


# ТЕОРИЯ ИГР



## Литература

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. – М., 1998.
2. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, 1985.
3. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр.– М.: Наука, 1981.

A decorative graphic on the left side of the slide, consisting of a light green vertical bar and a dark blue horizontal bar with rounded ends.

# 1. Основные понятия теории матричных игр

- **Теория игр** – это совокупность математических методов анализа и оценки конфликтных ситуаций.

- **Содержание теории игр:**
- установление принципов оптимального поведения в условиях неопределенности (конфликта),
- доказательство существования решений, удовлетворяющих этим принципам,
- указание алгоритмов нахождения решений, их реализация.

- Моделями теории игр можно описать экономические, правовые, классовые, военные конфликты, взаимодействие человека с природой.
- Все такие модели в теории игр принято называть **играми**.

- Игры можно классифицировать по различным признакам:
- стратегические и чисто случайные,
- бескоалиционные и коалиционные, игры 1, 2, ...,  $n$  лиц (по числу игроков),
- конечные и бесконечные (по числу стратегий), игры в нормальной форме и динамические,
- с нулевой суммой («антагонистические») и с ненулевой суммой.

- Рассмотрим простейшую модель – игру, в которой участвуют два игрока, множество стратегий каждого игрока конечно, а выигрыш одного игрока равен проигрышу другого (бескоалиционная, конечная, антагонистическая игра двух лиц).



- Таковую игру ( $\Gamma$ ) называют матричной.
- Она определяется тройкой  $\Gamma=(X,Y,K)$ ,  
где

$X$  – множество стратегий 1-го игрока,

$Y$  – множество стратегий 2-го игрока,

$K=K(x,y)$  – функция выигрыша (выигрыш 1-го игрока и соответственно проигрыш 2-го при условии, что 1-й игрок выбрал стратегию  $x$ , а 2-й – стратегию  $y$ ).

Пару  $(x,y)$  называют ситуацией в игре  $\Gamma$ .

- Пусть 1-й игрок имеет всего  $m$  стратегий, а 2-й –  $n$  стратегий:

$$X=M=\{1,2, \dots, m\}, \quad Y=N=\{1,2, \dots, n\}.$$

- Тогда игра  $\Gamma$  полностью определяется заданием матрицы  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  
где  $a_{ij} = K(i,j)$  – выигрыш 1-го игрока при условии, что он выбрал стратегию (т.е. строку)  $i$ , а 2-й игрок – стратегию (т.е. столбец)  $j$  (эти стратегии называют **чистыми**).
- Матрица  $A$  называется матрицей игры или платежной матрицей.

- Пусть  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  – платежная матрица игры  $\Gamma$ .

Если 1-й игрок выбрал стратегию  $i$ , то в худшем случае он выиграет  $\min_j a_{ij}$ .

Поэтому он всегда может гарантировать себе выигрыш  $\max_i \min_j a_{ij}$ , обозначим его  $\underline{v}$  – нижняя цена игры, или максимин,  
соответствующая стратегия 1-го игрока называется максиминной.

- Второй игрок, выбрав стратегию  $j$ , в худшем случае проиграет  $\max_i a_{ij}$ , а значит, может гарантировать себе проигрыш  $\min_j \max_i a_{ij}$ ,

обозначим его  $\bar{v}$  – верхняя цена игры, или минимакс, соответствующая стратегия 2-го игрока называется минимаксной.

Схема:

$$A = \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \square & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \square & a_{2n} \\ \square & \square & \square & \square \\ a_{m1} & a_{m2} & \square & a_{mn} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \min_j a_{1j} \\ \min_j a_{2j} \\ \square \\ \min_j a_{mj} \end{array} \right\} \Rightarrow \max_i \min_j a_{ij} = \underline{v}$$

$$\begin{array}{ccc} \max_i a_{i1} & \max_i a_{i2} & \square \\ \square & \square & \square \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \max_i a_{in} & & \\ \square & \square & \square \end{array}$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \underline{v}$$

- Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{matrix} \Rightarrow \underline{v} = -3$$
$$\begin{matrix} 4 & 4 & 6 \end{matrix} \Rightarrow \bar{v} = 4$$

- Соответствующие стратегии:

$i_0 = 1$  (максиминная),  $j_0 = 1, 2$  (минимаксная).

- Справедливо неравенство:

$$\underline{v} \leq \bar{v}$$

- Ситуация  $(i^*, j^*)$  называется ситуацией равновесия, или седловой точкой, если для любых  $i \in M$ ,  $j \in N$ , выполняется неравенство

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

- Соответствующие стратегии  $i^*, j^*$  называются оптимальными чистыми стратегиями 1-го и 2-го игроков, а число  $v = a_{i^*j^*}$  называется ценой игры.
- Элемент  $a_{i^*j^*}$  является одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце.



- Ситуация равновесия существует тогда и только тогда, когда  $\underline{v} = v$  (это значение и является ценой игры  $v$ ).

- Например,

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \\ 5 & 5 & 4 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} -5 \\ 4 \\ -5 \\ \end{matrix} \Rightarrow \bar{v} = \underline{v} = 4.$$

- (2,3)-ситуация равновесная,  $v = 4$  – цена игры,  $i^* = 2, j^* = 3$  – оптимальные стратегии 1-го и 2-го игроков. Выбрав их, 1-й игрок обеспечит себе выигрыш не менее 4 ед., а 2-й игрок проиграет не более 4 ед. при любом выборе другого игрока.

- Смешанной стратегией для 1-го игрока называется упорядоченная система  $m$  действительных чисел  $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $x_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ , которые можно рассматривать как относительные частоты (вероятности), с которыми 1-й игрок выбирает чистые стратегии  $i=1, 2, \dots, m$ .
- Аналогично определяется смешанная стратегия для 2-го игрока:  $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $y_j \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^n y_j = 1$ .

- Функция выигрыша  $K(x,y)$  в ситуации  $(x,y)$  определяется как математическое ожидание выигрыша 1-го игрока при условии, что 1-й и 2-й игроки выбрали соответственно стратегии  $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$  и  $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ :

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j \quad .$$

- Если для некоторых  $x^* \in S_m$  и  $y^* \in S_n$  и для всех  $x \in S_m$  и  $y \in S_n$  выполняется неравенство  $K(x, y^*) \leq K(x^*, y^*) \leq K(x^*, y)$ , то  $x^*, y^*$  называются **оптимальными смешанными стратегиями игроков**, число  $v = K(x^*, y^*)$  называется **ценой игры**, пара  $(x^*, y^*)$  – **стратегической седловой точкой**  
тройка  $x^*, y^*, v$  – **решением игры**.

- **Свойства оптимальных стратегий.**

- 1. Пусть  $K(x,y)$  – математическое ожидание выигрыша в игре  $\Gamma_A$  с ценой  $v$ .
- Тогда, для того чтобы элемент  $x^* \in S_m$  был оптимальной стратегией 1-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента  $y \in S_n$  выполнялось неравенство

$$v \leq K(x^*, y)$$

- Аналогично, для того чтобы  $y^* \in S_n$  был оптимальной стратегией 2-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого  $x \in S_m$  выполнялось неравенство

$$K(x, y^*) \leq v$$

- 2. Пусть  $K(x,y)$  – математическое ожидание выигрыша в игре  $\Gamma_A$ ,

$v$  – действительное число,  $x^* \in S_m$ ,  $y^* \in S_n$ .

Тогда, для того чтобы  $v$  было ценой игры, а  $x^*$  и  $y^*$  были оптимальными стратегиями соответственно 1-го и 2-го игроков, необходимо и достаточно, чтобы для любых  $i \in I$  и  $j \in J$  выполнялось неравенство

$$K(i, y^*) \leq v \leq K(x^*, j)$$



- 3. Пусть  $K(x,y)$  – математическое ожидание выигрыша в игре  $\Gamma_A$  с ценой  $v$ .
- Тогда, для того чтобы элемент  $x^* \in S_m$  был оптимальной стратегией 1-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого  $j \in N$  выполнялось неравенство  $v \leq K(x^*, j)$  .
- Аналогично, для того чтобы  $y^* \in S_n$  был оптимальной стратегией 2-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого  $i \in M$  выполнялось неравенство  $K(i, y^*) \leq v$  .

- 4. Если  $x^*, y^*$  – решение  $(m \times n)$ -игры  $\Gamma_A$ ,  
то

$$\max_i K(i, y^*) = \min_j K(x^*, j) = v$$

- 5. Пусть  $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $y^* = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $v$  – решение игры  $\Gamma_A$ .
- Тогда для любого  $i \in M$ , при котором  $K(i, y^*) < v$ , выполняется неравенство  $x_i = 0$ , а для любого  $j \in N$ , при котором  $v < K(x^*, j)$ , выполняется неравенство  $y_j = 0$ .

- 6 (Лемма о масштабе).
- Если  $\Gamma_A$  – игра с матрицей  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , а  $\Gamma_{A'}$  – игра с матрицей  $A' = (a'_{ij})_{m \times n}$ , где  $a'_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta$ , где  $\alpha, \beta = \text{const}$ ,  $\alpha > 0$ , то множества оптимальных стратегий игроков в играх  $\Gamma_A$  и  $\Gamma_{A'}$  совпадают, а
  - $v_{A'} = \alpha v_A + \beta$
- Иначе говоря, две игры, отличающиеся лишь началом отсчета выигрышей и масштабом их измерения, стратегически эквивалентны.

## 2. $(2 \times 2)$ - игры

- Пусть  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  – платежная матрица

игры  $\Gamma$ .

**Если она не имеет седловой точки, то единственное решение игры  $\Gamma$  можно найти**

- 1) решив две системы:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1; \end{cases}$$

- 2) по формулам:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

ИЛИ  $x_2 = 1 - x_1$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

ИЛИ  $y_2 = 1 - y_1$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$



- 3) в матричном виде:

$$x = \frac{JA^*}{JA^*J^T} \quad y^T = \frac{A^*J^T}{JA^*J^T} \quad v = \frac{|A|}{JA^*J^T}$$

где  $|A|$  – определитель матрицы  $A$ ,  
 $A^*$  – присоединенная к  $A$  матрица,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix},$$

$J^T$  и  $y^T$  – транспонированные матрицы  $J$  и  $y$ .

- Найдем, например, решение игры с

платежной матрицей  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ , которая **не**

**имеет седловой точки.**

- 1) Составим системы:

$$\begin{cases} 3y_1 - y_2 = v, \\ 2y_1 + 4y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = v, \\ -x_1 + 4x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

- Решив системы, получим:

$$y_1 = \frac{5}{6} \quad y_2 = \frac{1}{6} \quad x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{2}{3} \quad v = \frac{7}{3}$$

- то есть  $x^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$   $y^* = \left(\frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right)$   $v = \frac{7}{3}$  -решение игры.

- 2) Найдем решение по формулам:

$$x_1 = \frac{4-2}{3+4-2+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y_1 = \frac{4+1}{3+4-2+1} = \frac{5}{6}$$

$$y_2 = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$v = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{3+4-2+1} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

- 3) Найдем решение в матричном виде:

$$|A| = 12 + 2 = 14 \quad A^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad JA^* = (1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = (2 \ 4)$$

$$JA^*J^T = (2 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \quad A^*J^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{6} \cdot (2 \ 4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad y^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$v = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

- 3.  $(2 \times n)$  и  $(m \times 2)$  – игры

- Рассмотрим игру с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

- Если 1-й игрок применит смешанную стратегию  $x^* = (x, 1 - x)$ , а 2-й игрок – чистую стратегию  $j = 1$ , то

$$K(x^*, 1) = 2x + 4(1 - x) \quad .(1)$$



- Аналогично при выборе 2-м игроком чистых стратегий  $j = 2$ ,  $j = 3$ ,  $j = 4$

$$K(x^*, 2) = 3x + 1(1 - x) \quad (2)$$

$$K(x^*, 3) = 1x + 6(1 - x) \quad (3)$$

$$K(x^*, 4) = 5x + 0(1 - x), \quad x \in [0; 1] \quad (4)$$

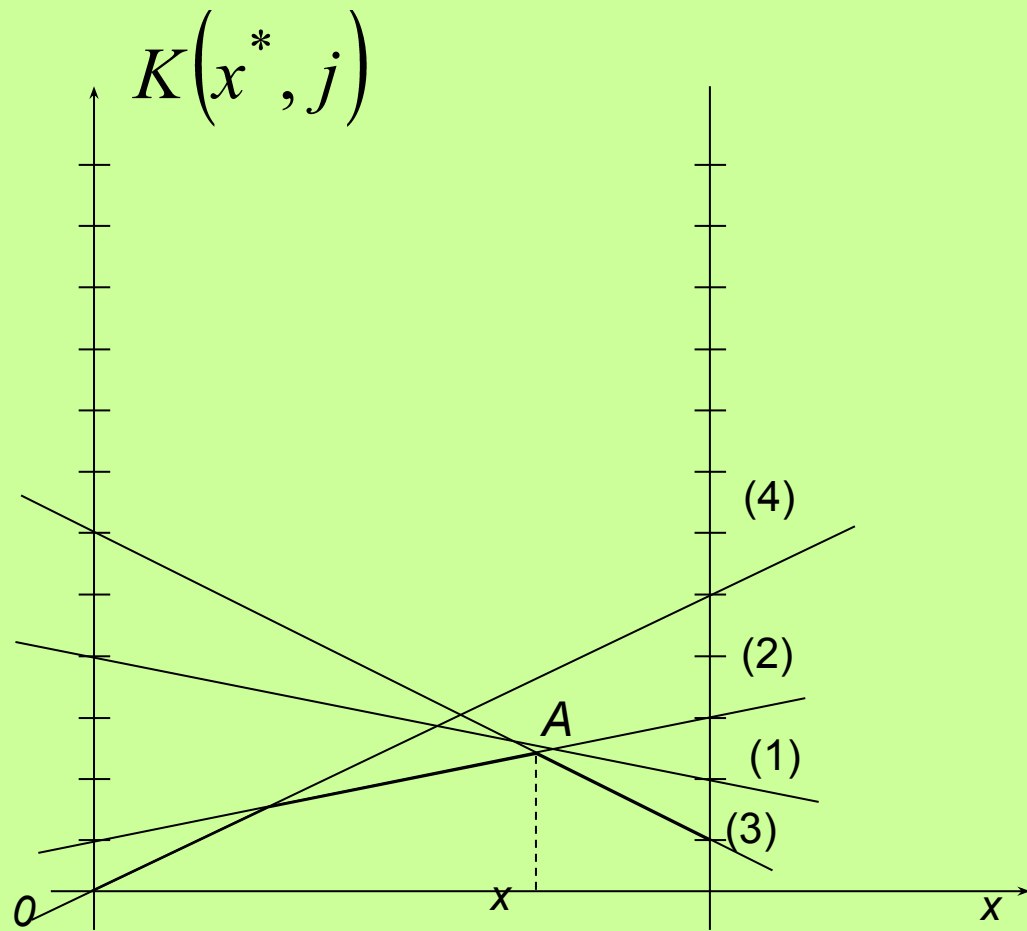


Рис.1

1

- Точка  $A$  является точкой пересечения прямых (2) и (3), поэтому решение исходной игры можно найти, решив игру

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- По формулам решения  $(2 \times 2)$ - игры получим:

$$x_1 = \frac{6-1}{3+6-1-1} = \frac{5}{7}$$

$$x_2 = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

$$y_1 = \frac{6-1}{3+6-1-1} = \frac{5}{7}$$

$$y_2 = \frac{2}{7}$$

$$v = \frac{3 \cdot 6 - 1 \cdot 1}{3+6-1-1} = \frac{17}{7}$$

- Тогда решение исходной игры имеет

вид

$$x^* = \left( \frac{5}{7}; \frac{2}{7} \right) \quad y^* = \left( 0; \frac{5}{7}; \frac{2}{7}; 0 \right)$$

(номерам столбцов, не вошедших в матрицу  $A'$ , соответствуют нулевые

- координаты вектора  $y^*$ ),  $v = \frac{17}{7}$ .

- Аналогично решаются  $(m \times 2)$  - игры.

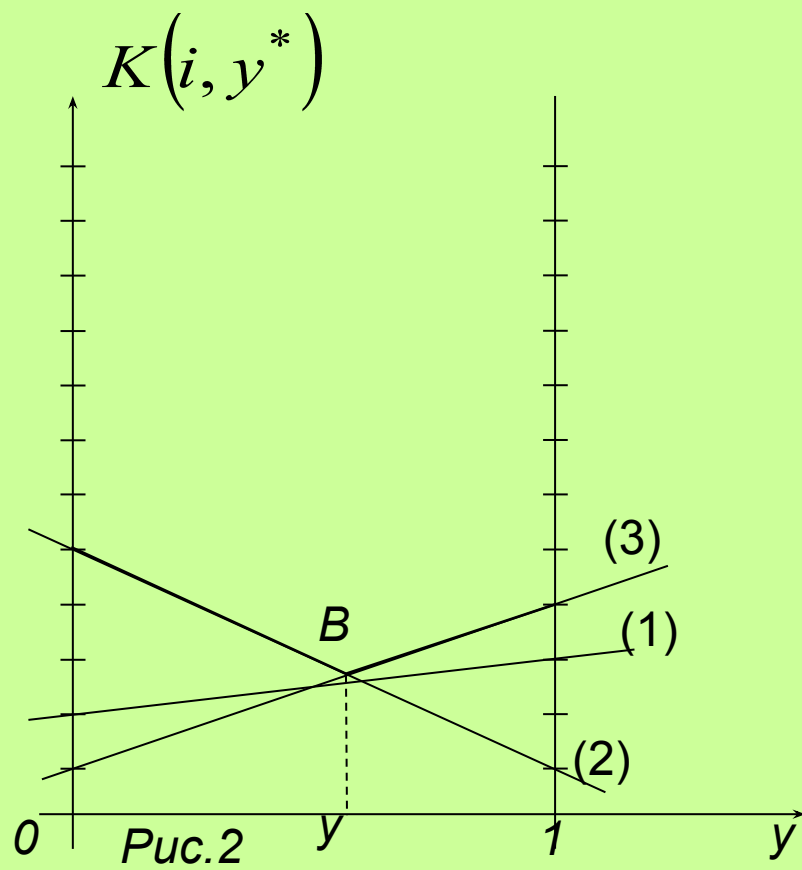
- Пусть, например,  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$y^* = (y, 1 - y)$  – смешанная стратегия 2-го игрока, 1-й игрок выбирает чистые стратегии  $i=1,2,3$ .

$$\bullet K(1, y^*) = 3y + 2(1 - y) \quad (1)$$

$$\bullet K(2, y^*) = 1y + 5(1 - y) \quad (2)$$

$$\bullet K(3, y^*) = 4y + 1(1 - y), \quad y \in [0;1] \quad (3)$$





- Точка  $B$  является точкой пересечения прямых (2) и (3). Найдем решение игры

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1 - 4}{1 + 1 - 4 - 5} = \frac{3}{7}$$

$$x_2 = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

$$y_1 = \frac{1 - 5}{1 + 1 - 4 - 5} = \frac{4}{7}$$

$$y_2 = \frac{3}{7}$$

$$v = \frac{1 \cdot 1 - 4 \cdot 5}{1 + 1 - 4 - 5} = \frac{19}{7}$$

- Тогда решение исходной игры:

$$x^* = \left( 0; \frac{3}{7}; \frac{4}{7} \right) \quad y^* = \left( \frac{4}{7}; \frac{3}{7} \right) \quad v = \frac{19}{7}$$

- Пусть платежная матрица игры

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

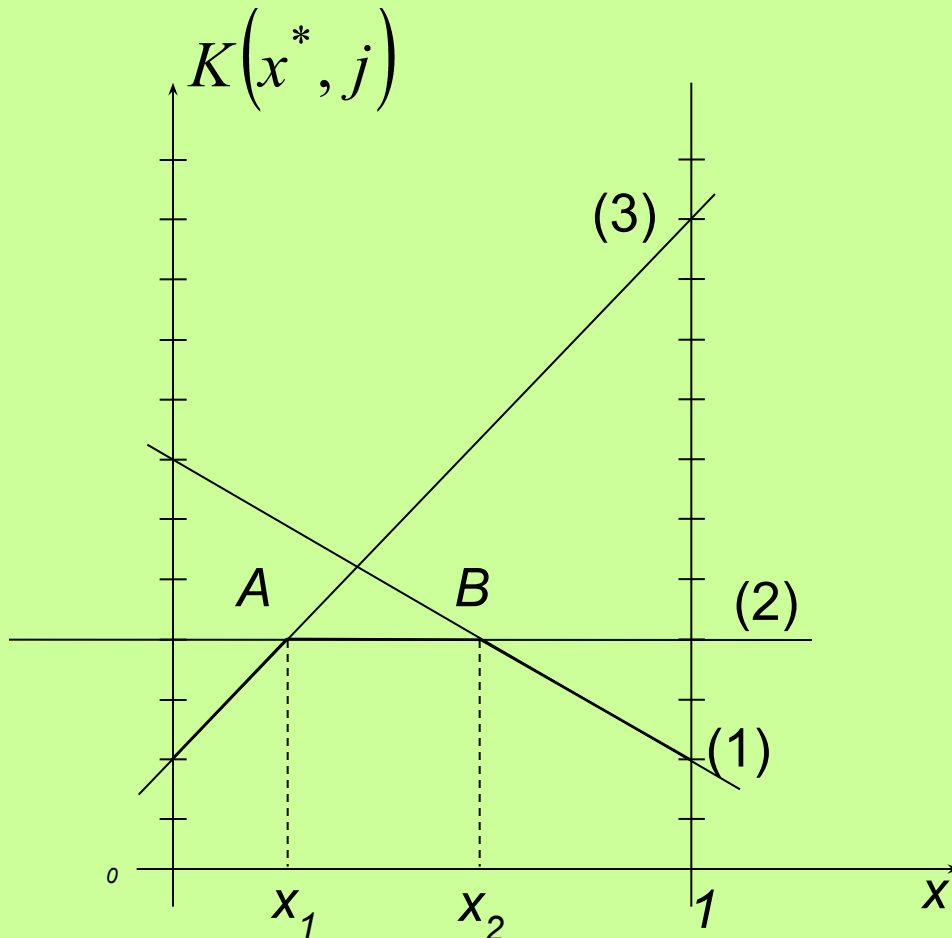


Рис.3

- $A$  – точка пересечения прямых (2) и (3), ее абсциссу найдем, решая игру

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{2 - 4}{4 + 2 - 4 - 11} = \frac{2}{9}$$

- $B$  – точка пересечения прямых (1) и (2), ее абсциссу найдем, решая игру

$$A'' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = \frac{4 - 7}{2 + 4 - 7 - 4} = \frac{3}{5}$$

- Решение исходной игры:

$$x^* = (x, 1 - x), \text{ где } x \in \left[ \frac{2}{9}; \frac{3}{5} \right], y^* = (0; 1; 0), v = 4$$

- то есть 1-й игрок имеет множество оптимальных стратегий,  
2-й игрок – единственную оптимальную стратегию, это чистая стратегия  $j=2$ .

- 4. Доминирование стратегий

- Иногда на основании простого рассмотрения матрицы игры можно сказать, что некоторые чистые стратегии могут войти в оптимальную смешанную стратегию лишь с нулевой вероятностью.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 8 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$



- В результате вместо игры  $\Gamma_A$  с матрицей  $A$  можно рассмотреть игру  $\Gamma_{A'}$  с матрицей

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

- Легко найти решение игры  $\Gamma_{A'}$

$$x_{A'}^* = \left( \frac{5}{11}; \frac{6}{11} \right) \quad y_{A'}^* = \left( \frac{4}{11}; \frac{7}{11} \right) \quad v_{A'} = \frac{53}{11}$$

Можно предположить, что решение игры  $\Gamma_A$  будет иметь вид:

$$x_A^* = \left( \frac{5}{11}; \frac{6}{11}; 0 \right) \quad y_A^* = \left( \frac{4}{11}; \frac{7}{11}; 0 \right) \quad v_{A'} = \frac{53}{11}$$

- Говорят, что  $i$ -я стратегия 1-го игрока доминирует его  $k$ -ю стратегию, если  $a_{ij} \geq a_{kj}$  для всех  $j \in N$  и хотя бы для одного  $j$   $a_{ij} > a_{kj}$ .
- В этом случае говорят также, что  $i$ -я стратегия (или строка) – доминирующая,  $k$ -я – доминируемая.

- Говорят, что  $j$ -я стратегия 2-го игрока доминирует его  $l$ -ю стратегию, если для всех  $i \in M$   $a_{ij} \leq a_{il}$  и хотя бы для одного  $i$   
 $a_{ij} < a_{il}$

В этом случае  $j$ -ю стратегию (столбец) называют доминирующей,  
 $l$ -ю – доминируемой.

- Стратегия может доминироваться также выпуклой линейной комбинацией других стратегий.
- Так,  $i$ -я стратегия 1-го игрока доминируется выпуклой линейной комбинацией остальных стратегий, если  $a_{ij} \leq \sum_{k \neq i} \alpha_k a_{kj}$  ;
- $j$ -я стратегия 2-го игрока доминируется выпуклой линейной комбинацией остальных стратегий, если  $a_{ij} \geq \sum_{l \neq j} \alpha_l a_{il}$

- Если  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in S_k$  – некоторая смешанная стратегия, то ее расширением на  $i$ -ом месте будем называть стратегию вида  $\bar{x}_i = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_k) \in S_{k+1}$

- **теорема:** пусть  $\Gamma_A$  –  $(m \times n)$ -игра, в которой  $i$ -я строка доминируема,  $\Gamma_{A'}$  – игра с матрицей  $A'$ , полученной из  $A$  вычеркиванием  $i$ -ой строки. Тогда
  - 1)  $v_A = v_{A'}$  ;
  - 2) всякая оптимальная стратегия 2-го игрока в игре  $\Gamma_{A'}$  является оптимальной и в игре  $\Gamma_A$ ;
  - 3) если  $x^*$  – оптимальная стратегия 1-го игрока в игре  $\Gamma_{A'}$ , то  $\overline{x_i^*}$  – его оптимальная стратегия в игре  $\Gamma_A$ .
- Аналогичная теорема имеет место для доминируемого столбца.

- 5. Множество решений матричной игры



- Чтобы найти множество всех решений игры с платежной матрицей  $A$ , нужно рассмотреть все **квадратные** подматрицы матрицы  $A$ .
- Найдя решения игр, заданных подматрицами, нужно составить их расширения на соответствующих местах и проверить, являются ли полученные стратегии оптимальными для игры  $\Gamma_A$ .

- Множество всех решений каждого игрока является выпуклой линейной комбинацией найденных решений.

- Решение игры, заданной **квадратной** подматрицей  $B$ , можно найти в матричном виде по формулам

$$v = \frac{|B|}{JB^*J^T}$$

$$x = \frac{JB^*}{JB^*J^T}$$

$$y^T = \frac{B^*J^T}{JB^*J^T}$$

- Найдем, например, множество всех решений игры  $\Gamma_A$  с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Подматрицы  $(1 \times 1)$  не дадут решений, так как матрица  $A$  не имеет седловых точек.

Рассмотрим подматрицы  $(2 \times 2)$  :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Для  $B$ : является решением игры  $\Gamma_A$  (убеждаемся в этом проверкой).

$$v_B = 1, x_B = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), y_B = (0;1) \Rightarrow v_A = 1, x_A = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), y_A = (0;1;0)$$

• Для  $C$ :

$$v_C = 1 \quad x_C = \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \quad y_C = \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \Rightarrow$$

$$v_A = 1 \quad x_A = \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \quad y_A = \left( \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2} \right)$$

– является решением игры  $\Gamma_A$ .

Для  $D$  получим такое же решение, как для  $B$ .

- Таким образом, в игре  $\Gamma_A$  1-й игрок имеет единственную оптимальную стратегию

$$x^* = \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

2-й игрок имеет множество оптимальных стратегий  $y^* = \alpha_1(0;1;0) + \alpha_2\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\alpha_2; \alpha_1; \frac{1}{2}\alpha_2\right)$

где  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , цена игры  $v=1$ .



- 6. Сведение матричной игры к двойственной задаче линейного программирования

- Пусть матрица игры имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- $K=K(x,y)$ — функция выигрыша,  $v \in R$ ,

$$x^* \in S_m, y^* \in S_n.$$

- Тогда по свойству 2 оптимальных стратегий для любых  $i, j \in N$  должно выполняться условие

$$K(i, y^*) \leq v \leq K(x^*, j)$$

- То есть

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq v, \\ \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq v, \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1, \\ y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq v, \\ \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq v, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n \leq 1, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n \leq 1, \\ \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \dots + a_{mn}q_n \leq 1, \\ q_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n; \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = \frac{1}{v} \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \geq 1, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \geq 1, \\ \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \geq 1, \\ p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; \end{cases}$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = \frac{1}{v} \rightarrow \min$$

- **Пример.** Найти решение игры с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Решение.** Перейдем к положительной матрице, прибавив 3 ко всем элементам матрицы  $A$ :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Составим двойственную задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + 3q_3 \leq 1, \\ q_1 + 3q_2 + 2q_3 \leq 1, \\ 3q_1 + 2q_2 + 2q_3 \leq 1, \\ q_j \geq 0, j = 1, 2, 3; \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1}{v} \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + 3p_3 \geq 1, \\ p_1 + 3p_2 + 2p_3 \geq 1, \\ 3p_1 + 2p_2 + 2p_3 \geq 1, \\ p_i \geq 0, i = 1, 2, 3; \end{cases}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{v} \rightarrow \min$$



- Решим задачу симплексным методом

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + 3q_3 + q_4 = 1, \\ q_1 + 3q_2 + 2q_3 + q_5 = 1, \\ 3q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_6 = 1, \\ q_j \geq 0, j = \overline{1,6}; \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1}{v} \rightarrow \max$$

	Базис	$C_0$	$P_0$	1	1	1	0	0	0
				$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$
1-я итерация	$q_4$	0	1	1	1	3	1	0	0
	$q_5$	0	1	1	3	2	0	1	0
	$q_6$	0	1	3	2	2	0	0	1
			0	0	-1	-1	-1	0	0

	Базис	$C_0$	$P_0$	1	1	1	0	0	0
				$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$
2-я итерация	$q_4$	0	2/3	0	1/3	7/3	1	0	-1/3
	$q_5$	0	2/3	0	7/3	4/3	0	1	-1/3
	$q_1$	1	1/3	1	2/3	2/3	0	0	1/3
			0	0	0	-1/3	-1/3	0	0

	Базис	$C_0$	$P_0$	1	1	1	0	0	0
				$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$
3-я итерация	$q_4$	0	4/7	0	0	15/7	1	-1/7	-2/7
	$q_2$	1	2/7	0	1	4/7	0	3/7	-1/7
	$q_1$	1	1/7	1	0	2/7	0	-2/7	3/7
			3/7	0	0	-1/7	0	1/7	2/7

	Базис	$C_0$	$P_0$	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
				$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$
4-я итерация	$q_3$	<b>1</b>	<b>4/15</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>7/15</b>	<b>-1/15</b>	<b>-2/15</b>
	$q_2$	<b>1</b>	<b>2/15</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>-4/15</b>	<b>7/15</b>	<b>-1/15</b>
	$q_1$	<b>1</b>	<b>1/15</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-2/15</b>	<b>-4/15</b>	<b>7/15</b>
				<b>7/15</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1/15</b>	<b>2/15</b>

- Получаем решение двойственной задачи:

$$p = \left( \frac{1}{15}; \frac{2}{15}; \frac{4}{15} \right)$$

$$q = \left( \frac{1}{15}; \frac{2}{15}; \frac{4}{15} \right)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{7}{15}$$

- Тогда решение игры с матрицей  $A'$

$$x' = \left( \frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7} \right) \quad y' = \left( \frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7} \right) \quad v = \frac{15}{7}$$

- Решение исходной игры:

$$x^* = \left( \frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7} \right) \quad y^* = \left( \frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7} \right) \quad v = -\frac{6}{7}$$

- 7. Приближенное решение матричных игр



$$\max_k \frac{v_k}{k} \leq v \leq \min_k \frac{\overline{v}_k}{k}$$

- где  $v$  – цена игры,
- $k$  – номер партии,
- $\overline{v}_k$  – максимальное значение суммарного выигрыша 1-го игрока в  $k$ -ой партии при выборе различных стратегий,
- $\underline{v}_k$  – минимальное значение суммарного проигрыша 2-го игрока в  $k$ -ой партии при выборе различных стратегий.

- За приближенные оптимальные стратегии игроков принимают векторы, координатами которых являются относительные частоты выбора соответствующих чистых стратегий.

- **Пример.** Найти приближенное решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{array}{ccc} & \alpha & \beta & \gamma \\ \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & & \end{array}$$

№ партии $k$	выбор 1-го игрока	выбор 2-го игрока	суммарный выигрыш 1-го игрока при выборе стратегии			суммарный проигрыш 2-го игрока при выборе стратегии			$\frac{v_k}{k}$	$\frac{v_k}{k}$
			$a$	$b$	$c$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$		
1	$a$	$\alpha$	2	3	1	2	1	3	3	1
2	$b$	$\beta$	3	3	3	5	1	4	$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{1}{2} = 0,5$
3	$b$	$\beta$	4	3	5	8	1	5	$\frac{5}{3} \approx 1,667$	$\frac{1}{3} \approx 0,333$
4	$c$	$\beta$	5	3	7	9	3	6	$\frac{7}{4} = 1,75$	$\frac{3}{4} = 0,75$
5	$c$	$\beta$	6	3	9	10	5	7	$\frac{9}{5} = 1,8$	$\frac{5}{5} = 1$
6	$c$	$\beta$	7	3	11	11	7	8	1,833	1,167

№ партии $k$	выбор 1-го игрока	выбор 2-го игрока	суммарный выигрыш 1-го игрока при выборе стратегии			суммарный проигрыш 2-го игрока при выборе стратегии			$\frac{v_k}{k}$	$\frac{v_k}{k}$
			$a$	$b$	$c$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$		
7	$c$	$\beta$	8	3	13	12	9	9	1,857	1,286
8	$c$	$\gamma$	11	4	14	13	11	10	1,75	1,25
9	$c$	$\gamma$	14	5	15	14	13	11	1,667	1,222
10	$c$	$\gamma$	17	6	16	15	15	12	1,7	1,2
11	$a$	$\gamma$	20	7	17	17	16	15	1,818	1,364
12	$a$	$\gamma$	23	8	18	19	17	18	1,917	1,417

$$\max_k \frac{v_k}{k} = 1,417 \quad \min_k \frac{\bar{v}_k}{k} = 1,5 \quad \Rightarrow \quad 1,417 \leq v \leq 1,5$$

- Приближенное решение игры за 12 партий:  
 $v = 1,45,$

$$x_{12}^* = \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{7}{12} \right)$$

$$y_{12}^* = \left( \frac{1}{12}, \frac{1}{2}, \frac{5}{12} \right)$$