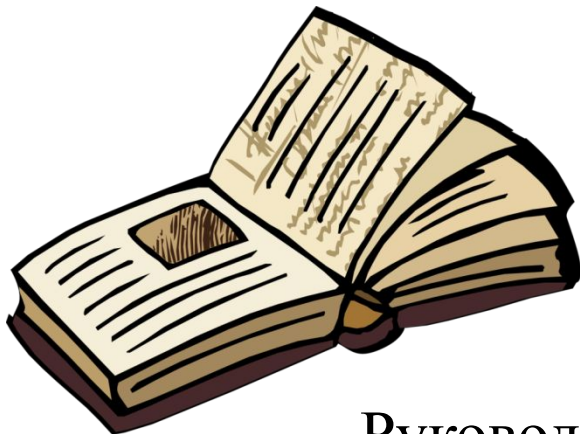


ТЕОРИЯ ИГР

Решение задач в смешанных стратегиях



Шельганова Ольга Ильинична
Руководитель: д.э.н. Потехина Елена Витальевна

ПЛАН ЛЕКЦИИ

- 1) Решение задач в смешанных стратегиях размерностью 2×2 ;
- 2) Решение задач в смешанных стратегиях размерностью $2 \times n$ и $m \times 2$.

ТЕОРИЯ ИГР – это раздел математики, изучающий математические модели принятия решений в конфликтных ситуациях.

ИГРА – это упрощенная математическая модель конфликтной ситуации, сторонами которой являются **ИГРОКИ**



Пусть в игре участвуют два игрока А и В

$$\left. \begin{array}{l} \text{Выигрыш игрока А} - a_{ij} \\ \text{Выигрыш игрока В} - b_j \end{array} \right\} \boxed{a_{ij} = -b_j}$$



~~Задача игрока А~~ — максимизировать свой выигрыш

~~Задача игрока В~~ — минимизировать свой проигрыш

Игру можно представить в виде матрицы

Столбцы – стратегии игрока В

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Строки –
стратегии
игрока А**

Матрица называется **ПЛАТЕЖНОЙ**
МАТРИЦЕЙ, где элементы этой матрицы
это выигрыши игрока А.

- Выигрыш зависит от **СТРАТЕГИИ**, последовательности действий игрока в конкретной ситуации.

**ОПТИМАЛЬНАЯ
СТРАТЕГИЯ
ИГРОКА**

**МАКСИМАЛЬНЫЙ
ВЫИГРЫШ**



РЕШИМ ЗАДАЧУ:

Два игрока, не глядя друг на друга, кладут на стол по картонному кружку красного (К), зеленого (З) или синего (с) цветов.

Сравнивают цвета и расплачиваются друг с другом так как показано в матрице игры.

Считая, что игра повторяется многократно, определить оптимальные стратегии каждого игрока.

	Вк	Вз	Вс
Ак	-2	2	-1
Аз	2	1	1
Ас	3	-3	1

- **Принцип МАКСИМИНА** – выбрать ту стратегию, чтобы при наихудшем поведении противника получить максимальный выигрыш.

	Вк	Вз	Вс
Ак	-2	2	-1
Аз	2	1	1
Ас	3	-3	1

3 2 1

Мах выигрыша А

Мин проигрыша В

**(Аз;Вс) – пара
оптим. стратегий**

Мин выигрыша А

-2
1
-3 $\alpha = \beta = \nu = 1$ –
седловая точка

$$\alpha = \max\{-2; 1; -3\} = 1$$

- нижняя цена игры

$$\beta = \min\{3; 2; 1\} = 1$$

- верхняя цена игры

СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

Если в игре *нет седловой точки*, то можно найти нижнюю и верхнюю цены игры, которые указывают, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры.

Поиск такого решения приводит к необходимости применять смешанные стратегии, то есть чередовать чистые стратегии с какими-то частотами.

1) **Теорема и максимине.** В конечной игре двух игроков (коалиций) с нулевой суммой (матричной игре) при $a \neq b$ имеет место равенство:

$$V_A = V_B$$



Теорема о максимине указывает на существование равновесия для случая $V_A = V_B$ при $a \neq b$, и, следовательно, существования оптимальных смешанных стратегий.

2) Основная теорема матричных игр.

Любая матричная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, в общем случае, в смешанных стратегиях и соответствующую цену V .



Цена игры V – средний выигрыш, приходящийся на одну партию, - всегда удовлетворяет условию:

$$\alpha \leq v \leq \beta,$$

т.е. лежит между нижней α и верхней β ценами игры.

Те из чистых стратегий игроков А и В, которые входят в их оптимальные смешанные стратегии с вероятностями, не равными нулю, называются ***активными стратегиями***.



1. Решение задач в смешанных стратегиях размерностью 2×2



**Аналитический
метод**

**Графический
метод**

Аналитический метод решения игры 2x2

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{matrix}$$

$\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2$

1) Оптимальное решение в смешанных стратегиях:

$$S_A = | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | \text{ и } S_B = | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 |$$

2) Вероятности применения (относительные частоты применения) чистых стратегий удовлетворяют соотношениям:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 1$$

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = 1$$

1) Если игрок А использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок В – свою чистую активную стратегию В1, то цена игры V равна:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v$$

2) Если игрок А использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок В – свою чистую активную стратегию В2, то цена игры V равна:

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ЗАДАНИЕ:

Найти, чему равны p_1 , p_2 , v , если:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v$$

Получаем решение матричной игры:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

Вычислив оптимальное значение V ,
можно вычислить и оптимальную
смешанную стратегию второго игрока из
условия:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v \quad \text{и} \quad a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{a_{11} - v}{a_{11} - a_{12}}$$

Пример

Платежная матрица имеет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Найти решение игры аналитическим методом

Решение:

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{min} \\ 3 \\ 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 4 \\ \beta = 7 \end{array}$$

max 7 8

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

$\alpha < \beta$, при этом цена игры $V \in [4; 7]$

Игра не имеет седловой точки, следовательно, не решается в чистых стратегиях

- Обозначим: $p_1=p$, то $p_2=1-p$
- $q_1=1$, то $q_2=1-q$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{1-p} \end{matrix}$$



$$\begin{cases} 3p+7(1-p)=V \\ 8p+4(1-p)=V \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3q+8(1-q)=V \\ 7q+4(1-q)=V \end{cases}$$

● Решим системы уравнений:

$$\begin{cases} 3p+7(1-p)=V \\ 8p+4(1-p)=V \end{cases}$$

$$3p+7-7p=8p+4-4p$$

$$-4p+7=4p+4$$

$$8p=3$$

$$p_1=3/8$$

$$p_2=1-3/8=5/8$$

$(3/8; 5/8)$ – вектор

вероятности

$$V=3*3/8+7*5/8=5,5$$

– среднее значение

выигрыша А

$$\begin{cases} 3q+8(1-q)=V \\ 7q+4(1-q)=V \end{cases}$$

$$3q+8-8q=7q+4-4q$$

$$-5q+8=3q+4$$

$$q_1=1/2, q_2=1/2;$$

$$(1/2; 1/2)$$

$$V=3*1/2+8*1/2=5,5$$

ОТВЕТ: оптимальная смешанная стратегия игрока

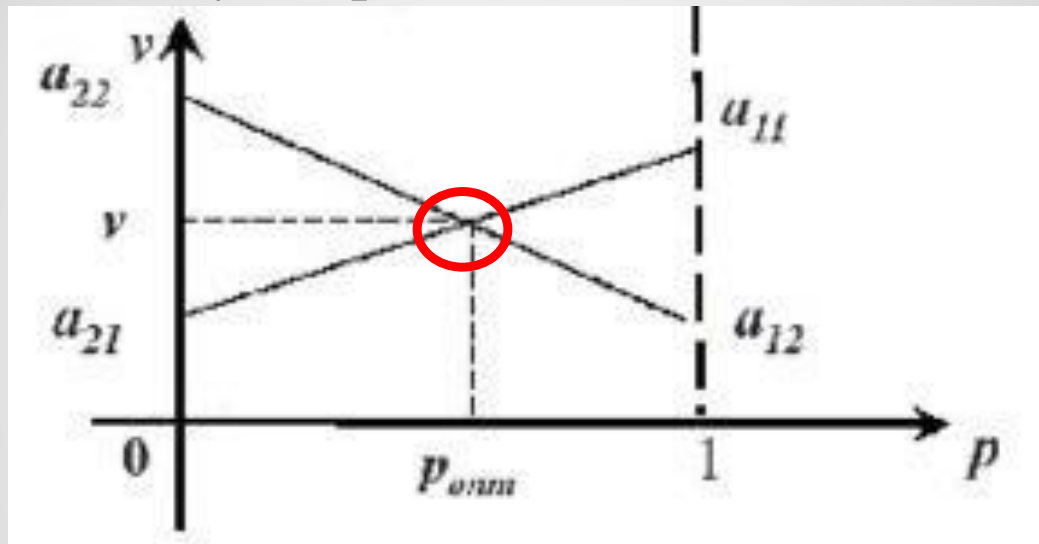
А – $Sa=(0,375; 0,625)$,

игрока В – $Sb=(0,5; 0,5)$

Графический метод решения 2x2

1. Найдем оптимальную стратегию для первого игрока (A):

а) построим систему координат:



б) по оси абсцисс откладывается вероятность $p_1 \in [0,1]$, равная 1.

в) по оси ординат – выигрыши игрока A при стратегии A_2 , а на прямой $p = 1$ – выигрыши при стратегии A_1

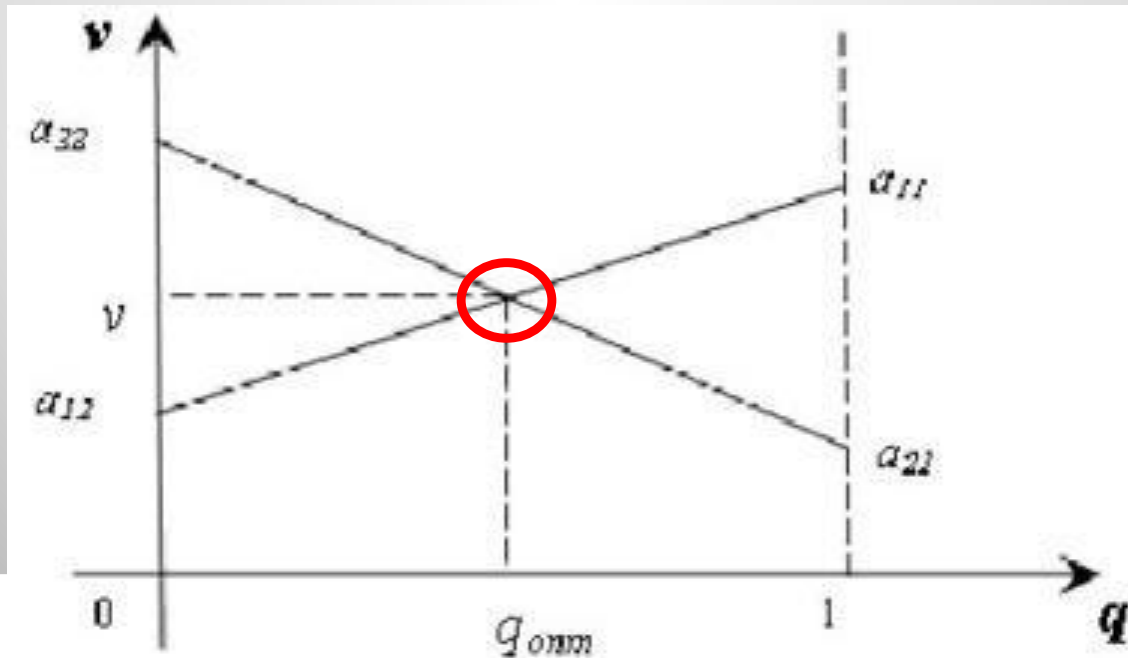
г) находим точку пересечения прямых, которая и дает оптимальное решение матричной игры игрока A ($p_{\text{опт}}, v$)

2. Найдем оптимальную стратегию для второго игрока В:

а) по оси абсцисс откладывается вероятность $q_1 \in [0,1]$, равная 1.

в) по оси ординат – выигрыши игрока В при стратегии B_2 , а на прямой $q = 1$ – выигрыши при стратегии B_1

г) находим точку пересечения прямых, которая и дает оптимальное решение матричной игры игрока В ($q_{\text{опт}}, v$)



Пример.

Матричная игра 2x2 задана следующей матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Найти решение игры графическим методом

Решение:

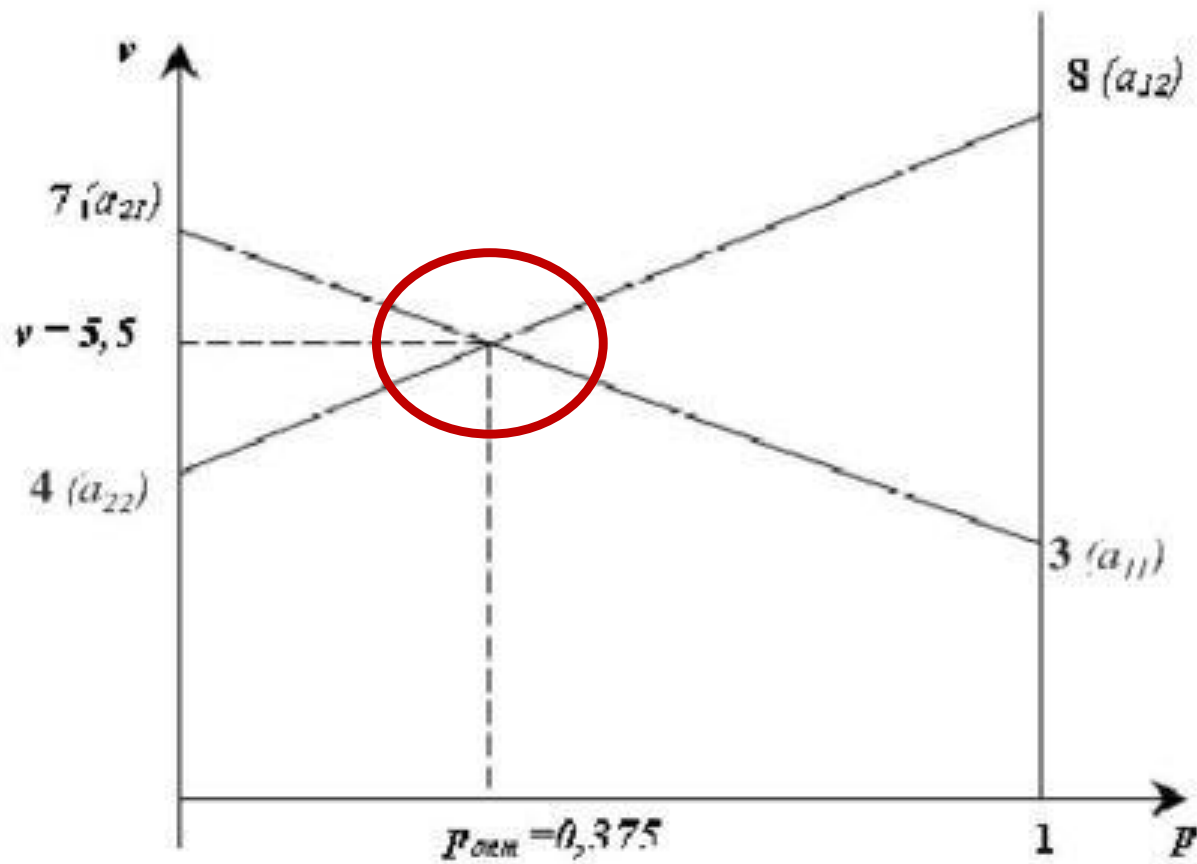
Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\alpha = 4, \beta = 7,$$

при этом цена игры $v \in [4, 7]$

$\alpha < \beta$ – игра не имеет седловой точки,
и поэтому имеет решение
в смешанных стратегиях.

Для q построим график самостоятельно



2. Решение задач в смешанных стратегиях размерностью $2 \times n$

Любая конечная игра $m \times n$ имеет решение, в котором число активных стратегий каждого игрока не превосходит L , где $L = \min(m, n)$



У игры $2 \times n$ или $m \times 2$ всегда имеется решение, содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков ($\min(2, n) = \min(m, 2) = 2$)

Пусть платежная матрица игры имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

Согласно теореме об активных стратегиях, решение находится из уравнения:

$$v = \min_j (a_{1j} p_{opt} + a_{2j} (1 - p_{opt})) = \max_{0 \leq p \leq 1} \min_j (a_{1j} p + a_{2j} (1 - p)), j = \overline{1, n}$$

Найти максимум (по p) функции

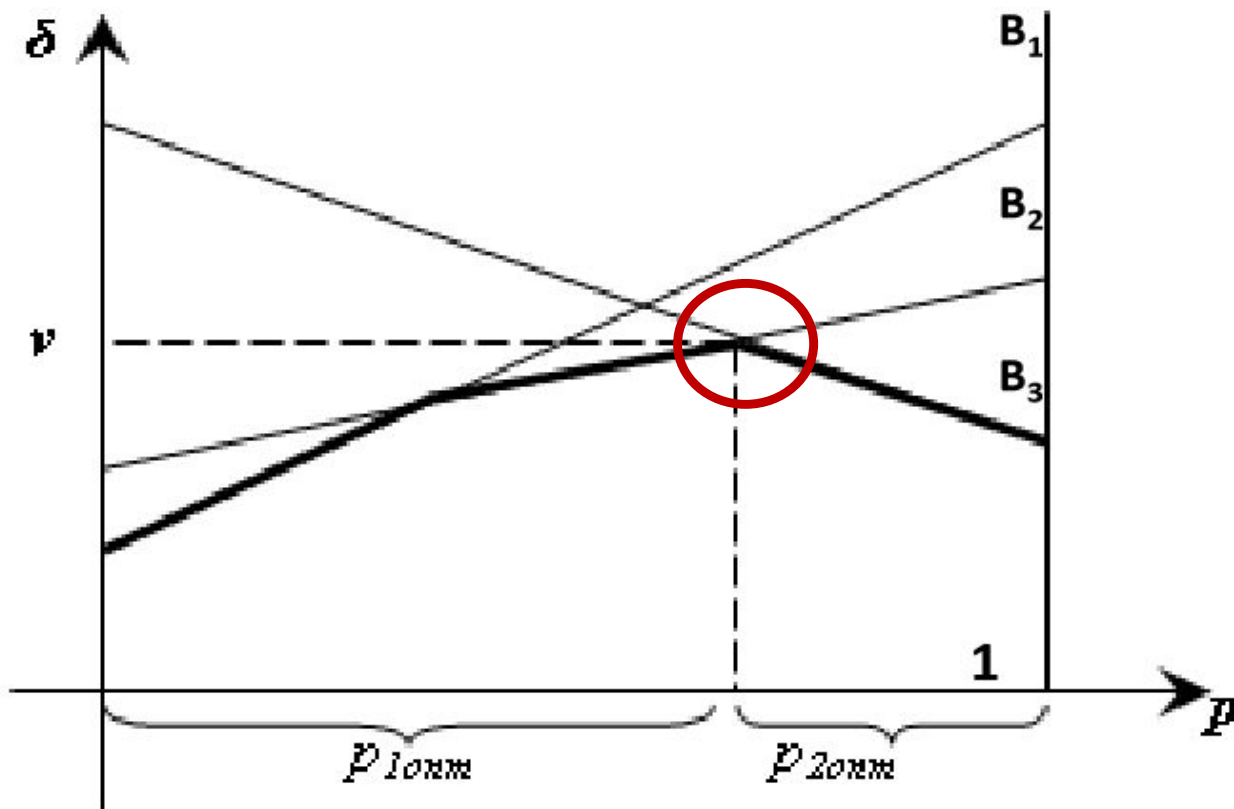
$$\min_j (a_{1j}p + a_{2j}(1-p))$$

Для этого необходимо построить n прямых вида

$$\delta_j = a_{1j}p + a_{2j}(1-p)$$

на плоскости (p, δ) , $p \in [0, 1]$ и путём визуального сравнения выбрать ломаную, огибающую их снизу

ГРАФИК



ПРИМЕР:

Матричная игра $2 \times n$ задана следующей матрицей

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Найти решение игры графическим и аналитическим методом

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\beta = \min_j \max_i \beta_j$$

Вычисляя, получим:

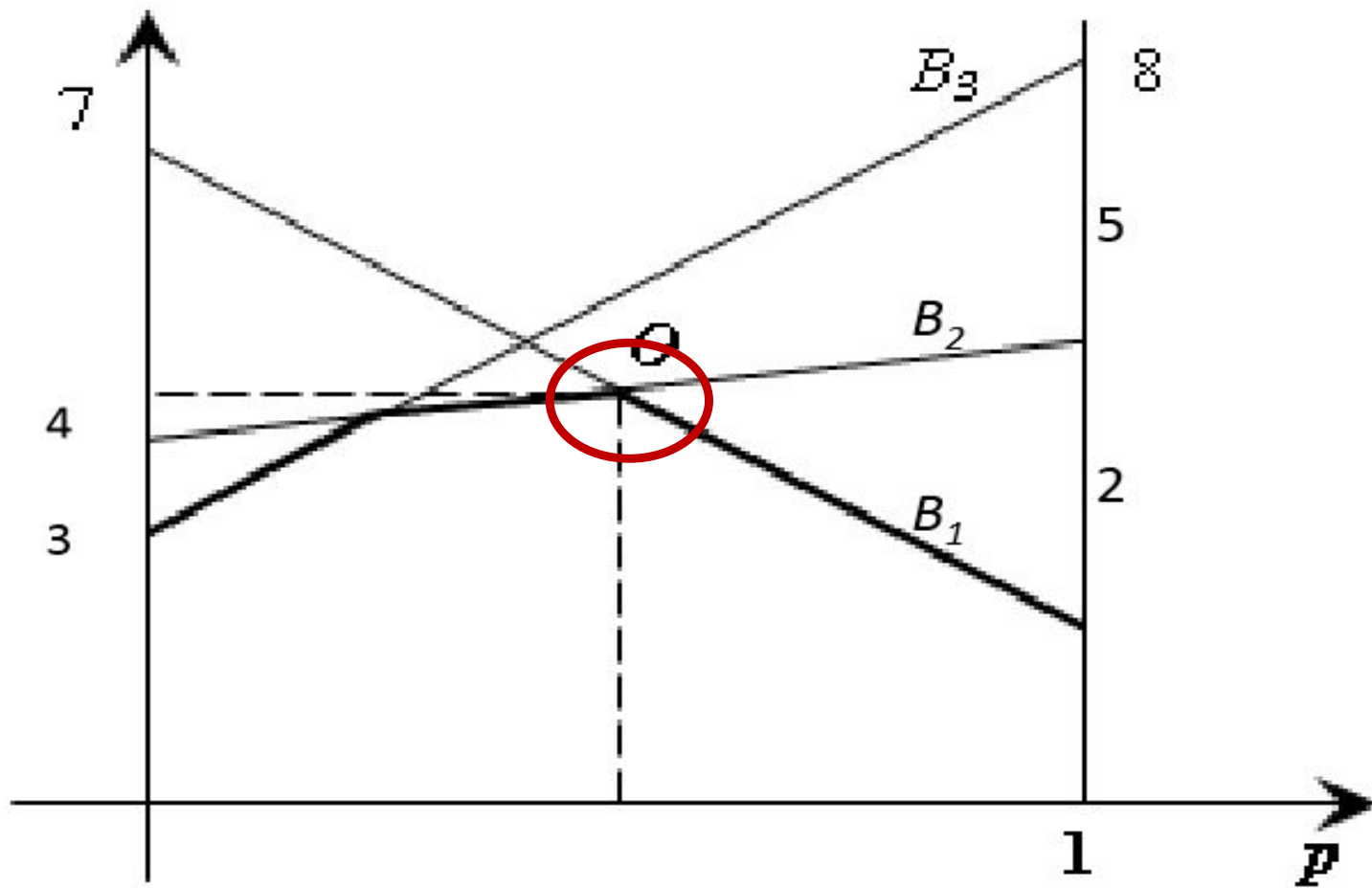
$$\alpha = \max (2, 3) = 3$$

$$\beta = \min (7, 5, 8) = 5$$

Цена игры $v \in [3, 5]$.

Так как $\alpha < \beta$, то игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.

Строим графическое изображение игры



Находим точку оптимума – O . В этой точке пересекаются стратегии V_1 и V_2 игрока B . Таким образом, исключая стратегию V_3 , получаем матричную игру 2×2 с платежной матрицей вида

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$

- Используя алгебраический метод решения этой игры, получаем:

$$p_1 = \frac{4-7}{2+4-7-5} = 0,5 \quad p_2 = 1 - p_1 = 0,5$$

$$q_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}} = \frac{4,5 - 5}{2 - 5} = 0,17 \quad q_2 = 1 - q_1 = 0,83$$

$$v = \frac{2 \cdot 4 - 7 \cdot 5}{2 + 4 - 7 - 5} = 4,5$$

ОТВЕТ: оптимальные смешанные стратегии игроков: $S_a = (0,5; 0,5)$; $S_b = (0,17; 0,83)$
при цене игры $v = 4,5$

Решение игры $mx2$ осуществляется аналогично. Но в этом случае строится графическое изображение игры для игрока В и выделяется не нижняя, а **верхняя граница выигрыша**, и на ней находятся точка оптимума с наименьшей ординатой (минимакс).

ПРИМЕР:

Матричная игра $m \times 2$ задана следующей матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2,5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Найти решение игры графическим и аналитическим методом

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\beta = \min_j \max_i \beta_j$$

Вычисляя, получим:

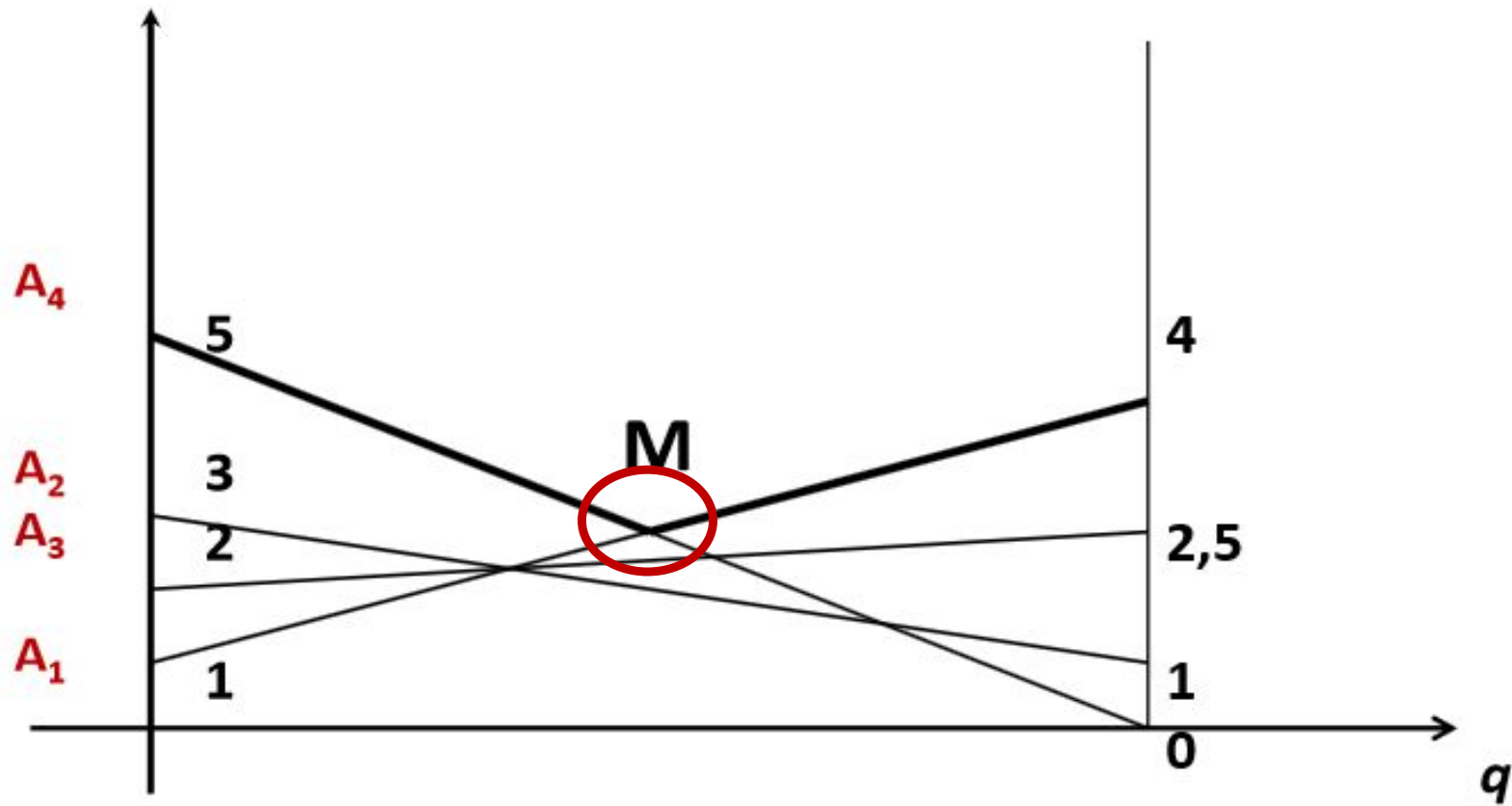
$$\alpha = \max (1; 1; 2; 0) = 2$$

$$\beta = \min (5; 4) = 4$$

Цена игры $v \in [2, 4]$.

Так как $\alpha < \beta$, то игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.

ГРАФИК



$$p_1 = 0,625$$

$$p_2 = 0,375$$

$$q_1 = 0,5$$

$$q_2 = 0,5$$

$$v = 2,5$$

ОТВЕТ: оптимальные смешанные стратегии игроков: $S_a = (0,625; 0,375)$; $S_b = (0,5; 0,5)$
при цене игры $v = 2,5$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

