

# ТЕОРИЯ ИГР

## Решение задач в смешанных стратегиях



Шельганова Ольга Ильинична  
Руководитель: д.э.н. Потехина Елена Витальевна

# ПЛАН ЛЕКЦИИ

- 1) Решение задач в смешанных стратегиях размерностью  $2 \times 2$ ;
- 2) Решение задач в смешанных стратегиях размерностью  $2 \times n$  и  $m \times 2$ .

**ТЕОРИЯ ИГР** – это раздел математики, изучающий математические модели принятия решений в конфликтных ситуациях.

**ИГРА** – это упрощенная математическая модель конфликтной ситуации, сторонами которой являются **ИГРОКИ**



Пусть в игре участвуют два игрока А и В

$$\left. \begin{array}{l} \text{Выигрыш игрока А} - a_{ij} \\ \text{Выигрыш игрока В} - b_j \end{array} \right\} \boxed{a_{ij} = -b_j}$$



~~Задача игрока А~~ — максимизировать свой выигрыш

~~Задача игрока В~~ — минимизировать свой проигрыш

Игру можно представить в виде матрицы

**Столбцы – стратегии игрока В**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Строки –  
стратегии  
игрока А**

Матрица называется **ПЛАТЕЖНОЙ**  
**МАТРИЦЕЙ**, где элементы этой матрицы  
это выигрыши игрока А.

- Выигрыш зависит от **СТРАТЕГИИ**, последовательности действий игрока в конкретной ситуации.

**ОПТИМАЛЬНАЯ  
СТРАТЕГИЯ  
ИГРОКА**

**МАКСИМАЛЬНЫЙ  
ВЫИГРЫШ**



## РЕШИМ ЗАДАЧУ:

Два игрока, не глядя друг на друга, кладут на стол по картонному кружку красного (К), зеленого (З) или синего (с) цветов.

Сравнивают цвета и расплачиваются друг с другом так как показано в матрице игры.

Считая, что игра повторяется многократно, определить оптимальные стратегии каждого игрока.

|           | <b>Вк</b> | <b>Вз</b> | <b>Вс</b> |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <b>Ак</b> | -2        | 2         | -1        |
| <b>Аз</b> | 2         | 1         | 1         |
| <b>Ас</b> | 3         | -3        | 1         |

- **Принцип МАКСИМИНА** – выбрать ту стратегию, чтобы при наихудшем поведении противника получить максимальный выигрыш.

|           | <b>Вк</b> | <b>Вз</b> | <b>Вс</b> |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <b>Ак</b> | -2        | 2         | -1        |
| <b>Аз</b> | 2         | 1         | <b>1</b>  |
| <b>Ас</b> | 3         | -3        | 1         |

**3      2      1**

Мах выигрыша А

Мин проигрыша В

**(Аз;Вс) – пара  
оптим. стратегий**

Мин выигрыша А

**-2**  
**1**  
**-3**       $\alpha = \beta = \nu = 1$  –  
седловая точка

$$\alpha = \max\{-2; 1; -3\} = 1$$

- нижняя цена игры

$$\beta = \min\{3; 2; 1\} = 1$$

- верхняя цена игры



## СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

Если в игре *нет седловой точки*, то можно найти нижнюю и верхнюю цены игры, которые указывают, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры.

Поиск такого решения приводит к необходимости применять смешанные стратегии, то есть чередовать чистые стратегии с какими-то частотами.

1) **Теорема и максимине.** В конечной игре двух игроков (коалиций) с нулевой суммой (матричной игре) при  $a \neq b$  имеет место равенство:

$$V_A = V_B$$



*Теорема о максимине указывает на существование равновесия для случая  $V_A = V_B$  при  $a \neq b$ , и, следовательно, существования оптимальных смешанных стратегий.*

## 2) Основная теорема матричных игр.

Любая матричная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, в общем случае, в смешанных стратегиях и соответствующую цену  $V$ .



Цена игры  $V$  – средний выигрыш, приходящийся на одну партию, - всегда удовлетворяет условию:

$$\alpha \leq v \leq \beta,$$

т.е. лежит между нижней  $\alpha$  и верхней  $\beta$  ценами игры.

Те из чистых стратегий игроков А и В, которые входят в их оптимальные смешанные стратегии с вероятностями, не равными нулю, называются ***активными стратегиями***.



# 1. Решение задач в смешанных стратегиях размерностью $2 \times 2$



**Аналитический  
метод**

**Графический  
метод**

## Аналитический метод решения игры 2x2

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{matrix}$$

$\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2$

1) Оптимальное решение в смешанных стратегиях:

$$S_A = | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | \text{ и } S_B = | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 |$$

2) Вероятности применения (относительные частоты применения) чистых стратегий удовлетворяют соотношениям:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 1$$

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = 1$$

1) Если игрок А использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок В – свою чистую активную стратегию В1, то цена игры  $V$  равна:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v$$

2) Если игрок А использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок В – свою чистую активную стратегию В2, то цена игры  $V$  равна:

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

## ЗАДАНИЕ:

Найти, чему равны  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $v$ , если:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v$$



Получаем решение матричной игры:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

Вычислив оптимальное значение  $V$ ,  
можно вычислить и оптимальную  
смешанную стратегию второго игрока из  
условия:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v \quad \text{и} \quad a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{a_{11} - v}{a_{11} - a_{12}}$$

## Пример

Платежная матрица имеет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

*Найти* решение игры аналитическим методом

## Решение:

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \min \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \alpha = 4 \\ \beta = 7 \end{matrix}$$

*max* 7 8

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$
$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

$\alpha < \beta$ , при этом цена игры  $V \in [4; 7]$

*Игра не имеет седловой точки, следовательно, не решается в чистых стратегиях*

- Обозначим:  $p_1=p$ , то  $p_2=1-p$
- $q_1=1$ , то  $q_2=1-q$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{1-p} \end{matrix}$$



$$\begin{cases} 3p+7(1-p)=V \\ 8p+4(1-p)=V \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3q+8(1-q)=V \\ 7q+4(1-q)=V \end{cases}$$

● Решим системы уравнений:

$$\begin{cases} 3p+7(1-p)=V \\ 8p+4(1-p)=V \end{cases}$$

$$3p+7-7p=8p+4-4p$$

$$-4p+7=4p+4$$

$$8p=3$$

$$p_1=3/8$$

$$p_2=1-3/8=5/8$$

$(3/8; 5/8)$  – вектор

вероятности

$$V=3*3/8+7*5/8=5,5$$

– среднее значение

выигрыша А

$$\begin{cases} 3q+8(1-q)=V \\ 7q+4(1-q)=V \end{cases}$$

$$3q+8-8q=7q+4-4q$$

$$-5q+8=3q+4$$

$$q_1=1/2, q_2=1/2;$$

$$(1/2; 1/2)$$

$$V=3*1/2+8*1/2=5,5$$

**ОТВЕТ:** оптимальная смешанная стратегия игрока

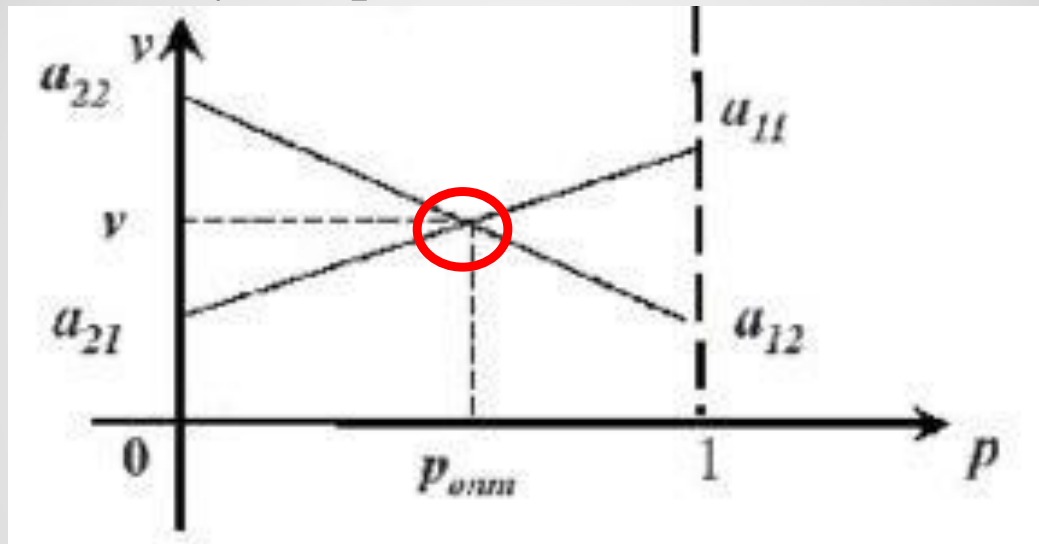
А –  $Sa=(0,375; 0,625)$ ,

игрока В –  $Sb=(0,5; 0,5)$

## Графический метод решения 2x2

1. Найдем оптимальную стратегию для первого игрока (А):

а) построим систему координат:



б) по оси абсцисс откладывается вероятность  $p_1 \in [0,1]$ , равная 1.

в) по оси ординат – выигрыши игрока А при стратегии  $A_2$ , а на прямой  $p = 1$  – выигрыши при стратегии  $A_1$

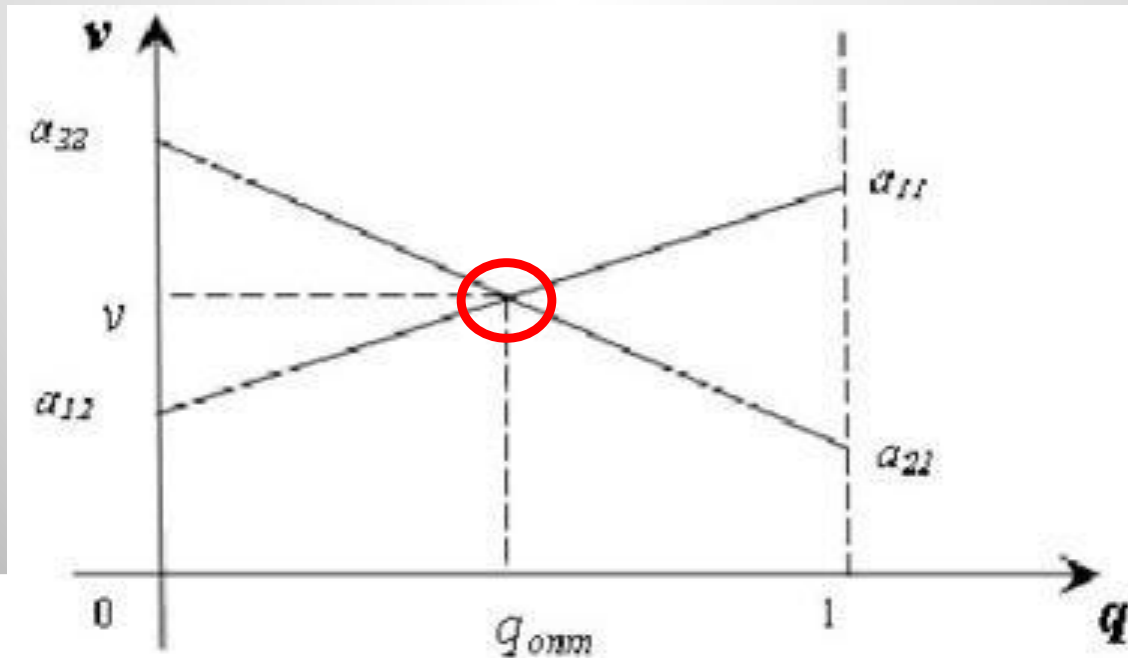
г) находим точку пересечения прямых, которая и дает оптимальное решение матричной игры игрока А  $(p_{\text{опт}}, v)$

2. Найдем оптимальную стратегию для второго игрока В:

а) по оси абсцисс откладывается вероятность  $q_1 \in [0,1]$ , равная 1.

в) по оси ординат – выигрыши игрока В при стратегии  $B_2$ , а на прямой  $q = 1$  – выигрыши при стратегии  $B_1$

г) находим точку пересечения прямых, которая и дает оптимальное решение матричной игры игрока В ( $q_{\text{опт}}, v$ )





**Пример.**

Матричная игра 2x2 задана следующей матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

***Найти*** решение игры графическим методом

## Решение:

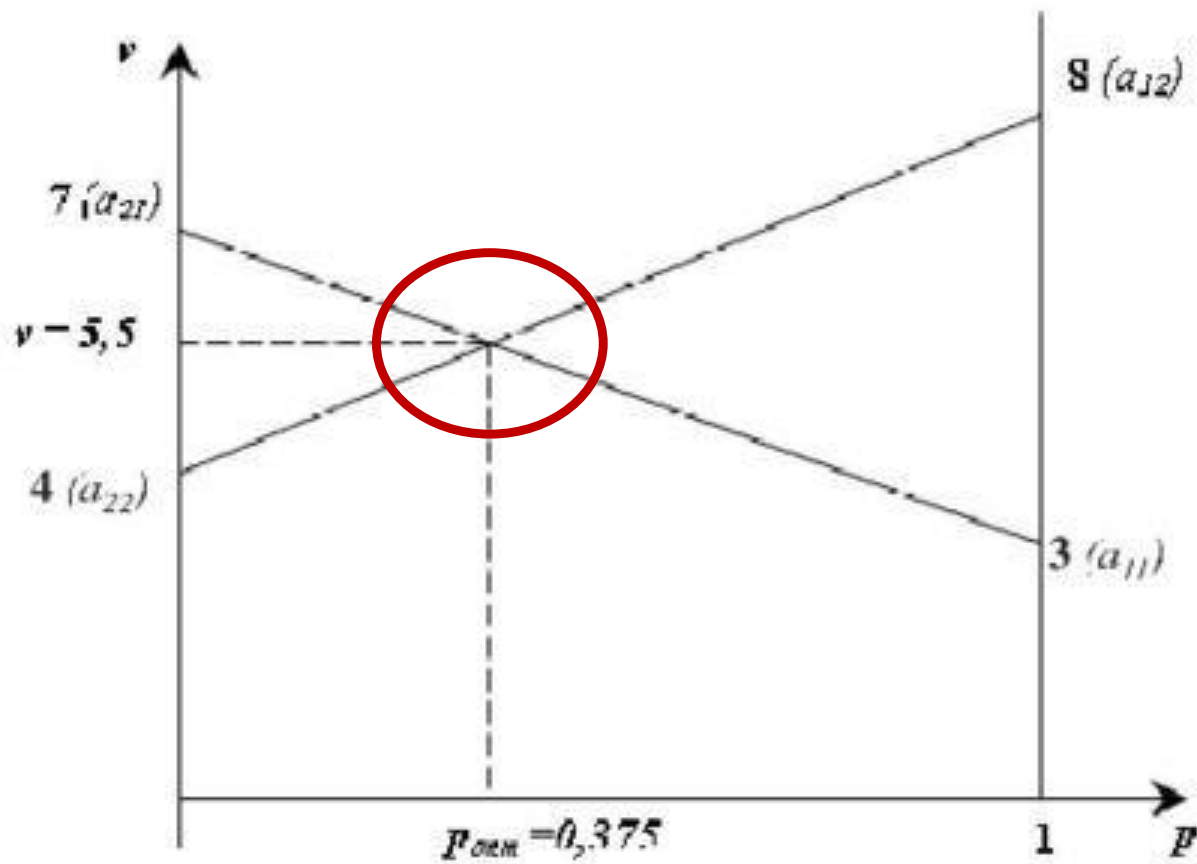
Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\alpha = 4, \beta = 7,$$

при этом цена игры  $v \in [4, 7]$

$\alpha < \beta$  – игра не имеет седловой точки,  
и поэтому имеет решение  
в смешанных стратегиях.

Для  $q$  построим график самостоятельно



## 2. Решение задач в смешанных стратегиях размерностью $2 \times n$

Любая конечная игра  $m \times n$  имеет решение, в котором число активных стратегий каждого игрока не превосходит  $L$ , где  $L = \min(m, n)$



У игры  $2 \times n$  или  $m \times 2$  всегда имеется решение, содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков ( $\min(2, n) = \min(m, 2) = 2$ )

Пусть платежная матрица игры имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

Согласно теореме об активных стратегиях, решение находится из уравнения:

$$v = \min_j (a_{1j} p_{opt} + a_{2j} (1 - p_{opt})) = \max_{0 \leq p \leq 1} \min_j (a_{1j} p + a_{2j} (1 - p)), j = \overline{1, n}$$

Найти максимум (по  $p$ ) функции

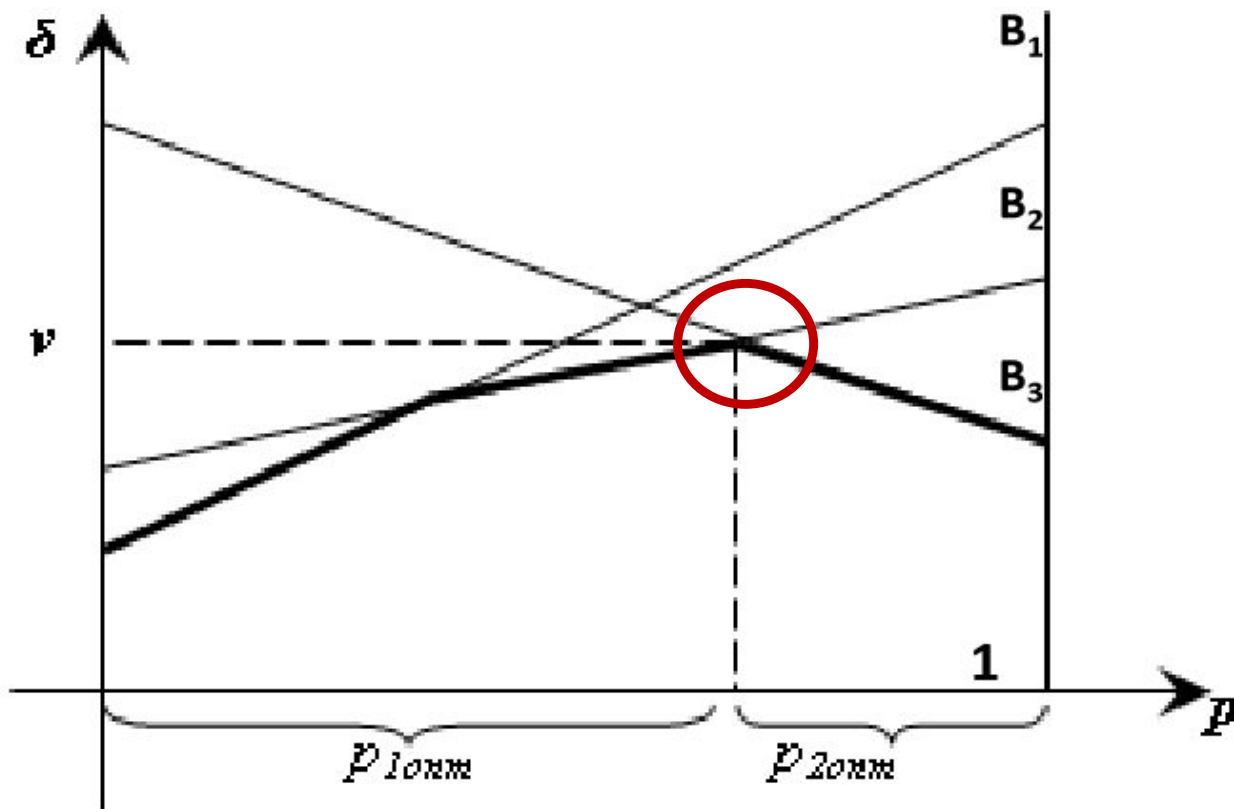
$$\min_j (a_{1j}p + a_{2j}(1-p))$$

Для этого необходимо построить  $n$  прямых вида

$$\delta_j = a_{1j}p + a_{2j}(1-p)$$

на плоскости  $(p, \delta)$ ,  $p \in [0, 1]$  и путём визуального сравнения  
выбрать ломаную, огибающую их снизу

# ГРАФИК



## ПРИМЕР:

Матричная игра  $2 \times n$  задана следующей матрицей

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Найти решение игры графическим и аналитическим методом



Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\beta = \min_j \max_i \beta_j$$

Вычисляя, получим:

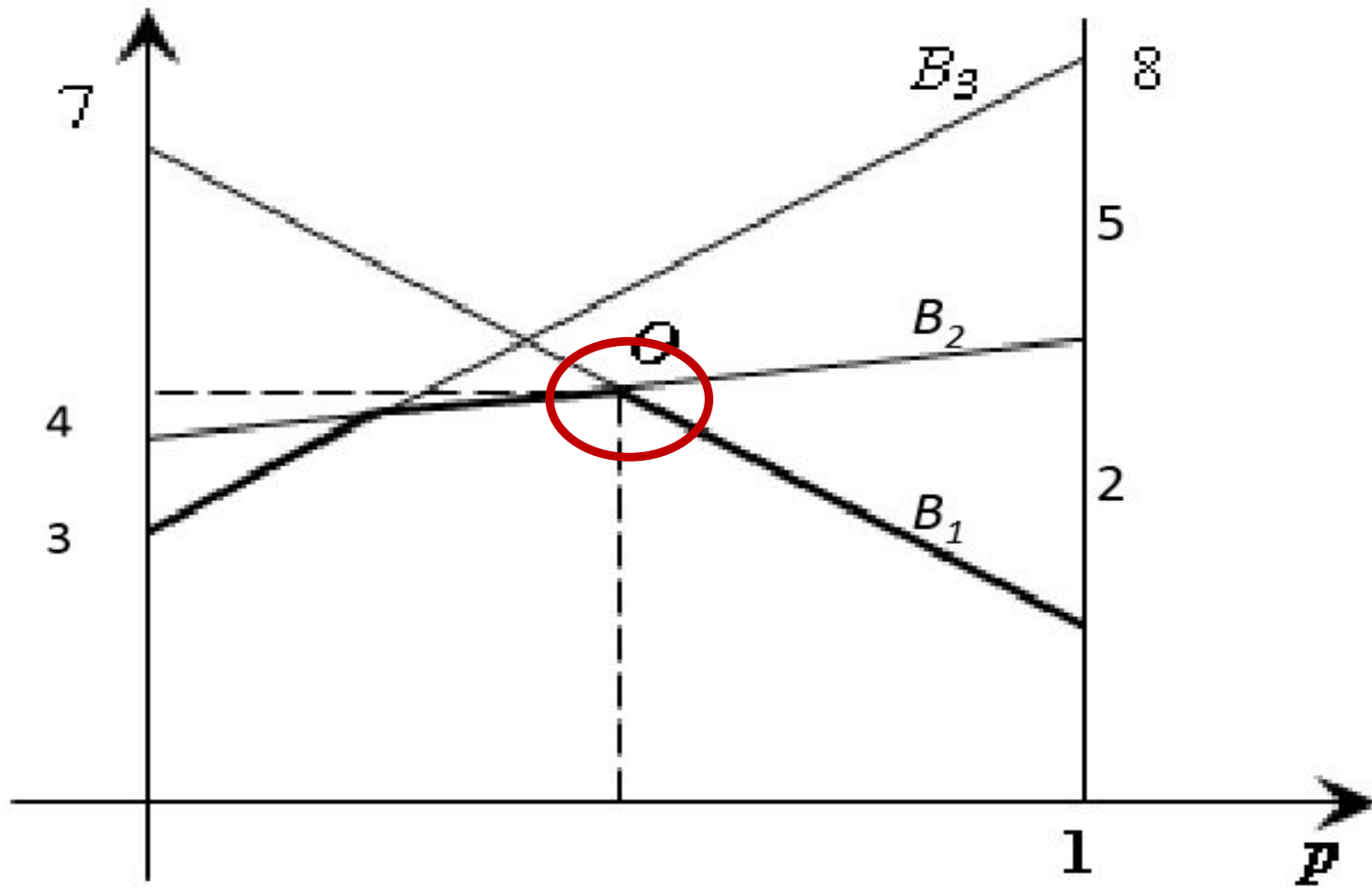
$$\alpha = \max (2, 3) = 3$$

$$\beta = \min (7, 5, 8) = 5$$

Цена игры  $v \in [3, 5]$ .

Так как  $\alpha < \beta$ , то игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.

# Строим графическое изображение игры



Находим точку оптимума –  $O$ . В этой точке пересекаются стратегии  $V_1$  и  $V_2$  игрока  $B$ . Таким образом, исключая стратегию  $V_3$ , получаем матричную игру  $2 \times 2$  с платежной матрицей вида

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$

- Используя алгебраический метод решения этой игры, получаем:

$$p_1 = \frac{4-7}{2+4-7-5} = 0,5 \quad p_2 = 1 - p_1 = 0,5$$

$$q_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}} = \frac{4,5 - 5}{2 - 5} = 0,17 \quad q_2 = 1 - q_1 = 0,83$$

$$v = \frac{2 \cdot 4 - 7 \cdot 5}{2 + 4 - 7 - 5} = 4,5$$

**ОТВЕТ:** оптимальные смешанные стратегии игроков:  $S_a = (0,5; 0,5)$ ;  $S_b = (0,17; 0,83)$   
при цене игры  $v = 4,5$

Решение игры  $mx2$  осуществляется аналогично. Но в этом случае строится графическое изображение игры для игрока В и выделяется не нижняя, а **верхняя граница выигрыша**, и на ней находятся точка оптимума с наименьшей ординатой (минимакс).

## ПРИМЕР:

Матричная игра  $m \times 2$  задана следующей матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2,5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Найти решение игры графическим и аналитическим методом

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\beta = \min_j \max_i \beta_j$$

Вычисляя, получим:

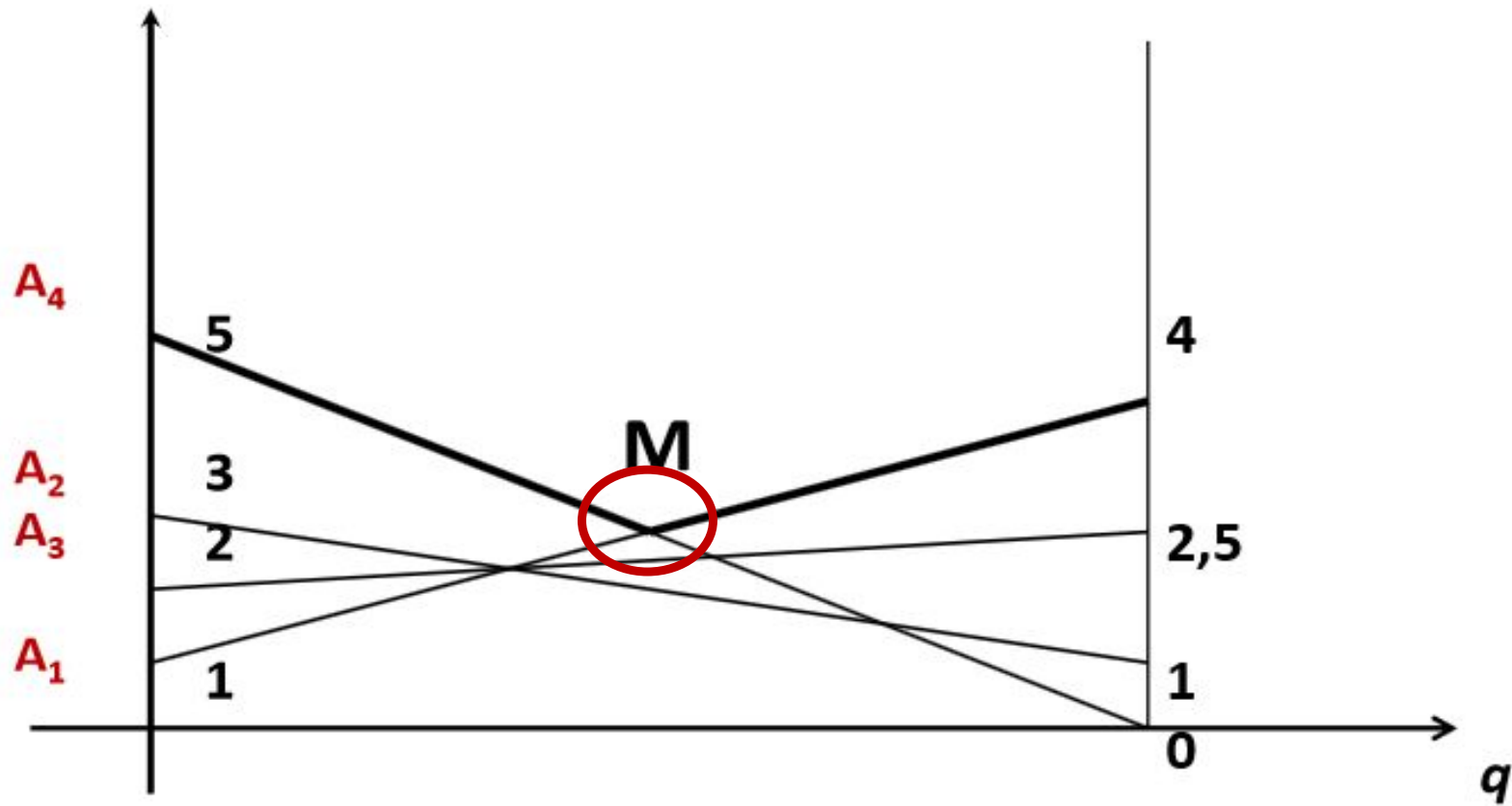
$$\alpha = \max (1; 1; 2; 0) = 2$$

$$\beta = \min (5; 4) = 4$$

Цена игры  $v \in [2, 4]$ .

Так как  $\alpha < \beta$ , то игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.

# ГРАФИК





$$p_1 = 0,625$$

$$p_2 = 0,375$$

$$q_1 = 0,5$$

$$q_2 = 0,5$$

$$v = 2,5$$

**ОТВЕТ:** оптимальные смешанные стратегии игроков:  $S_a = (0,625; 0,375)$ ;  $S_b = (0,5; 0,5)$   
при цене игры  $v = 2,5$

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**

