ТЕОРИЯ ИГР

Литература

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. – М., 1998.

2. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, 1985.

3. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр.– М.: Наука, 1981.

1. Основные понятия теории матричных игр

- **Теория игр** – это совокупность математических методов анализа и оценки конфликтных ситуаций.

- **Содержание теории игр**:
- установление принципов оптимального поведения в условиях неопределенности (конфликта),
- доказательство существования решений, удовлетворяющих этим принципам,
- указание алгоритмов нахождения решений, их реализация.

- Моделями теории игр можно описать экономические, правовые, классовые, военные конфликты, взаимодействие человека с природой.

- Все такие модели в теории игр принято называть **играми**.

- Игры можно классифицировать по различным признакам:
- стратегические и чисто случайные,
- бескоалиционные и коалиционные, игры 1, 2, …, *n* лиц (по числу игроков),
- конечные и бесконечные (по числу стратегий), игры в нормальной форме и динамические,
- с нулевой суммой («антагонистические») и с ненулевой суммой.

- Рассмотрим простейшую модель – игру, в которой участвуют два игрока, множество стратегий каждого игрока конечно, а выигрыш одного игрока равен проигрышу другого (бескоалиционная, конечная, антагонистическая игра двух лиц).

- Такую игру (Γ) называют матричной.
- Она определяется тройкой $\Gamma=(X,Y,K)$,

  где

X – множество стратегий 1-го игрока,

Y – множество стратегий 2-го игрока,

$K=K(x,y)$ – функция выигрыша (выигрыш 1-го игрока и соответственно проигрыш 2-го при условии, что 1-й игрок выбрал стратегию , а 2-й – стратегию).

Пару (x,y) называют ситуацией в игре Γ.

- Пусть 1-й игрок имеет всего *m* стратегий, а 2-й – *n* стратегий:

$$X=M=\{1,2,\ \dots,\ m\},\quad Y=N=\{1,2,\ \dots,\ n\}.$$

- Тогда игра *Г* полностью определяется заданием матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$,

где $a_{ij}=K(i,j)$ – выигрыш 1-го игрока при условии, что он выбрал стратегию (т.е. строку) *i*, а 2-й игрок – стратегию (т.е. столбец) *j* (эти стратегии называют **чистыми**).

- Матрица *A* называется матрицей игры или платежной матрицей.

- Пусть $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ – платежная матрица игры Γ.

Если 1-й игрок выбрал стратегию i, то в худшем случае он выиграет $\min\limits_{j} a_{ij}$.

Поэтому он всегда может гарантировать себе выигрыш $\max\limits_{i}\min\limits_{j} a_{ij}$, обозначим его $\underline{v}$ – нижняя цена игры, или максимин,

соответствующая стратегия 1-го игрока называется максиминной.

- Второй игрок, выбрав стратегию j, в худшем случае проиграет $\max_i a_{ij}$, а значит, может гарантировать себе проигрыш $\min_j \max_i a_{ij}$,

обозначим его $\overline{v}$ – верхняя цена игры, или минимакс, соответствующая стратегия 2-го игрока называется минимаксной.

Схема:

$$
\begin{array}{c}
A=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\left.\begin{array}{l}
\min\limits_j a_{1j}\\
\min\limits_j a_{2j}\\
\quad\vdots\\
\min\limits_j a_{mj}
\end{array}\right\}\Rightarrow \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=\underline{v}\\
\underbrace{\max\limits_i a_{i1}\quad \max\limits_i a_{i2}\quad \cdots \quad \max\limits_i a_{in}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=\overline{v}}
\end{array}
$$

- Например,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{matrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{matrix} \quad \Rightarrow \underline{v}=-3$$

$$\begin{matrix} 4 & \quad 4 & \quad 6 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \bar{v}=4$$

- Соответствующие стратегии:

i_0=1(максиминная), j_0=1,2 (минимаксная).

- Справедливо неравенство:

$$\underline{v} \leq \overline{v}$$

- Ситуация (i^*, j^*) называется ситуацией равновесия, или седловой точкой, если для любых $i \in M$, $j \in N$, выполняется неравенство

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$$

- Соответствующие стратегии i^*, j^* называются оптимальными чистыми стратегиями 1-го и 2-го игроков, а число $v = a_{i^*j^*}$ называется ценой игры.

- Элемент $a_{i^*j^*}$ является одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце.

- Ситуация равновесия существует тогда и только тогда, когда $\underline{v} = v$ (это значение и является ценой игры v).

- Например,

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -5 \\ 4 \\ -5 \end{matrix} \quad \Rightarrow \bar{v} = \underline{v} = 4.$$

$$\begin{matrix} 5 & 5 & 4 & 20 \end{matrix}$$

- (2,3)-ситуация равновесная, v =4 – цена игры, i^*=2, j^*=3 – оптимальные стратегии 1-го и 2-го игроков. Выбрав их, 1-й игрок обеспечит себе выигрыш не менее 4 ед., а 2-й игрок проиграет не более 4 ед. при любом выборе другого игрока.

- Смешанной стратегией для 1-го игрока называется упорядоченная система m действительных чисел $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, которые можно рассматривать как относительные частоты (вероятности), с которыми 1-й игрок выбирает чистые стратегии $i=1, 2, \ldots, m$.
- Аналогично определяется смешанная стратегия для 2-го игрока: $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $y_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

- Функция выигрыша $K(x,y)$ в ситуации (x,y) определяется как математическое ожидание выигрыша 1-го игрока при условии, что 1-й и 2-й игроки выбрали соответственно стратегии $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \quad .$$

- Если для некоторых $x^* \in S_m$ и $y^* \in S_n$ и для всех $x \in S_m$ и $y \in S_n$ выполняется неравенство $K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y)$, то x*, y* называются **оптимальными смешанными стратегиями** игроков,

число $v = K(x^*, y^*)$ называется **ценой игры**, пара (x*, y*) – **стратегической седловой точкой**

тройка x*, y*, v – **решением игры**.

- Свойства оптимальных стратегий.

- 1. Пусть $K(x,y)$ – математическое ожидание выигрыша в игре Γ_A с ценой v.
- Тогда, для того чтобы элемент $x^* \in S_m$ был оптимальной стратегией 1-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента $y \in S_n$ выполнялось неравенство

$$v \le K(x^*, y)$$

- Аналогично, для того чтобы $y^* \in S_n$ был оптимальной стратегией 2-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого

$x \in S_m$ выполнялось неравенство

$$K(x, y^*) \le v$$

- 2. Пусть $K(x,y)$ – математическое ожидание выигрыша в игре Γ_A, v – действительное число, $x^* \in S_m$, $y^* \in S_n$. Тогда, для того чтобы v было ценой игры, а x^* и y^* были оптимальными стратегиями соответственно 1-го и 2-го игроков, необходимо и достаточно, чтобы для любых и $i \in M$ $j \in N$ выполнялось неравенство

$$K(i, y^*) \le v \le K(x^*, j)$$

- 3. Пусть $K(x,y)$ – математическое ожидание выигрыша в игре Γ_A с ценой v.

- Тогда, для того чтобы элемент $x^* \in S_m$ был оптимальной стратегией 1-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $j \in N$ выполнялось неравенство $v \le K(x^*, j)$.

- Аналогично, для того чтобы $y^* \in S_n$ был оптимальной стратегией 2-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i \in M$ выполнялось неравенство $K(i, y^*) \le v$.

- 4. Если x^*, y^* – решение $(m \times n)$-игры Γ_A, то

$$\max_i K(i, y^*) = \min_j K(x^*, j) = v$$

- 5. Пусть $x^* = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $y^* = (y_1, y_2, ..., y_n)$, v – решение игры Γ_A.
- Тогда для любого $i \in M$, при котором $K(i, y^*) < v$, выполняется неравенство x_i=0, а для любого $j \in N$, при котором $v < K(x^*, j)$, выполняется неравенство y_j=0.

- 6 (**Лемма о масштабе**).
- Если Γ_A – игра с матрицей $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, а $\Gamma_{A'}$ – игра с матрицей $A' = \left(a'_{ij}\right)_{m\times n}$, где $a'_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta$, где α,β=const, α>0, то множества оптимальных стратегий игроков в играх Γ_A и $\Gamma_{A'}$совпадают, а . $v_{A'} = \alpha v_A + \beta$

- Иначе говоря, две игры, отличающиеся лишь началом отсчета выигрышей и масштабом их измерения, стратегически эквивалентны.

2. (2×2) - игры

- Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – платежная матрица

игры Г.

Если она **не имеет седловой точки**, то **единственное** решение игры Г можно найти

- 1) решив две системы:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1; \end{cases}$$

- 2) по формулам:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

или $x_2 = 1 - x_1$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

или $y_2 = 1 - y_1$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

- 3) в матричном виде:

$$x = \frac{JA^*}{JA^*J^T} \qquad y^T = \frac{A^*J^T}{JA^*J^T} \qquad v = \frac{|A|}{JA^*J^T}$$

где $|A|$ – определитель матрицы A,

A^* – присоединенная к A матрица,

$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$,

J^T и y^T – транспонированные матрицы J и y.

- Найдем, например, решение игры с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, которая **не имеет седловой точки**.

- 1) Составим системы:

$$\begin{cases} 3y_1 - y_2 = v, \\ 2y_1 + 4y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = v, \\ -x_1 + 4x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

- Решив системы, получим:

$$y_1 = \frac{5}{6} \qquad y_2 = \frac{1}{6} \qquad x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{2}{3} \qquad v = \frac{7}{3}$$

- то есть $x^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ $\mathrm{y}^* = \left(\frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right)$ $v = \frac{7}{3}$ -решение игры.

- 2) Найдем решение по формулам:

$$x_1 = \frac{4-2}{3+4-2+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y_1 = \frac{4+1}{3+4-2+1} = \frac{5}{6} \qquad y_2 = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$v = \frac{3\cdot 4 + 2\cdot 1}{3+4-2+1} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

- 3) Найдем решение в матричном виде:

$$|A| = 12 + 2 = 14$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$JA^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$JA^*J^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

$$A^*J^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$y^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$v = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

- 3. $(2 \times n)$ и $(m \times 2)$ – игры

- Рассмотрим игру с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

- Если 1-й игрок применит смешанную стратегию $x^* = (x, 1-x)$, а 2-й игрок – чистую стратегию $j = 1$, то

$$K(x^*, 1) = 2x + 4(1-x) \quad .(1)$$

- Аналогично при выборе 2-м игроком чистых стратегий $j = 2$, $j = 3$, $j = 4$

$$K\left(x^{*},2\right) = 3x + 1\left(1 - x\right) \qquad (2)$$

$$K\left(x^{*},3\right) = 1x + 6\left(1 - x\right) \qquad (3)$$

$$K\left(x^{*},4\right) = 5x + 0\left(1 - x\right), \quad x \in \left[0;1\right] \qquad (4)$$

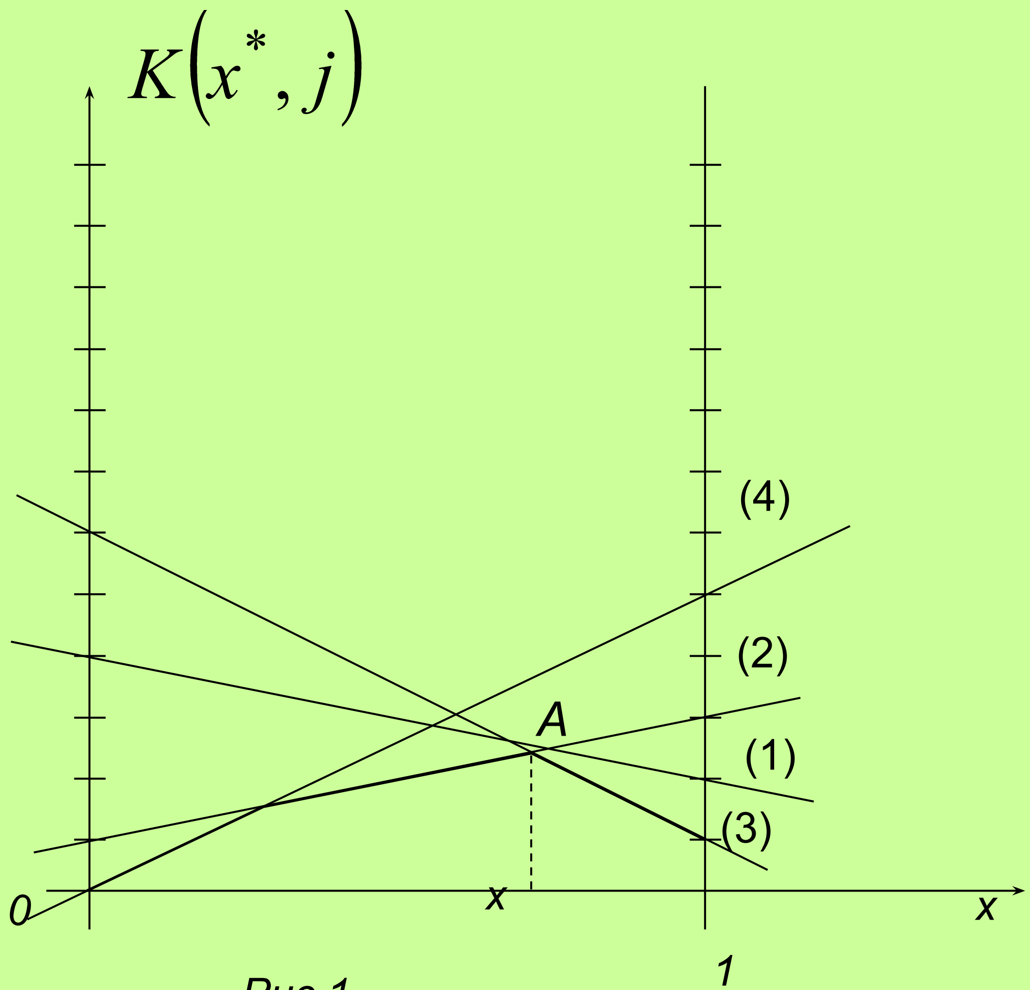


Рис.1

- Точка A является точкой пересечения прямых (2) и (3), поэтому решение исходной игры можно найти, решив игру

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- По формулам решения (2×2)– игры получим:

$$x_1 = \frac{6-1}{3+6-1-1} = \frac{5}{7} \qquad x_2 = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

$$y_1 = \frac{6-1}{3+6-1-1} = \frac{5}{7} \qquad y_2 = \frac{2}{7}$$

$$v = \frac{3\cdot 6 - 1\cdot 1}{3+6-1-1} = \frac{17}{7}$$

- Тогда решение исходной игры имеет вид

$$x^* = \left(\frac{5}{7}; \frac{2}{7}\right) \quad y^* = \left(0; \frac{5}{7}; \frac{2}{7}; 0\right)$$

(номерам столбцов, не вошедших в матрицу A', соответствуют нулевые

- координаты вектора y^*), $v = \frac{17}{7}$.

- Аналогично решаются $(m \times 2)$ - игры.

- Пусть, например, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$,

$y^* = (y, 1 - y)$ – смешанная стратегия 2-го игрока, 1-й игрок выбирает чистые стратегии i=1,2,3.

- $K\left(1, y^{*}\right) = 3y + 2\left(1 - y\right)$ (1)

- $K\left(2, y^{*}\right) = 1y + 5\left(1 - y\right)$ (2)

- $K\left(3, y^{*}\right) = 4y + 1\left(1 - y\right), \quad y \in \left[0;1\right]$ (3)

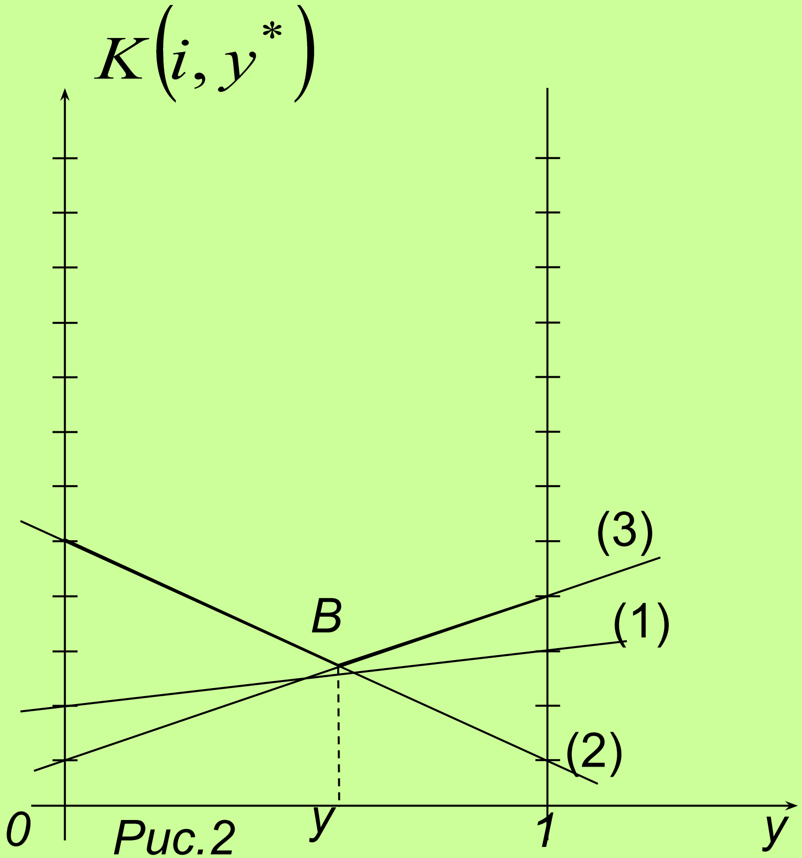


Рис.2

- Точка *B* является точкой пересечения прямых (2) и (3). Найдем решение игры

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1-4}{1+1-4-5} = \frac{3}{7} \qquad x_2 = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

$$y_1 = \frac{1-5}{1+1-4-5} = \frac{4}{7} \qquad y_2 = \frac{3}{7}$$

$$v = \frac{1\cdot 1 - 4\cdot 5}{1+1-4-5} = \frac{19}{7}$$

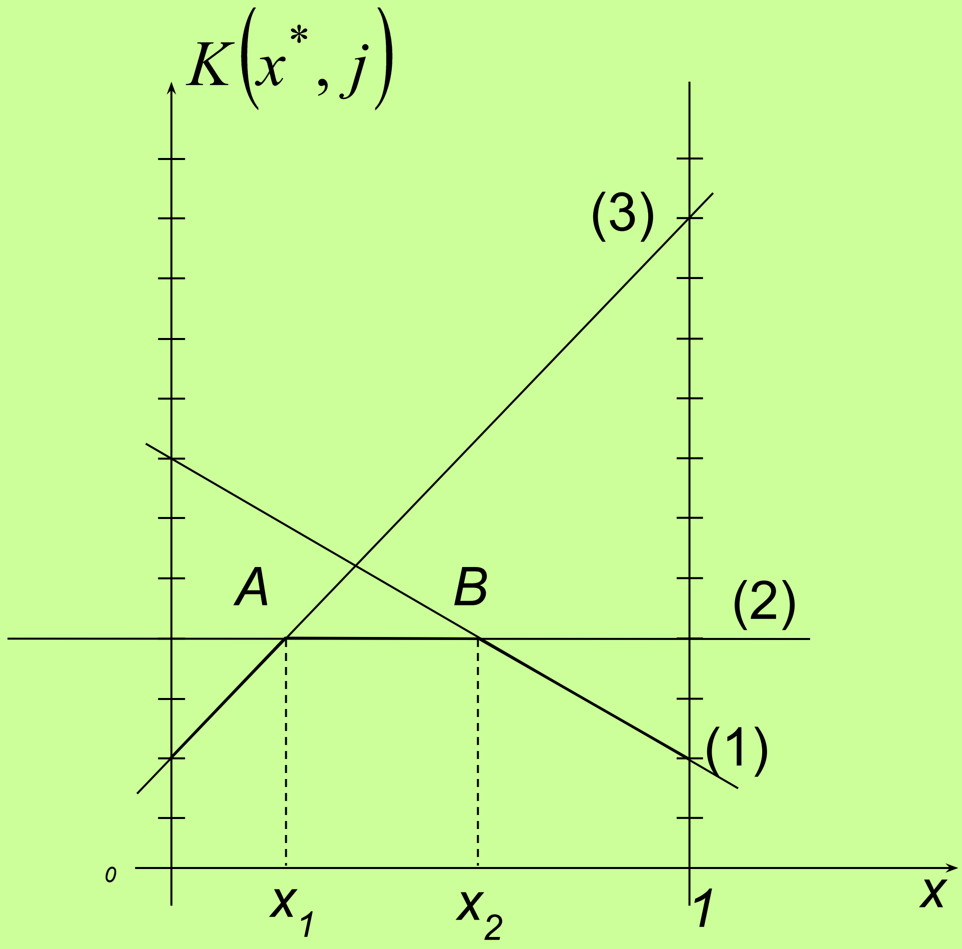
- Тогда решение исходной игры:

$$x^* = \left(0; \frac{3}{7}; \frac{4}{7}\right) \qquad y^* = \left(\frac{4}{7}; \frac{3}{7}\right) \qquad v = \frac{19}{7}$$

- Пусть платежная матрица игры

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Рис.3



- A – точка пересечения прямых (2) и (3), ее абсциссу найдем, решая игру

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{2-4}{4+2-4-11} = \frac{2}{9}$$

- B – точка пересечения прямых (1) и (2), ее абсциссу найдем, решая игру

$$A'' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = \frac{4-7}{2+4-7-4} = \frac{3}{5}$$

- Решение исходной игры:
  $x^* = (x, 1-x)$, где $x \in \left[\frac{2}{9}; \frac{3}{5}\right]$, $y^* = (0;1;0)$, $v = 4$

- то есть 1-й игрок имеет множество оптимальных стратегий,

  2-й игрок – единственную оптимальную стратегию, это чистая стратегия j=2.

- 4. Доминирование стратегий

- Иногда на основании простого рассмотрения матрицы игры можно сказать, что некоторые чистые стратегии могут войти в оптимальную смешанную стратегию лишь с нулевой вероятностью.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 8 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- В результате вместо игры Γ_A с матрицей A можно рассмотреть игру $\Gamma_{A'}$ с матрицей

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

- Легко найти решение игры $\Gamma_{A'}$

$$x^*_{A'} = \left(\frac{5}{11}; \frac{6}{11}\right) \qquad y^*_{A'} = \left(\frac{4}{11}; \frac{7}{11}\right) \qquad v_A = \frac{53}{11}$$

Можно предположить, что решение игры Γ_A будет иметь вид:

$$x^*_A = \left(\frac{5}{11}; \frac{6}{11}; 0\right) \qquad y^*_A = \left(\frac{4}{11}; \frac{7}{11}; 0\right) \qquad v_{A'} = \frac{53}{11}$$

- Говорят, что *i*-я стратегия 1-го игрока доминирует его *k*-ю стратегию, если $a_{ij} \geq a_{kj}$ для всех $j \in N$ и хотя бы для одного j $a_{ij} > a_{kj}$.

- В этом случае говорят также, что

i-я стратегия (или строка) – доминирующая,

k-я – доминируемая.

- Говорят, что *j*-я стратегия 2-го игрока доминирует его *l*-ю стратегию, если

для всех $i \in M$ $a_{ij} \le a_{il}$ и хотя бы для одного *i*

$a_{ij} < a_{il}$

В этом случае *j*-ю стратегию (столбец) называют доминирующей,

l-ю – доминируемой.

- Стратегия может доминироваться также выпуклой линейной комбинацией других стратегий.

- Так, *i*-я стратегия 1-го игрока доминируется выпуклой линейной комбинацией остальных стратегий, если $a_{ij} \le \sum_{k \ne i} \alpha_k a_{kj}$;

- *j*-я стратегия 2-го игрока доминируется выпуклой линейной комбинацией остальных стратегий, если $a_{ij} \ge \sum_{l \ne j} \alpha_l a_{il}$

- Если $x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in S_k$ – некоторая смешанная стратегия, то ее расширением на *i*-ом месте будем называть стратегию вида

$$\overline{x_i} = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_i, ..., x_k) \in S_{k+1}$$

- **теорема**: пусть $\Gamma_A - (m \times n)$-игра, в которой i-я строка доминируема, $\Gamma_{A'}$ – игра с матрицей A', полученной из A вычеркиванием i-ой строки. Тогда

- 1) $v_A = v_{A'}$;

- 2) всякая оптимальная стратегия 2-го игрока в игре $\Gamma_{A'}$ является оптимальной и в игре Γ_A;

- 3) если x^* – оптимальная стратегия 1-го игрока в игре $\Gamma_{A'}$, то $\overline{x_i^*}$ – его оптимальная стратегия в игре Γ_A.

- Аналогичная теорема имеет место для доминируемого столбца.

- 5. Множество решений матричной игры

- Чтобы найти множество всех решений игры с платежной матрицей A, нужно рассмотреть все **квадратные** подматрицы матрицы A.

- Найдя решения игр, заданных подматрицами, нужно составить их расширения на соответствующих местах и проверить, являются ли полученные стратегии оптимальными для игры Γ_A.

- Множество всех решений каждого игрока является выпуклой линейной комбинацией найденных решений.

- Решение игры, заданной **квадратной** подматрицей B, можно найти в матричном виде по формулам

$$v = \frac{|B|}{JB^* J^T} \qquad x = \frac{JB^*}{JB^* J^T} \qquad y^T = \frac{B^* J^T}{JB^* J^T}$$

- Найдем, например, множество всех решений игры Γ_A с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Подматрицы (1×1) не дадут решений, так как матрица A не имеет седловых точек. Рассмотрим подматрицы (2×2) :

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Для B: является решением игры Γ_A (убеждаемся в этом проверкой).

$$v_B = 1,\ x_B = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\ y_B = (0;1) \Rightarrow v_A = 1,\ x_A = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\ y_A = (0;1;0)$$

- Для C:

$$v_C = 1 \quad x_C = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \quad y_C = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$v_A = 1 \quad x_A = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \quad y_A = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$$

– является решением игры Γ_A.

Для D получим такое же решение, как для B.

- Таким образом, в игре Γ_A 1-й игрок имеет единственную оптимальную стратегию

$$x^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

2-й игрок имеет множество оптимальных стратегий $y^* = \alpha_1(0;1;0) + \alpha_2\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\alpha_2; \alpha_1; \frac{1}{2}\alpha_2\right)$

где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, цена игры v=1.

- 6. Сведение матричной игры к двойственной задаче линейного программирования

- Пусть матрица игры имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- K=$K(x,y)$– функция выигрыша, $v \in R$,

$x^* \in S_m$, $y^* \in S_n$.

- Тогда по свойству 2 оптимальных стратегий для любых $i \in M$, $j \in N$ должно выполняться условие

$$K(i, y^*) \le v \le K(x^*, j)$$

- То есть

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le v, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le v, \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1, \\ y_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n. \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \ge v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \ge v, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge v, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1, \\ x_i \ge 0, i = 1,2,\ldots,m. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le 1, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le 1, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \le 1, \\ q_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n; \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = \frac{1}{v} \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \ge 1, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \ge 1, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \ge 1, \\ p_i \ge 0, i = 1,2,\ldots,m; \end{cases}$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = \frac{1}{v} \to \min$$

- **Пример.** Найти решение игры с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Решение.** Перейдем к положительной матрице, прибавив 3 ко всем элементам матрицы A:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Составим двойственную задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + 3q_3 \le 1, \\ q_1 + 3q_2 + 2q_3 \le 1, \\ 3q_1 + 2q_2 + 2q_3 \le 1, \\ q_j \ge 0,\ j = 1,2,3; \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1}{v} \to \max$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + 3p_3 \ge 1, \\ p_1 + 3p_2 + 2p_3 \ge 1, \\ 3p_1 + 2p_2 + 2p_3 \ge 1, \\ p_i \ge 0, i = 1,2,3; \end{cases}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{v} \to \min$$

- Решим задачу симплексным методом

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + 3q_3 + q_4 = 1, \\ q_1 + 3q_2 + 2q_3 + q_5 = 1, \\ 3q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_6 = 1, \\ q_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}; \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1}{v} \to \max$$

	Базис	C_0	P_0	1	1	1	0	0	0
				q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
1-я итерация	q_4	0	1	1	1	3	1	0	0
	q_5	0	1	1	3	2	0	1	0
	q_6	0	1	3	2	2	0	0	1
			0	-1	-1	-1	0	0	0

	Базис	C_0	P_0	1	1	1	0	0	0
				q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
2-я итерация	q_4	0	2/3	0	1/3	7/3	1	0	-1/3
	q_5	0	2/3	0	7/3	4/3	0	1	-1/3
	q_1	1	1/3	1	2/3	2/3	0	0	1/3
			0	0	-1/3	-1/3	0	0	1/3

	Базис	C_0	P_0	1	1	1	0	0	0
				q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
3-я итерация	q_4	0	4/7	0	0	15/7	1	-1/7	-2/7
	q_2	1	2/7	0	1	4/7	0	3/7	-1/7
	q_1	1	1/7	1	0	2/7	0	-2/7	3/7
			3/7	0	0	-1/7	0	1/7	2/7

	Базис	C_0	P_0	1	1	1	0	0	0
				q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
4-я итерация	q_3	1	4/15	0	0	1	7/15	-1/15	-2/15
	q_2	1	2/15	0	1	0	-4/15	7/15	-1/15
	q_1	1	1/15	1	0	0	-2/15	-4/15	7/15
			7/15	0	0	0	1/15	2/15	4/15

- Получаем решение двойственной задачи:

$$p = \left(\frac{1}{15}; \frac{2}{15}; \frac{4}{15} \right)$$

$$q = \left(\frac{1}{15}; \frac{2}{15}; \frac{4}{15} \right)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{7}{15}$$

- Тогда решение игры с матрицей A'

$$x' = \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7}\right) \qquad y' = \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7}\right) \qquad v = \frac{15}{7}$$

- Решение исходной игры:

$$x^* = \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7}\right) \qquad y^* = \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7}\right) \qquad v = -\frac{6}{7}$$

- 7. Приближенное решение матричных игр

$$\max_k \frac{\underline{v}_k}{k} \le v \le \min_k \frac{\overline{v}_k}{k}$$

- где v – цена игры,
- k– номер партии,
- $\overline{v}_k$ – максимальное значение суммарного выигрыша 1-го игрока в k-ой партии при выборе различных стратегий,
- $\underline{v}_k$ – минимальное значение суммарного проигрыша 2-го игрока в k-ой партии при выборе различных стратегий.

- За приближенные оптимальные стратегии игроков принимают векторы, координатами которых являются относительные частоты выбора соответствующих чистых стратегий.

- **Пример.** Найти приближенное решение игры, заданной матрицей

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}
\end{array}
$$

№ партии k	выбор 1-го игрока	выбор 2-го игрока	суммарный выигрыш 1-го игрока при выборе стратегии			суммарный проигрыш 2-го игрока при выборе стратегии			$\frac{\overline{v}_k}{k}$	$\frac{\underline{v}_k}{k}$
			a	b	c	α	β	γ		
1	a	α	2	3	1	2	1	3	3	1
2	b	β	3	3	3	5	1	4	$\frac{3}{2}=1{,}5$	$\frac{1}{2}=0{,}5$
3	b	β	4	3	5	8	1	5	$\frac{5}{3}\approx 1{,}667$	$\frac{1}{3}\approx 0{,}333$
4	c	β	5	3	7	9	3	6	$\frac{7}{4}=1{,}75$	$\frac{3}{4}=0{,}75$
5	c	β	6	3	9	10	5	7	$\frac{9}{5}=1{,}8$	$\frac{5}{5}=1$
6	c	β	7	3	11	11	7	8	1,833	1,167

№ партии k	выбор 1-го игрока	выбор 2-го игрока	суммарный выигрыш 1-го игрока при выборе стратегии			суммарный проигрыш 2-го игрока при выборе стратегии			$\frac{\overline{v_k}}{k}$	$\frac{\underline{\underline{v_k}}}{k}$
			a	b	c	α	β	γ		
7	c	β	8	3	13	12	9	9	1,857	1,286
8	c	γ	11	4	14	13	11	10	1,75	1,25
9	c	γ	14	5	15	14	13	11	1,667	1,222
10	c	γ	17	6	16	15	15	12	1,7	1,2
11	*a*	γ	20	7	17	17	16	15	1,818	1,364
12	*a*	γ	23	8	18	19	17	18	1,917	1,417

$$\max_k \frac{\underline{v_k}}{k} = 1{,}417 \qquad \min_k \frac{\overline{v_k}}{k} = 1{,}5 \qquad \Rightarrow \quad 1{,}417 \le v \le 1{,}5$$

- Приближенное решение игры за 12 партий: $v = 1{,}45$,

$$x_{12}^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}\right)$$

$$y_{12}^* = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{2}, \frac{5}{12}\right)$$