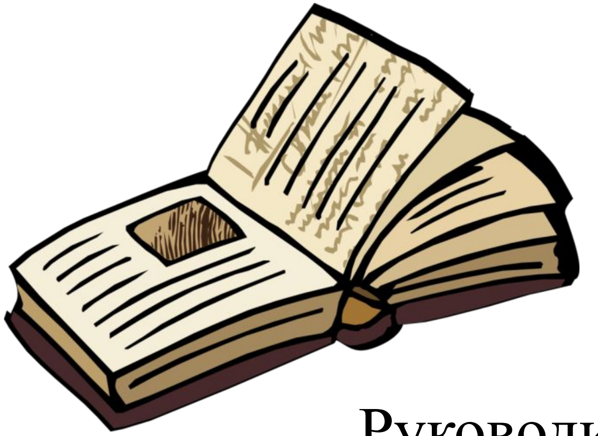
ТЕОРИЯ ИГР

Решение задач в смешанных стратегиях



Шелыганова Ольга Ильинична
Руководитель: д.э.н. Потехина Елена Витальевна

ПЛАН ЛЕКЦИИ

- 1) Решение задач в смешанных стратегиях размерностью 2x2;
- 2) Решение задач в смешанных стратегиях размерностью 2xn и mx2.

ТЕОРИЯ ИГР – это раздел математики, изучающий математические модели принятия решений в конфликтных ситуациях.

ИГРА – это упрощенная математическая модель конфликтной ситуации, сторонами которой являются **ИГРОКИ**

Пусть в игре участвуют два игрока А и В

Выигрыш игрока А – a_{ij}

Выигрыш игрока В – b_j

$$\boxed{a_{ij} = -b_j}$$

~~Задача игрока А~~ – максимизировать свой выигрыш

~~Задача игрока В~~ – минимизировать свой проигрыш

Игру можно представить в виде матрицы

Столбцы – стратегии игрока B

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Строки – стратегии игрока А

Матрица называется ***ПЛАТЕЖНОЙ МАТРИЦЕЙ***, где элементы этой матрицы это выигрыши игрока А.

- Выигрыш зависит от **СТРАТЕГИИ**, последовательности действий игрока в конкретной ситуации.

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ ИГРОКА

МАКСИМАЛЬНЫЙ ВЫИГРЫШ

РЕШИМ ЗАДАЧУ:

Два игрока, не глядя друг на друга, кладут на стол по картонному кружку красного (К), зеленого (З) или синего (с) цветов.

Сравнивают цвета и расплачиваются друг с другом так как показано в матрице игры.

Считая, что игра повторяется многократно, определить оптимальные стратегии каждого игрока.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \mathbf{Вк} & \mathbf{Вз} & \mathbf{Вс} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{Ак} \\ \mathbf{Аз} \\ \mathbf{Ас} \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

- ***Принцип МАКСИМИНА*** – выбрать ту стратегию, чтобы при наихудшем поведении противника получить максимальный выигрыш.

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & \mathbf{Вк} & \mathbf{Вз} & \mathbf{Вс} \\
\mathbf{Ак} & & & \\
\mathbf{Аз} & & & \\
\mathbf{Ас} & & &
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc}
-2 & 2 & -1 \\
2 & 1 & 1 \\
3 & -3 & 1
\end{array}\right)
$$

Min выигрыша А

-2

1

-3

3 2 1

Max выигрыша А

Min проигрыша В

α = b = v = 1 – седловая точка

(Аз;Вс) – пара оптим. стратегий

$\boldsymbol{\alpha} = \max\{-2;1;-3\} = 1$

- нижняя цена игры

$\mathbf{b} = \min\{3;\ 2;\ 1\} = 1$

- верхняя цена игры

СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

Если в игре ***нет седловой точки***, то можно найти нижнюю и верхнюю цены игры, которые указывают, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры.

Поиск такого решения приводит к необходимости применять смешанные стратегии, то есть чередовать чистые стратегии с какими-то частотами.

1) Теорема и максимине. В конечной игре двух игроков (коалиций) с нулевой суммой (матричной игре) при a ≠ b имеет место равенство:

$$\boxed{v_A = v_B}$$

Теорема о максимине указывает на существование равновесия для случая $V_A = V_B$ при a ≠ b, и, следовательно, существования оптимальных смешанных стратегий.

2) Основная теорема матричных игр.

Любая матричная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, в общем случае, в смешанных стратегиях и соответствующую цену V.

Цена игры V – средний выигрыш, приходящийся на одну партию, - всегда удовлетворяет условию:

$$\alpha \leq v \leq \beta,$$

т.е. лежит между нижней **а** и верхней **в** ценами игры.

Те из чистых стратегий игроков А и В, которые входят в их оптимальные смешанные стратегии с вероятностями, не равными нулю, называются ***активными стратегиями***.

1. Решение задач в смешанных стратегиях размерностью 2x2

Аналитический метод

Графический метод

Аналитический метод решения игры 2х2

$$\begin{array}{ccc} A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \\ \quad\quad q_1 \quad\; q_2 & \end{array}$$

1) Оптимальное решение в смешанных стратегиях: $S_A = |\ p_1, p_2\ |$ и $S_B = |\ q_1, q_2\ |$
2) Вероятности применения (относительные частоты применения) чистых стратегий удовлетворяют соотношениям:

$$p_1 + p_2 = 1$$
$$q_1 + q_2 = 1$$

1) Если игрок A использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок B – свою чистую активную стратегию B1, то цена игры V равна:

$$\mathbf{a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v}$$

2) Если игрок A использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок B – свою чистую активную стратегию B2, то цена игры V равна:

$$\mathbf{a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ЗАДАНИЕ:

Найти, чему равны p1, p2, v, если:

$$\mathbf{a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v}$$

$$\mathbf{a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v}$$

Получаем решение матричной игры:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

Вычислив оптимальное значение V, можно вычислить и оптимальную смешанную стратегию второго игрока из условия:

$$\mathbf{a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v} \quad \text{и} \quad \mathbf{a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v}$$

$$\boxed{q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}}$$

$$\boxed{q_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{a_{11} - v}{a_{11} - a_{12}}}$$

Пример

Платежная матрица имеет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Найти решение игры аналитическим методом

Решение:

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\begin{array}{cc} & \min \\ A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \\ \max \quad 7 \quad 8 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \alpha = 4 \\ \beta = 7 \end{array}$$

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\beta = \min_j \max_i \beta_j$$

α < β, при этом цена игры V ϵ [4;7]

Игра не имеет седловой точки, следовательно, не решается в чистых стратегиях

- Обозначим: $p_1=p$, то $p_2=1-p$
- $q_1=1$, то $q_2=1-q$

$$\begin{array}{rl} A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{1-p} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{q} & \mathbf{1-q} \end{matrix} & \end{array}$$

$$\begin{cases} 3p+7(1-p)=V \\ 8p+4(1-p)=V \end{cases} \qquad \begin{cases} 3q+8(1-q)=V \\ 7q+4(1-q)=V \end{cases}$$

- Решим системы уравнений:

$$\begin{cases} 3p+7(1-p)=V \\ 8p+4(1-p)=V \end{cases}$$

3p+7-7p=8p+4-4p

-4p+7=4p+4

8p=3

p1=3/8

p2=1-3/8=5/8

(3/8;5/8) – вектор вероятности

V=3*3/8+7*5/8=5,5 – среднее значение выигрыша А

$$\begin{cases} 3q+8(1-q)=V \\ 7q+4(1-q)=V \end{cases}$$

3q+8-8q=7q+4-4q

-5q+8=3q+4

q1=1/2, q2=1/2;

(1/2;1/2)

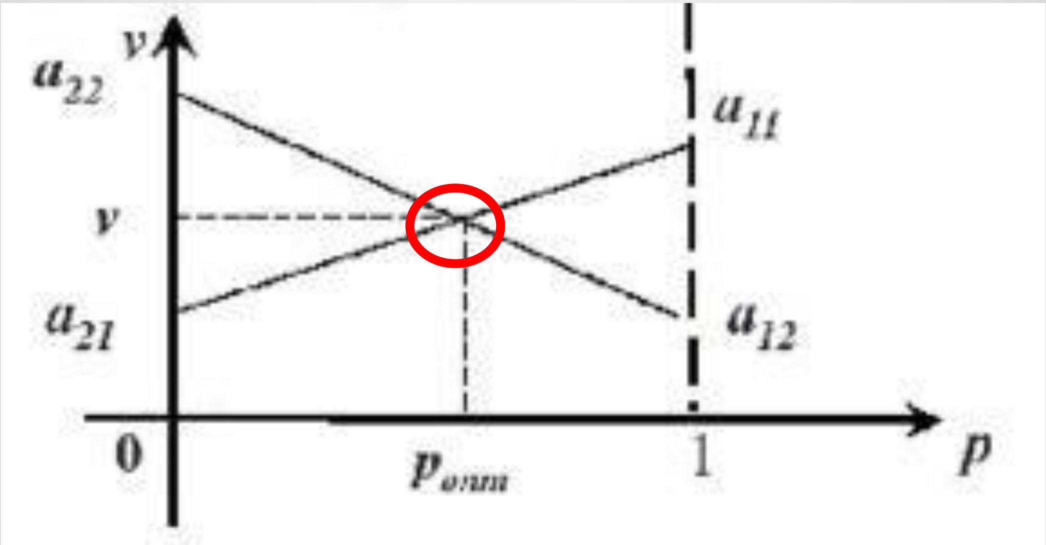
V=3*1/2+8*1/2=5,5

ОТВЕТ: оптимальная смешанная стратегия игрока А – *Sa=(0,375;0,625)*, игрока В – *Sb=(0,5;0,5)*

Графический метод решения 2х2

1. Найдем оптимальную стратегию для первого игрока (А):

а) построим систему координат:



б) по оси абсцисс откладывается вероятность $p_1 \in [0,1]$, равная 1.

в) по оси ординат – выигрыши игрока А при стратегии A_2, а на прямой p = 1 – выигрыши при стратегии A_1

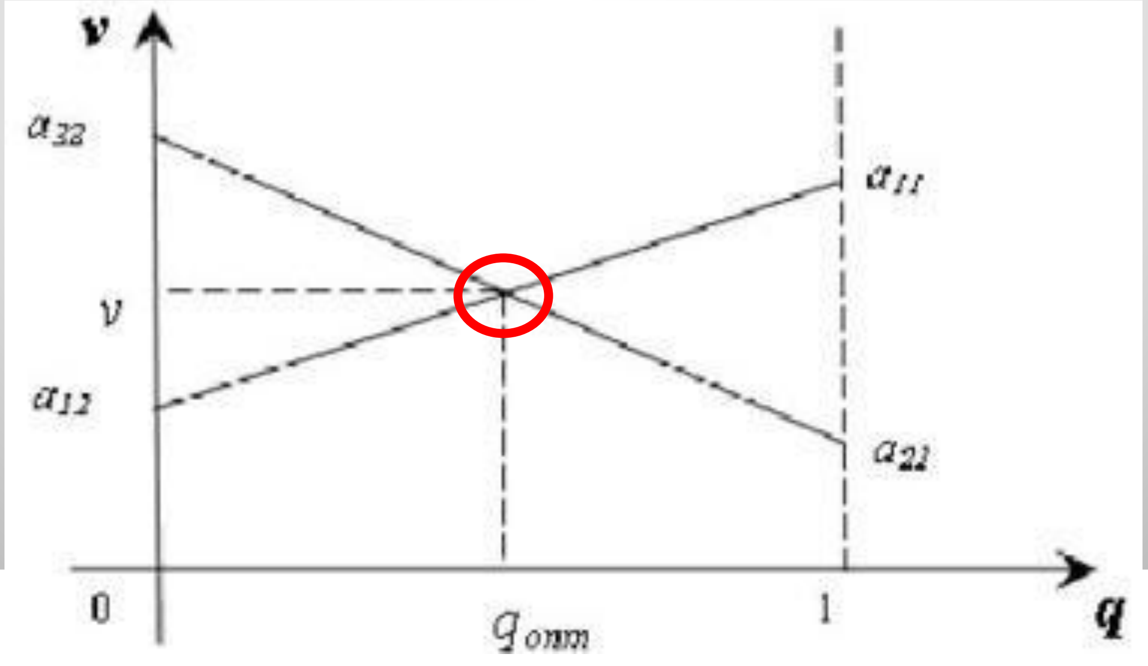
г) находим точку пересечения прямых, которая и дает оптимальное решение матричной игры игрока А ($p_{опт}$,v)

2. <u>Найдем оптимальную стратегию для второго игрока В:</u>

а) по оси абсцисс откладывается вероятность $q_1 \in [0,1]$, равная 1.

в) по оси ординат – выигрыши игрока В при стратегии B_2, а на прямой q = 1 – выигрыши при стратегии B_1

г) находим точку пересечения прямых, которая и дает оптимальное решение матричной игры игрока В ($q_{опт}$,v)



Пример.

Матричная игра 2х2 задана следующей матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Найти решение игры графическим методом

Решение:

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$\alpha = 4,\ \beta = 7,$

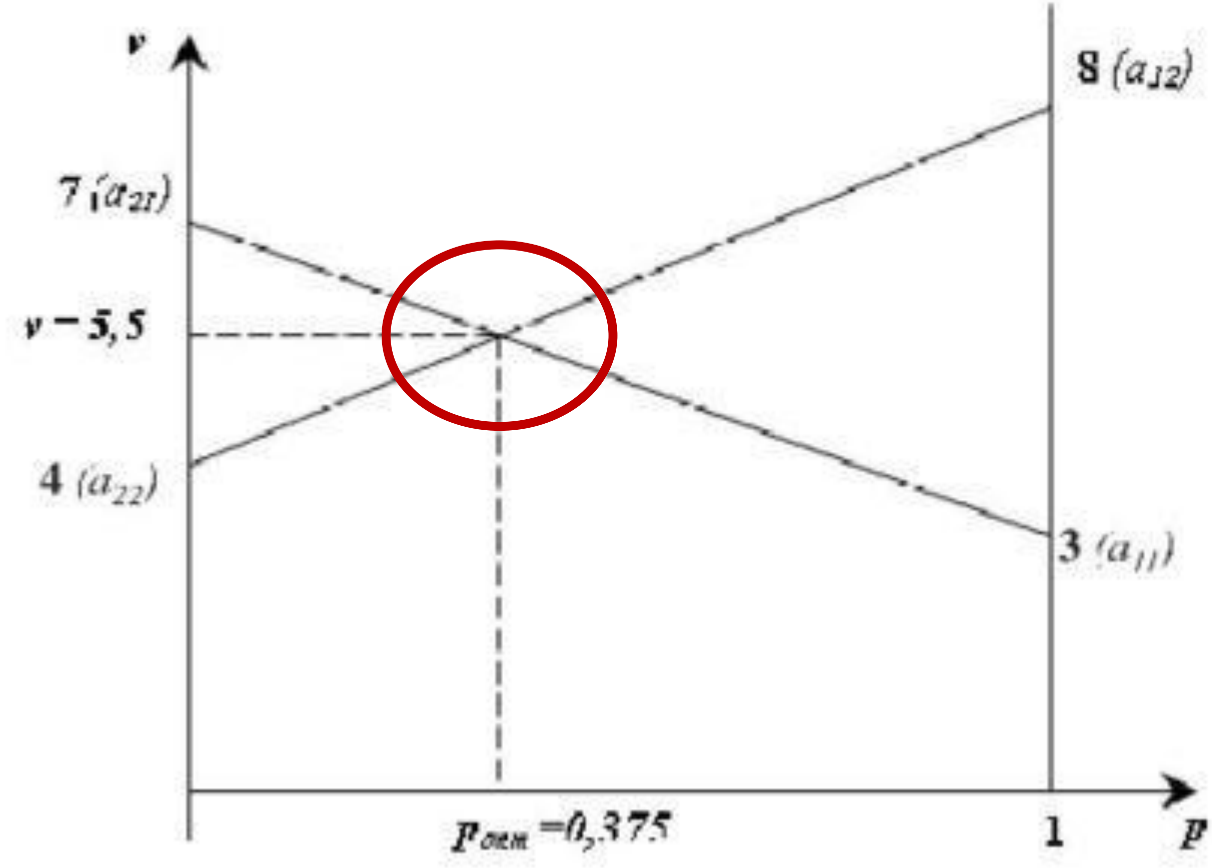
при этом цена игры $v \in [4,7]$

$\alpha < \beta$ – игра не имеет седловой точки,

и поэтому имеет решение

в смешанных стратегиях.

Для q построим график самостоятельно



2. Решение задач в смешанных стратегиях размерностью 2xn

Любая конечная игра mxn имеет решение, в котором число активных стратегий каждого игрока не превосходит *L*, где *L* = *min (m, n)*

У игры 2xn или mx2 всегда имеется решение, содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков (min (2, n) = min (m, 2) = 2)

Пусть платежная матрица игры имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

Согласно теореме об активных стратегиях, решение находится из уравнения:

$$\boxed{v = \min_j (a_{1j} p_{опт} + a_{2j}(1 - p_{опт})) = \max_{0 \le p \le 1} \min_j (a_{1j} p + a_{2j}(1 - p)),\ j = \overline{1, n}}$$

Найти максимум (по *p*) функции

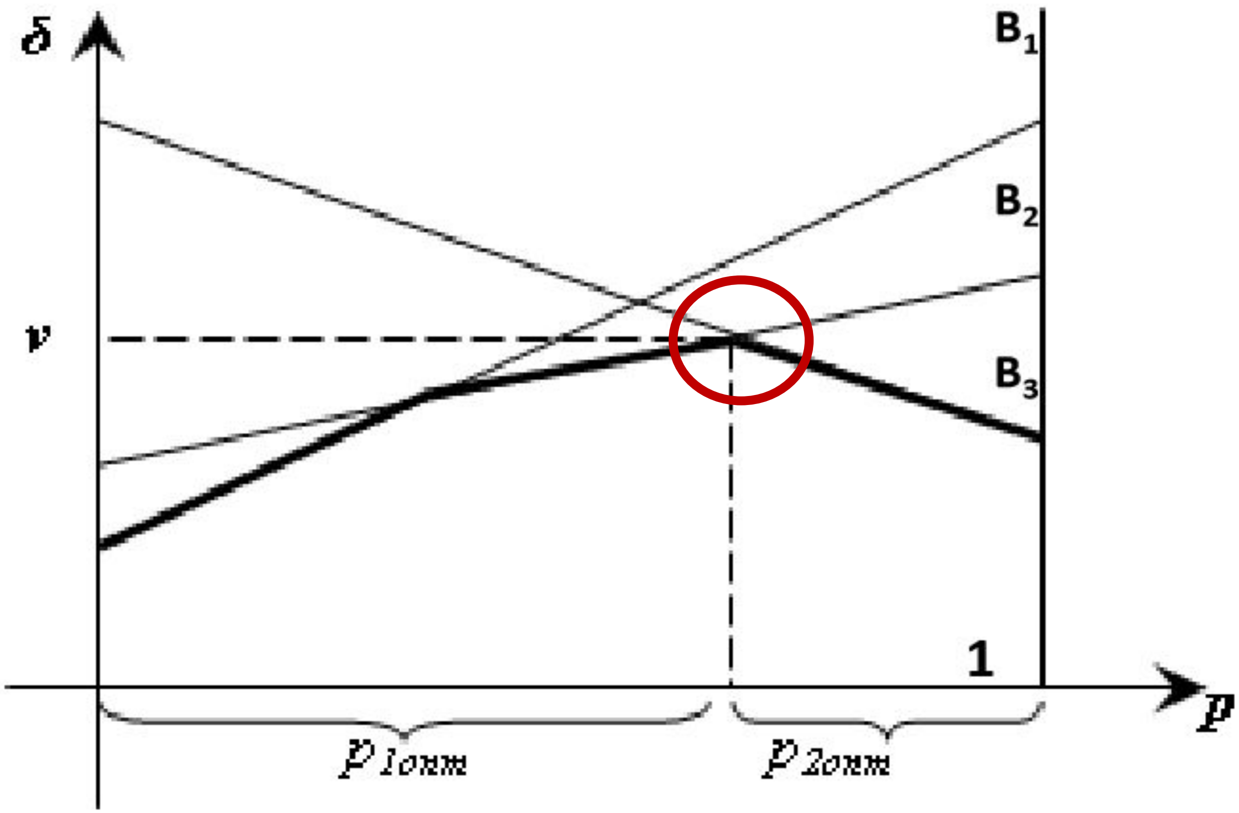
$$\boxed{\min_j (a_{1j} p + a_{2j}(1 - p))}$$

Для этого необходимо построить *n* прямых вида

$$\boxed{\delta_j = a_{1j} p + a_{2j}(1 - p)}$$

на плоскости (*p, δ*), *p*∈[0, 1] и путём визуального сравнения выбрать ломаную, огибающую их снизу

ГРАФИК



ПРИМЕР:

Матричная игра *2xn* задана следующей матрицей

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

<u>Найти</u> **решение игры графическим и аналитическим методом**

,

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\boxed{\alpha = \max_i \min_j a_{ij}} \qquad \boxed{\beta = \min_j \max_i \beta_j}$$

Вычисляя, получим:

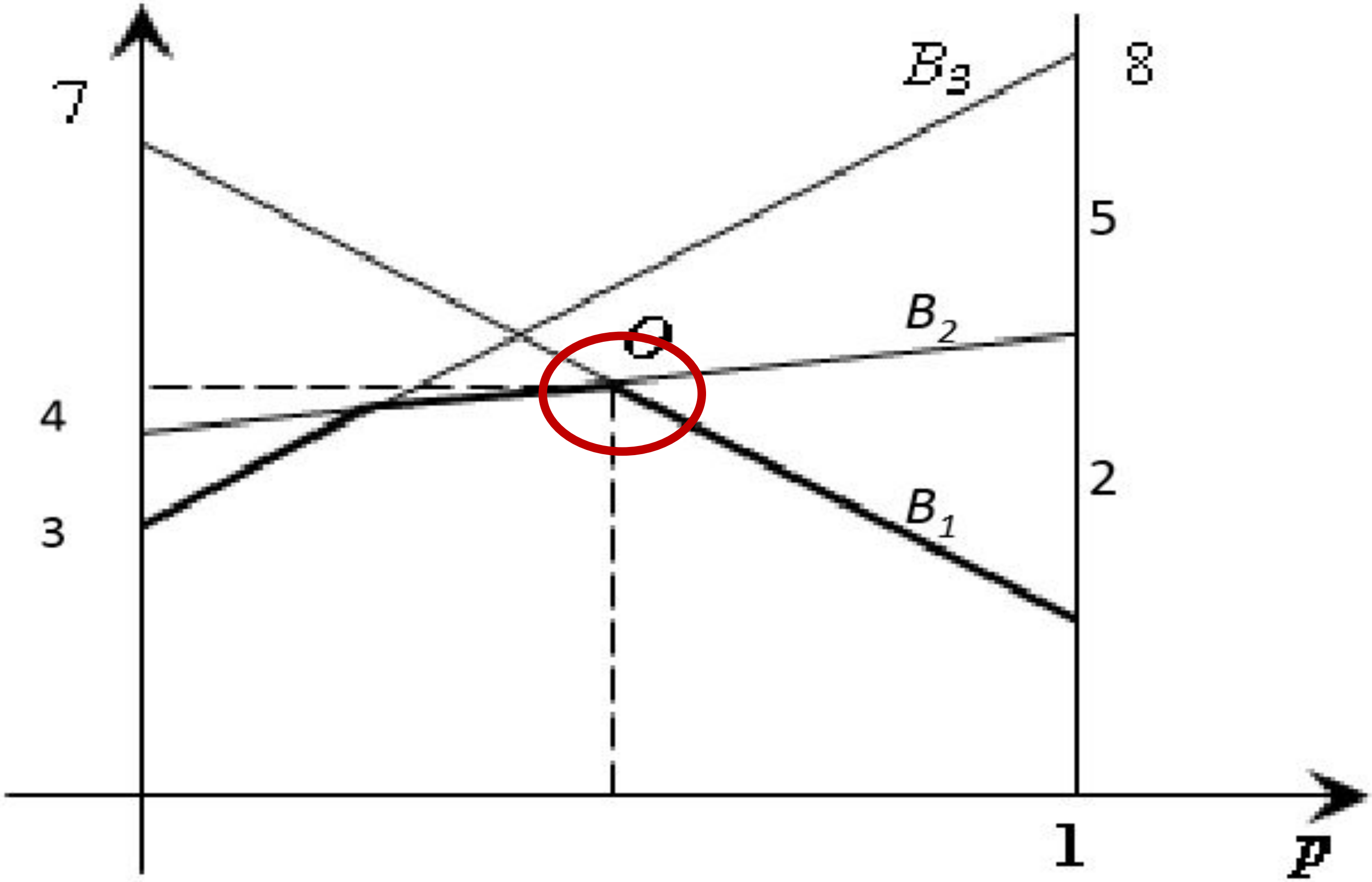
α = max **(2, 3) = 3**

в = min **(7, 5, 8) = 5**

Цена игры ***v*** **$\in$[3, 5].**

Так как *α* < *в*, то игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.

Строим графическое изображение игры



Находим точку оптимума – *O*. В этой точке пересекаются стратегии B_1 и B_2 игрока B. Таким образом, исключая стратегию B_3, получаем матричную игру 2x2 с платежной матрицей вида

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$

- Используя алгебраический метод решения этой игры, получаем:

$$p_1 = \frac{4-7}{2+4-7-5} = 0,5 \qquad p_2 = 1 - p_1 = 0,5$$

$$q_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}} = \frac{4,5-5}{2-5} = 0,17 \qquad q_2 = 1 - q_1 = 0,83$$

$$v = \frac{2 \cdot 4 - 7 \cdot 5}{2+4-7-5} = 4,5$$

ОТВЕТ: оптимальные смешанные стратегии игроков: Sa = (0,5; 0,5); Sb = (0,17; 0,83)
при цене игры v = 4,5

Решение **игры mx2** осуществляется аналогично. Но в этом случае строится графическое изображение игры для <u>игрока В</u> и выделяется не нижняя, а **верхняя граница выигрыша**, и на ней находятся точка оптимума с <u>наименьшей ординатой</u> (минимакс).

ПРИМЕР:

Матричная игра *mx2* задана следующей матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2{,}5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Найти **решение игры графическим и аналитическим методом**

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\boxed{\alpha = \max_i \min_j a_{ij}} \qquad \boxed{\beta = \min_j \max_i \beta_j}$$

Вычисляя, получим:

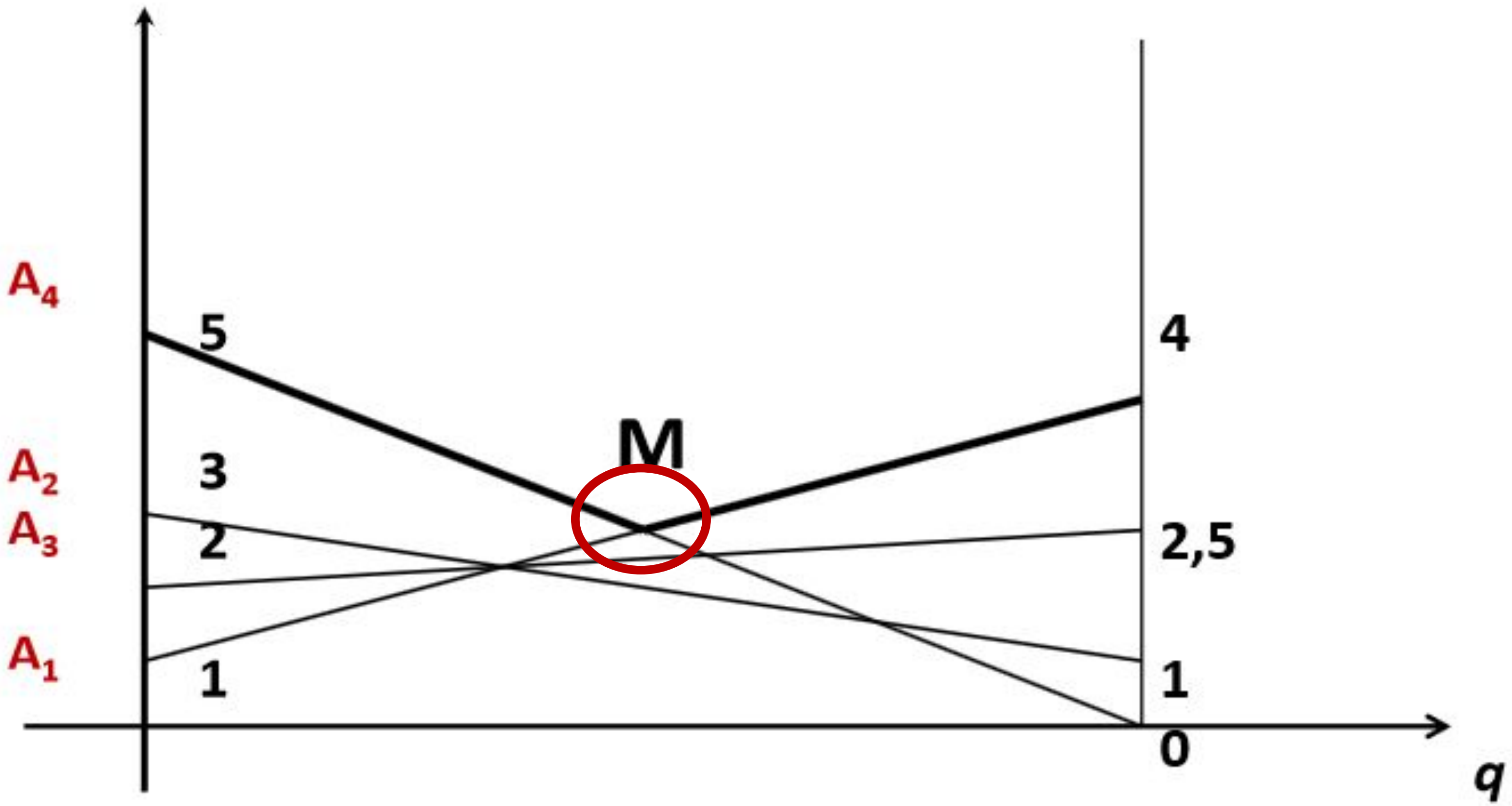
$\alpha = max$ (1; 1; 2; 0) = 2

$в = min$ (5; 4) = 4

Цена игры $v \in [2, 4]$.

Так как $\alpha < в$, то игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.

ГРАФИК



$p1 = 0,625$ $p2 = 0,375$

$q1 = 0,5$ $q2 = 0,5$

$v = 2,5$

ОТВЕТ: оптимальные смешанные стратегии игроков: Sa = (0,625; 0,375); Sb = (0,5; 0,5) при цене игры v = 2,5

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!