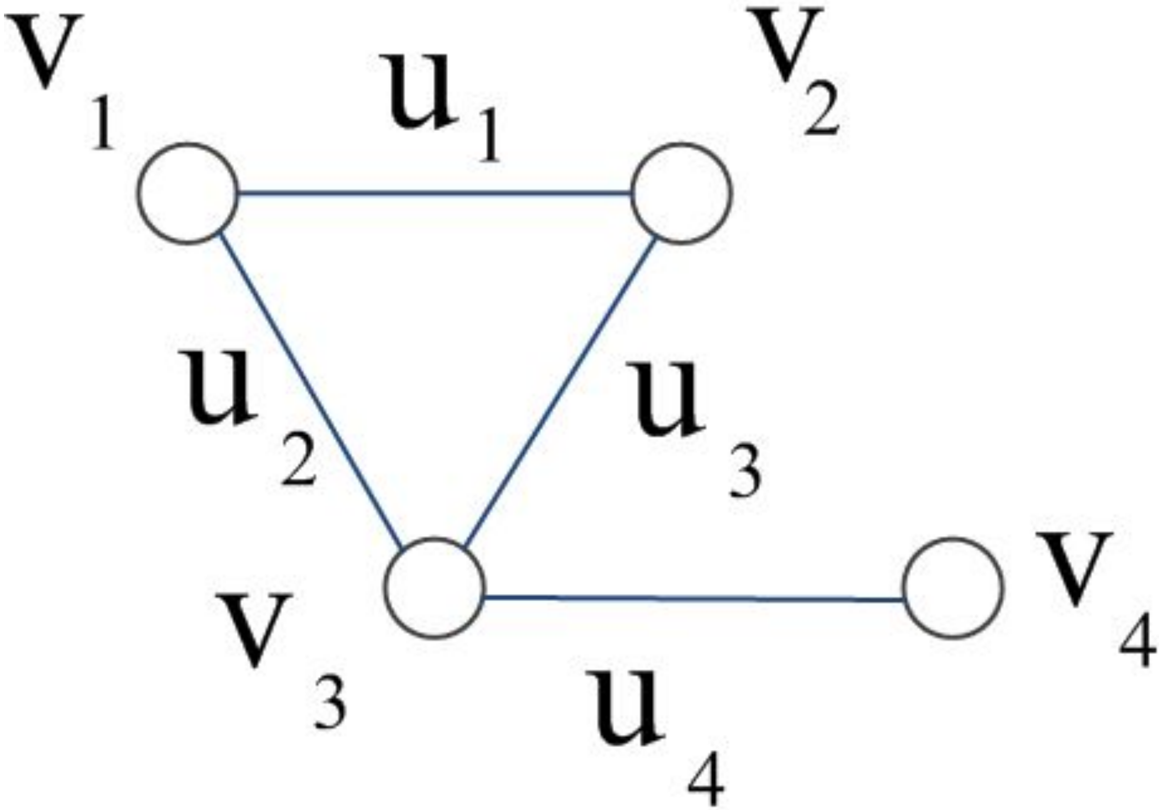
u_k инцидентно v_j, v_i инцидентно u_k

v_j инцидентно u_k

$u_k = (v_i,v_j)$, $u_n = (v_i,v_m)$ –

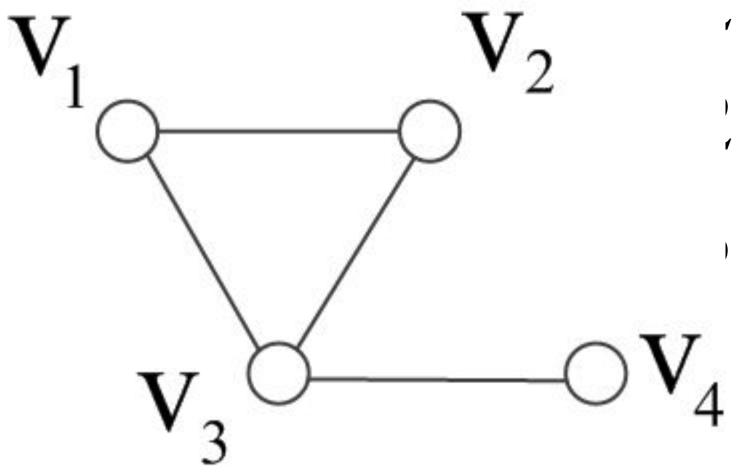
u_k и u_n – смежны

Пример



Степень вершины

Степень вершины ($d(v_i)$) – число рёбер, инцидентных вершине



Теорема

В любом конечном графе число вершин нечётной степени чётно.

Свойства степеней графа

$G_{p,q}$

$$\sum_{i=1}^{p} d(v_i) = 2q$$

Степень графа

Степень графа (максимальная степень вершины)

$$\Delta(G) = \max_{vi \in V}\{d(v_i)\}$$

Минимальная степень вершины графа

$$\delta(G) = \min_{vi \in V}\{d(v_i)\}$$

Локальная структура ориентированного графа

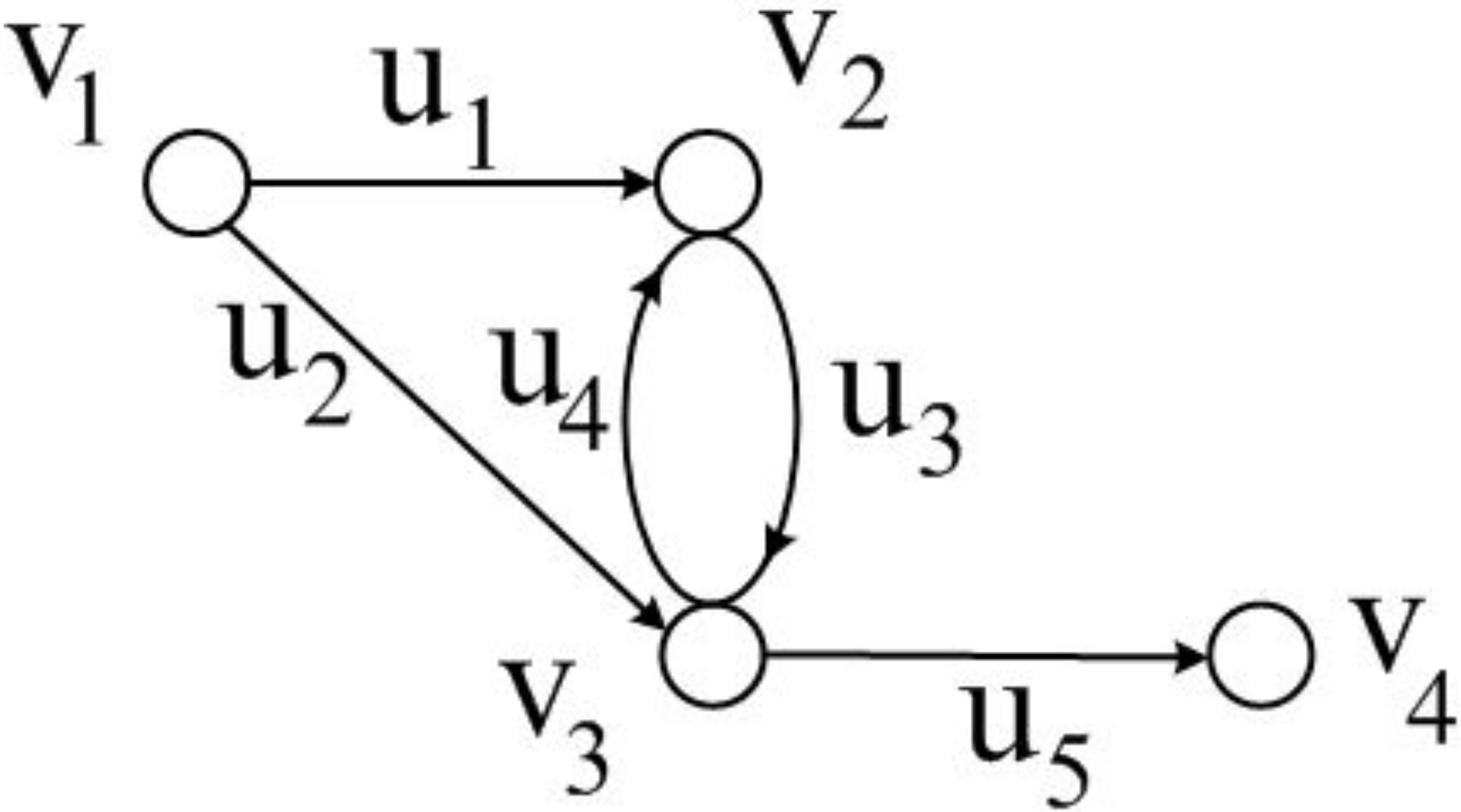
$\mathbf{u_k = (v_i, v_j)}$ – дуга $\mathbf{u_k}$ положительно инцидентна $\mathbf{v_i}$,

дуга $\mathbf{u_k}$ отрицательно инцидентна $\mathbf{v_j}$,

$\mathbf{u_k = (v_i, v_j), u_n = (v_i, v_m)}$ –

$\mathbf{u_k}$ и $\mathbf{u_n}$ – смежны

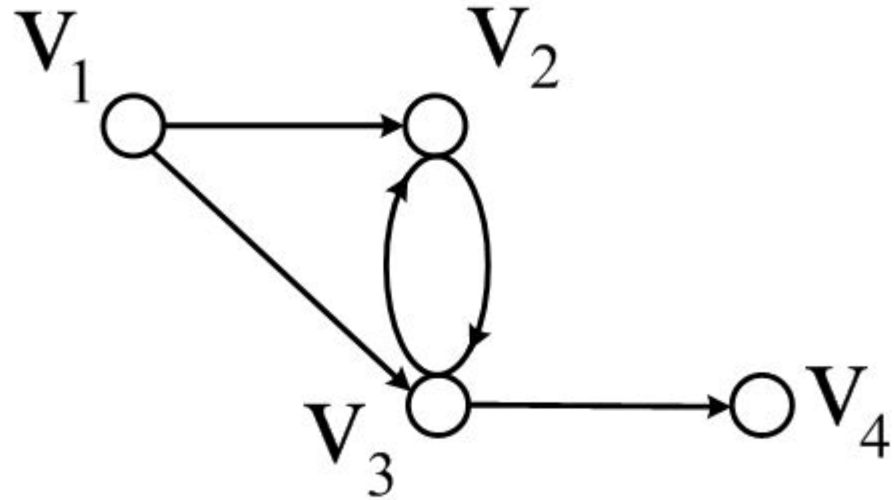
Пример



Степени вершин в орграфе

$d^+(v_i)$ – число положительно инцидентных дуг вершины v_i.

$d^-(v_i)$ – число отрицательно инцидентных дуг вершины v_i.



$d^+(v_1) = 2$, $d^-(v_1) = 0$;

$d^+(v_2) = 1$, $d^-(v_2) = 2$.

Свойства степеней орграфа

Для любого ориентированного графа

$$\sum_{v_i \in V} d^{+}(v_i) = \sum_{v_i \in V} d^{-}(v_i)$$

Свойства степеней орграфа

Для любого ориентированного графа

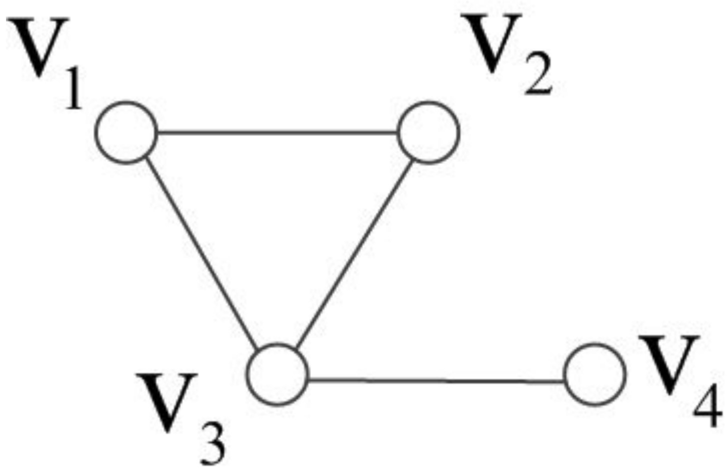
$$\sum_{v_i \in V} \left(d^{+}(v_i) + d^{-}(v_i)\right) = 2q$$

Матричное представление графа

Матрица смежности A:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, (v_i, v_j) \in U \\ 0, (v_i, v_j) \notin U \end{cases}$$

Пример



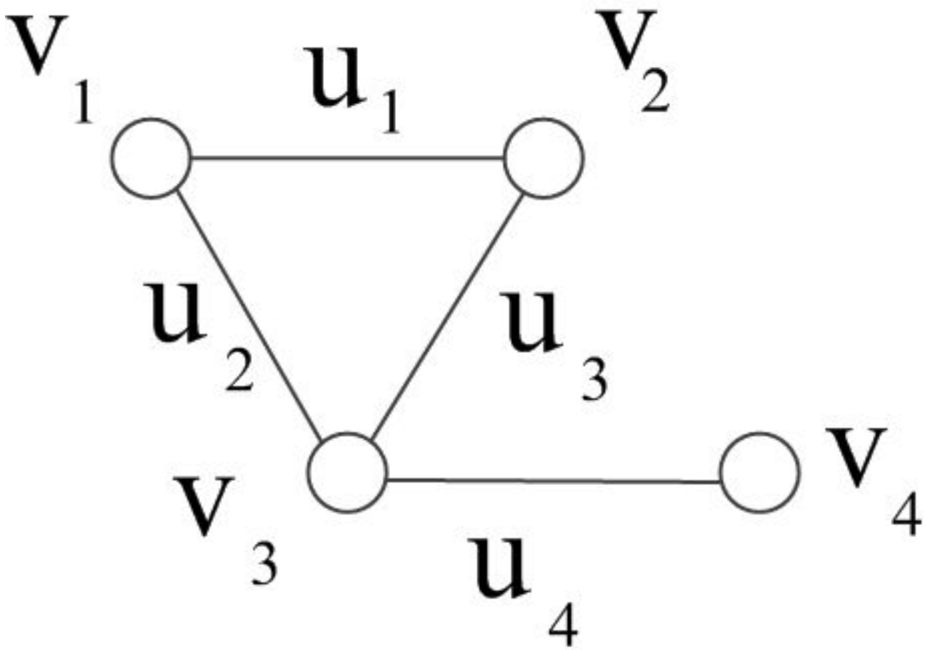
A=

0	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**0**

Матрица инцидентности B

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, v_i \text{ инцидентно } u_j \\ 0, v_i \text{ не инцидентно } u_j \end{cases}$$

Пример



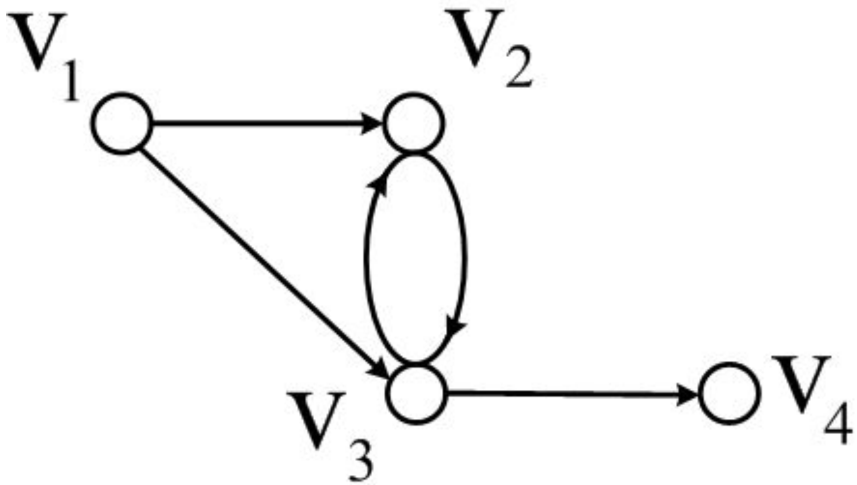
$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Матрица смежности орграфа

A:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, (v_i, v_j) \in U \\ 0, (v_i, v_j) \notin U \end{cases}$$

Пример



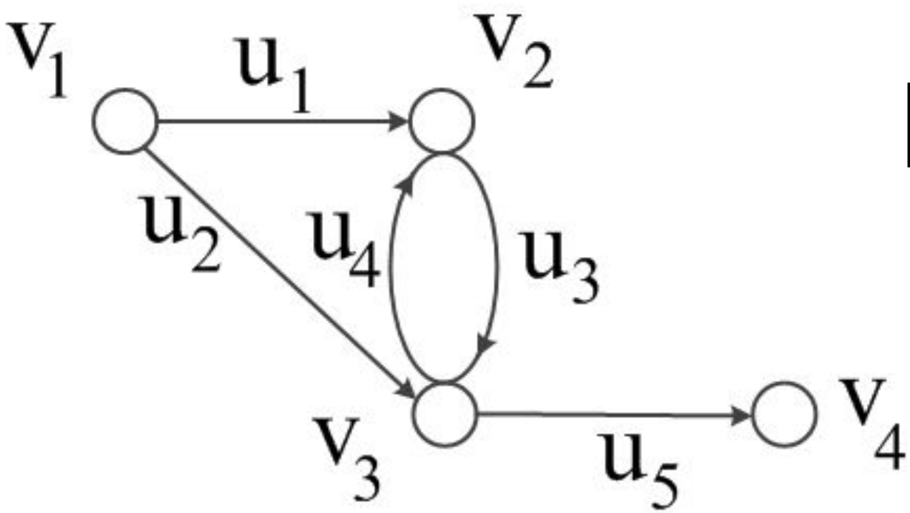
A=

0	1	1	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	0	0	0

Матрица инцидентности B

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, u_j = (v_i, v_k) \\ -1, u_j = (v_k, v_i) \\ 0, v_i \text{ не инцидентно } u_j \end{cases}$$

Пример



$$B=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Функциональный способ задания графов

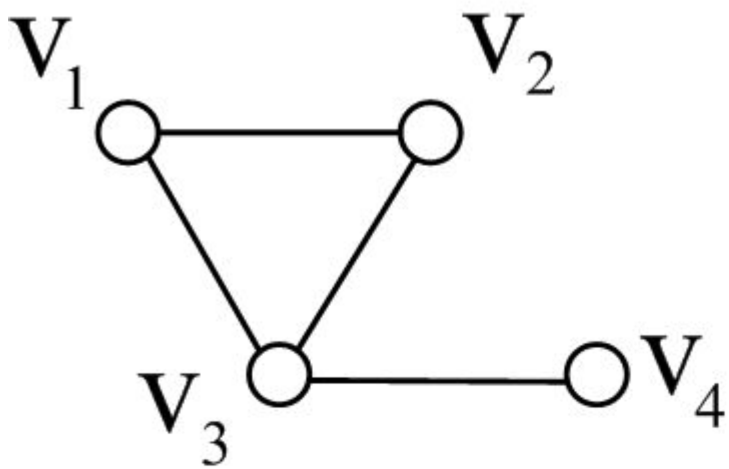
$\boldsymbol{G=<V,\Gamma>}$

Г- функция окрестности вершин

$\boldsymbol{\Gamma:} V\rightarrow P(V)$

$\boldsymbol{\Gamma}(v)=\{v_i \mid v_i \text{ смежна с } v\}$

Пример



$$\Gamma(v_1)=\{v_2, v_3\}$$

$$\Gamma(v_2)=\{v_1, v_3\}$$

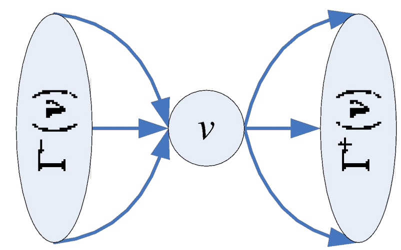
$$\Gamma(v_3)=\{v_1, v_2, v_4\}$$

$$\Gamma(v_4)=\{v_3\}$$

Функциональный способ задания орграфов

$$G=\langle V,\Gamma^{+}\rangle \quad G=\langle V,\Gamma^{-}\rangle$$

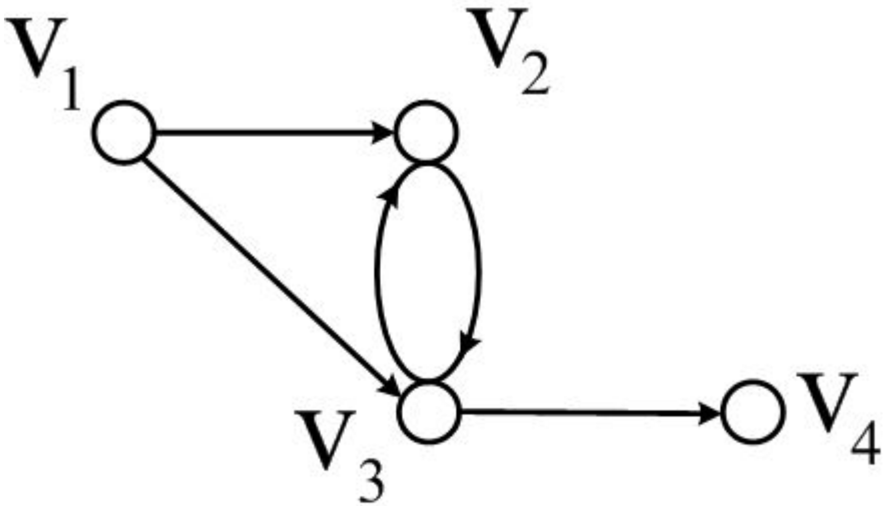
Γ^{+}, Γ^{-} - функции положительной и отрицательной полуокрестности вершины, соответственно



$$\Gamma^{+} : V \rightarrow P(V) \qquad \Gamma^{-} : V \rightarrow P(V)$$

$$\Gamma^{+}(v)=\{v_i \mid (v,v_i) \in U\} \qquad \Gamma^{-}(v)=\{v_i \mid (v_i,v) \in U\}$$

Пример



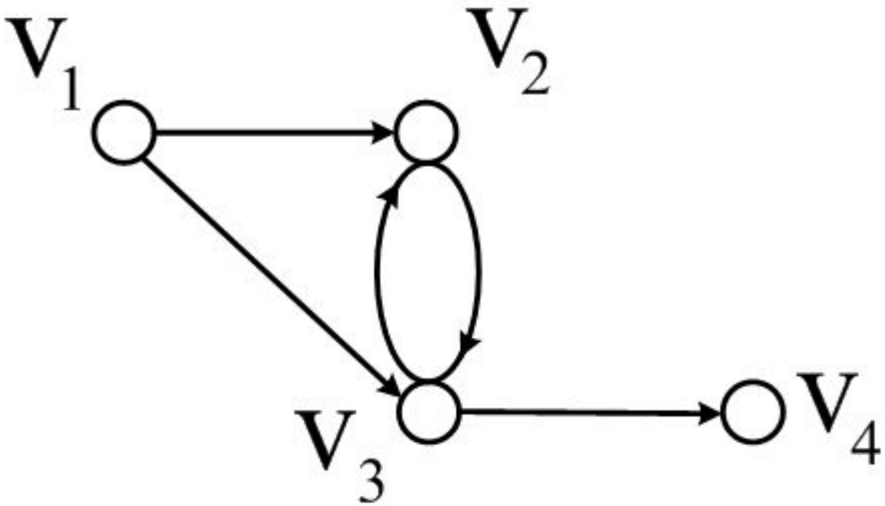
$\Gamma(v_1)^+ = \{v_2, v_3\}$

$\Gamma(v_2)^+ = \{v_3\}$

$\Gamma(v_3)^+ = \{v_2, v_4\}$

$\Gamma(v_4)^+ = \varnothing$

Пример



$\Gamma(v_1)^- = \varnothing$

$\Gamma(v_2)^- = \{v_1, v_3\}$

$\Gamma(v_3)^- = \{v_1, v_2\}$

$\Gamma(v_4)^- = \{v_3\}$

Изоморфизм графов

Графы изоморфны, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами вершин, сохраняющее отношение смежности

Функциональное задание изоморфизма графов

Два графа $G_a = \langle V_a, U_a \rangle$ и $G_b = \langle V_b, U_b \rangle$ **изоморфны**, если существует взаимно однозначная функция

h: $V_a \rightarrow V_b$ такая, что:

1) если $(v_{a1}, v_{a2}) \in U_a$, то $(h(v_{a1}), h(v_{a2})) \in U_b$;

2) если $(v_{b1}, v_{b2}) \in U_b$, то $(h^{-1}(v$ $), h^{-}(v$ $)) \in U$

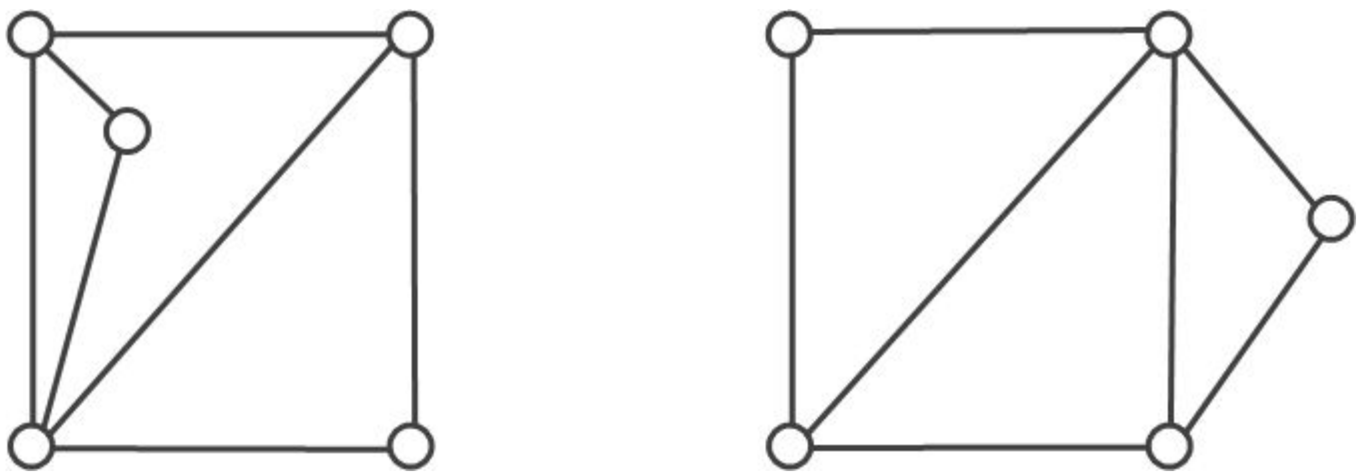
Свойства изоморфизма

Отношение

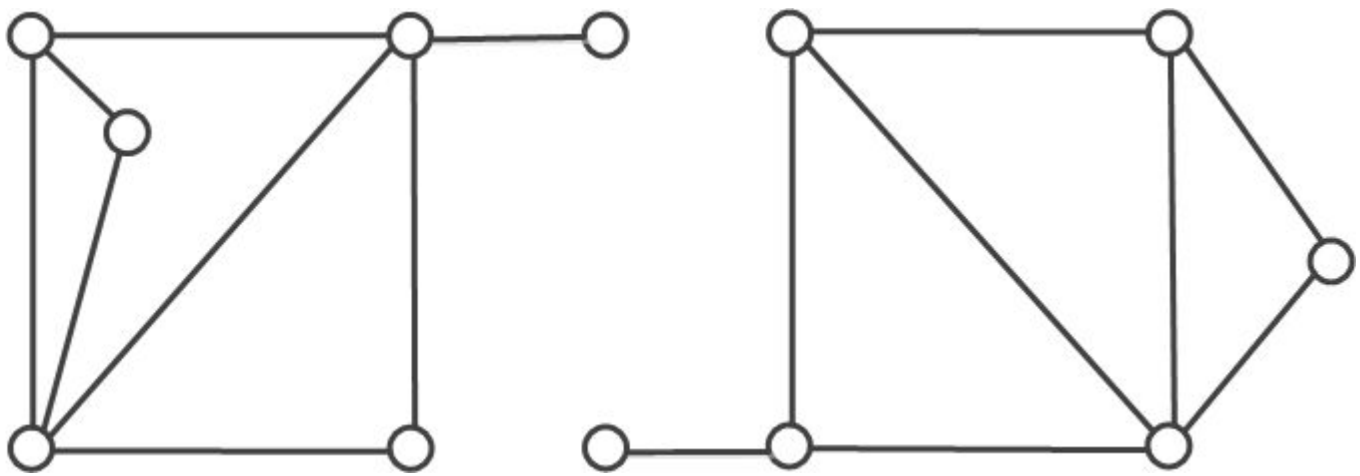
- рефлексивно
- симметрично
- транзитивно

Эквивалентность

Пример изоморфных графов



Пример не изоморфных графов



Инварианты графа

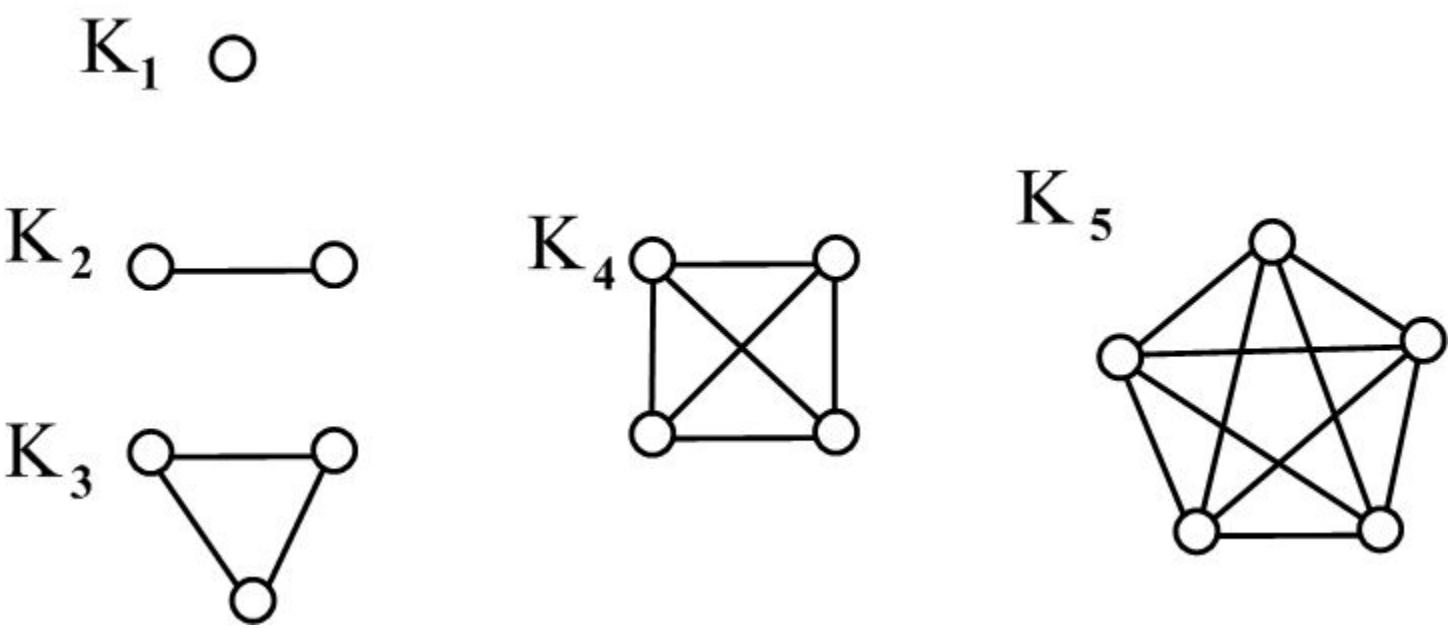
Количественная или качественная характеристики, неизменные для всех изоморфных между собой графов (орграфов) называется **ИНВАРИАНТОМ**

Поиск полной системы инвариантов графа, задающей граф с точность до изоморфизма – основная задача теории графов (***полная система инвариантов ещё не найдена***)

Полный граф K_n

Граф полный, если каждая вершина смежна с каждой.

Полный граф с n вершинами - K_n



Двудольный граф

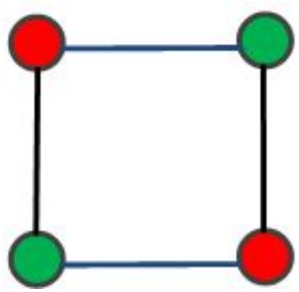
Граф двудольный, если множество вершин графа можно разбить на два непересекающихся подмножества, в каждом из которых никакая пара вершин не смежна.

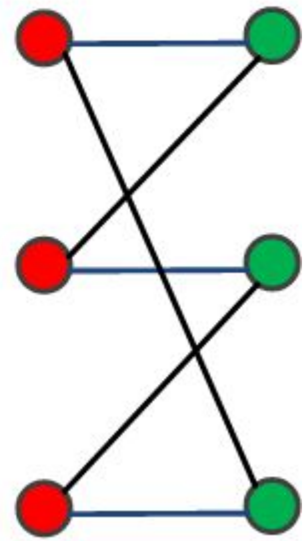
$$G=\langle V, U\rangle,\ V=V_1 \cup V_2,$$

$$V_1 \cap V_2 = \varnothing,\ U \subseteq V_1 \times V_2$$

Двудольные графы. Примеры

K_2





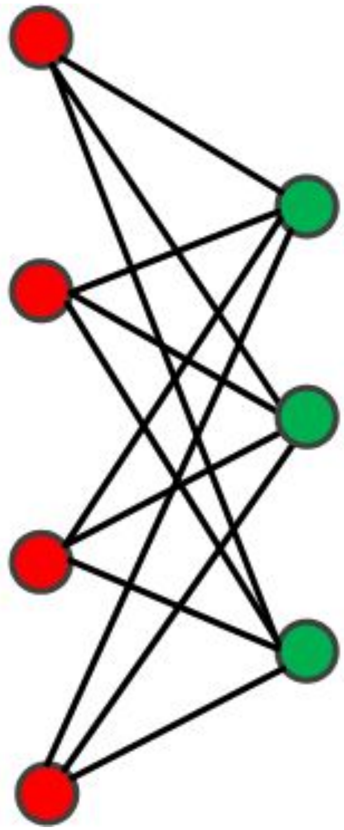
Полный двудольный граф $K_{m,n}$

$K_{m,n}$ - граф двудольный и каждая вершина из множества V_1 смежна с каждой вершиной из V_2, $|V_1|=m$, $|V_2|=n$.

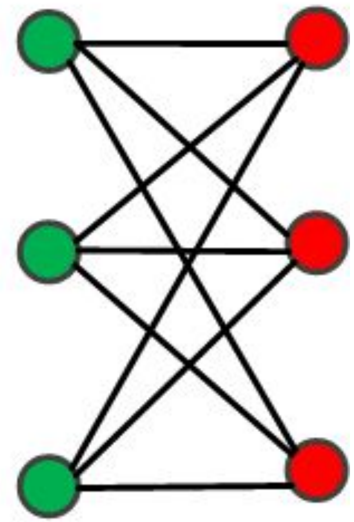
$G=<V, U>$, $V=V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2=\varnothing$, $U=V_1 \times V_2$

Полные двудольные графы $K_{m,n}$

$K_{4,3}$



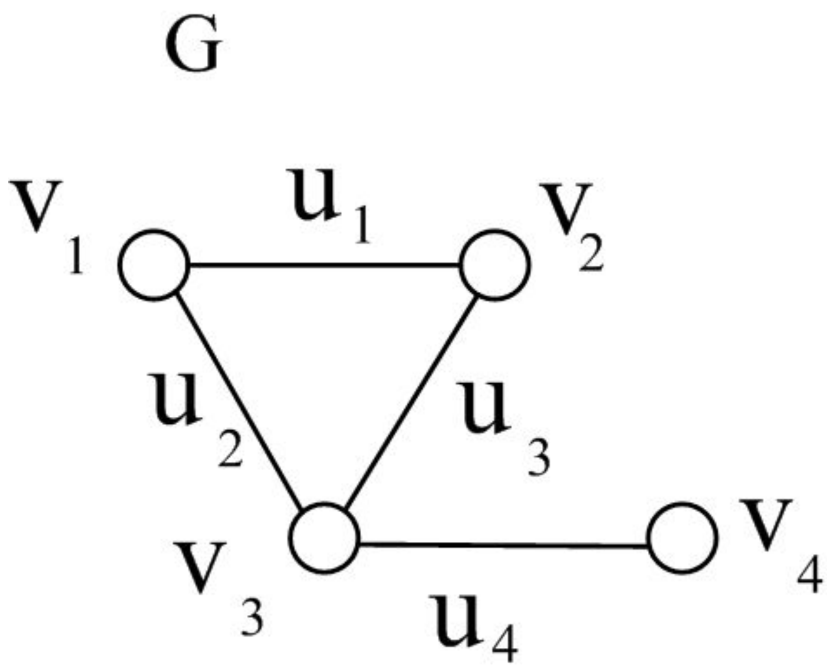
$K_{3,3}$

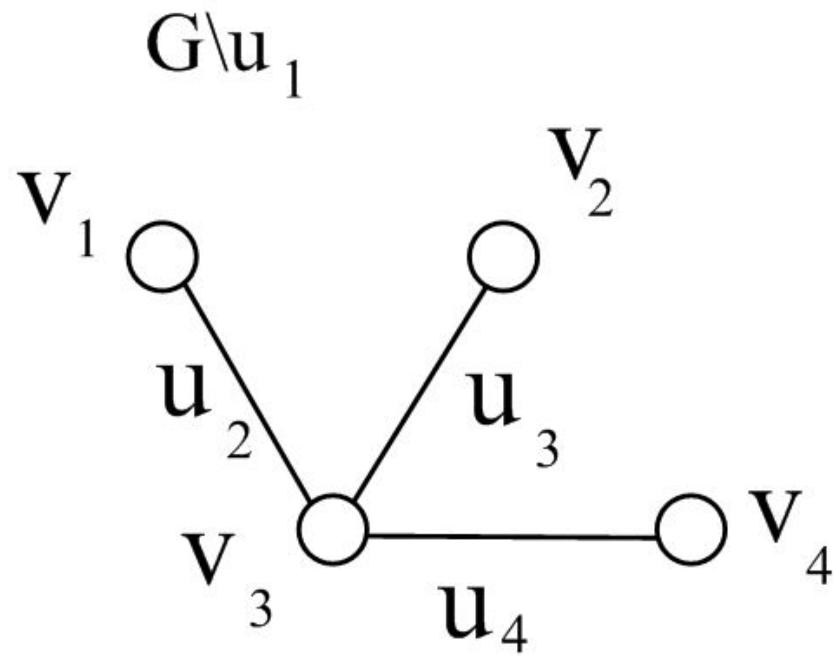


Операции над графами

Удаление ребра

$G=\langle V, U\rangle$, $G\setminus u=\langle V, U\setminus\{u\}\rangle$



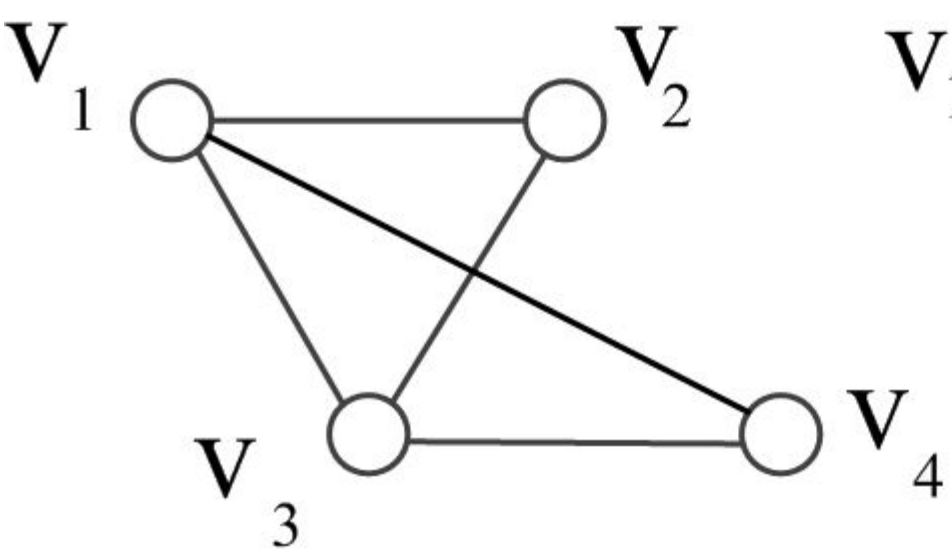


Удаление вершины

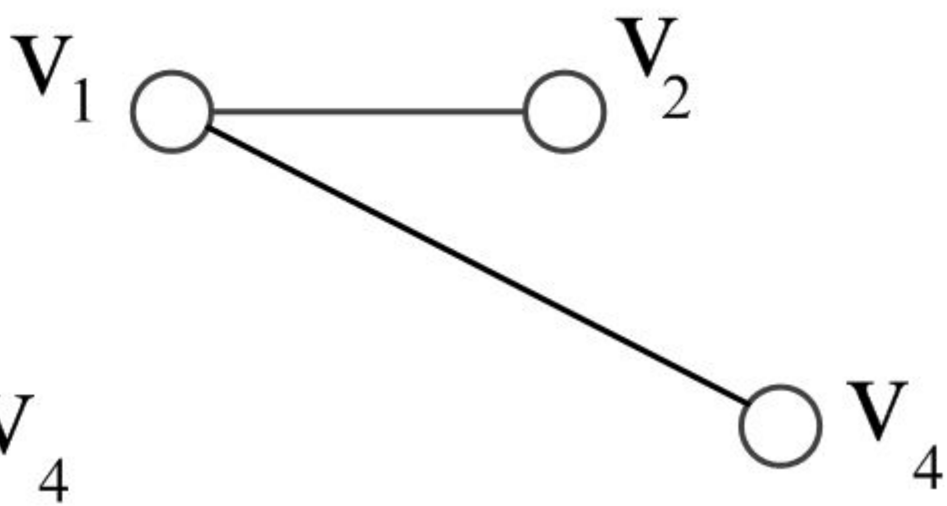
$G=\langle V, U\rangle$, $G\backslash v=\langle V', U'\rangle$

$V'=V\backslash\{v\}$, $U'=U\cap(V'\times V')$

G

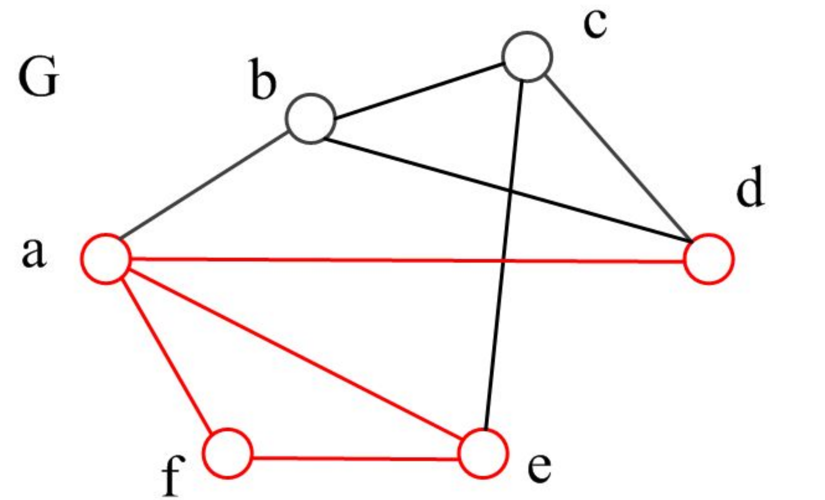


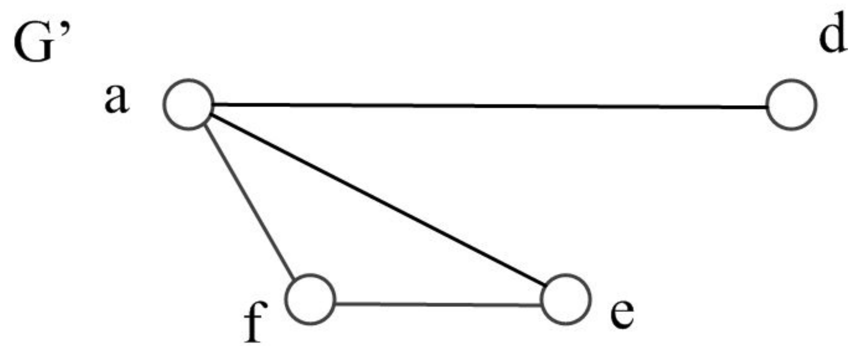
$G\backslash v_3$



Подграфы

$G'=\langle V', U'\rangle$ - **подграф** графа $G=\langle V, U\rangle$, если $V'\subseteq V$, $U'=U\cap(V'\times V')$ (*порождённый подграф*)



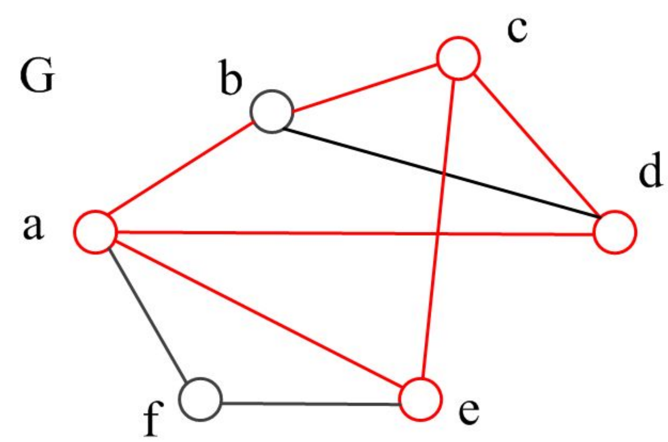


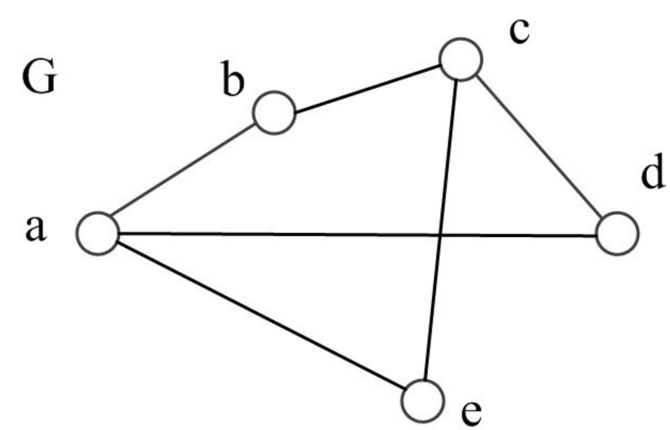
Подграфы

$G' = \langle V', U' \rangle$ - частичный подграф графа $G = \langle V, U \rangle$, если

$V' \subseteq V$, $U' \subseteq U \cap (V' \times V')$

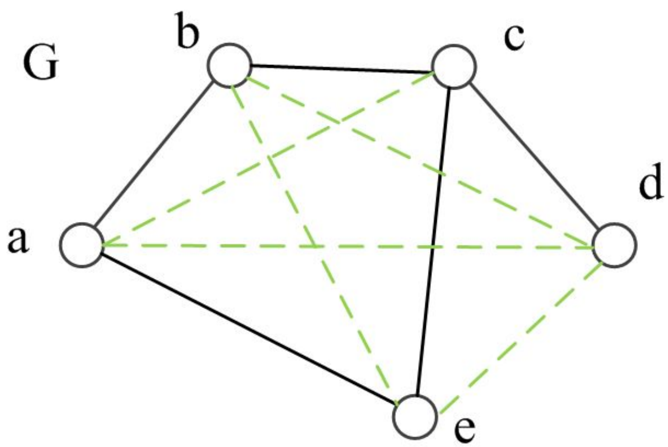
(*частичный граф, подграф*)

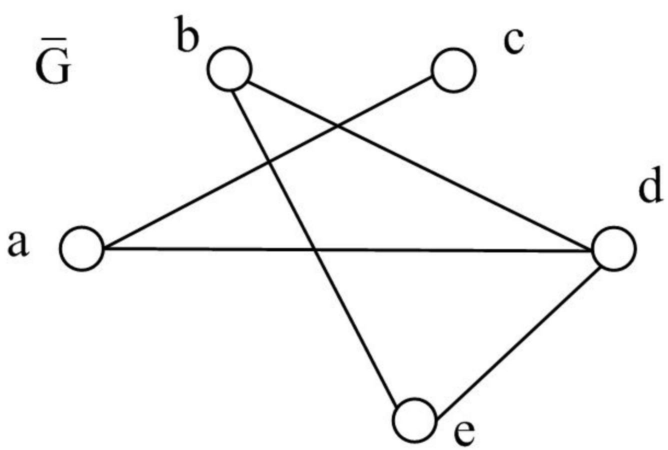




Дополнение графа

- $\bar{G}$=<V, U’> - дополнение графа G=<V,U>, если U’=((V×V)\U)\I





Самодополнительные графы

Граф, изоморфный своему дополнению - самодополнительный