ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ (КОМБИНАТОРИКА)

§1. Принципы сложения и умножения

- **Комбинаторика** занимается подсчетом количеств разных комбинаций, которые можно получить различными способами из тех или иных конечных множеств.

- Если конечное множество A состоит из m элементов, то мы будем писать: $|A| = m$ или $n(A) = m$.
- **Теорема 1 (принцип сложения).** Пусть $A \cap B = \varnothing$. Тогда $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.
- **Следствие 2.** Пусть $A_1, A_2, \dots, A_l$ – система попарно непересекающихся конечных множеств.
- **Тогда** $n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_l) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_l)$.

- **Доказательство:**
- **При** $l=2$ ссылаемся на теорему 1:

  $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2)$.
- Допустим, что утверждение верно **при** $l = k$,

  $n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_k)$.
- Докажем утверждение **при** $l = k+1$.
- **В этом случае**
- $n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1}) = n((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}) = n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) + n(A_{k+1})$.
- Здесь мы воспользовались базисом индукции и, применяя индуктивное предположение, получим:
  - $n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) + n(A_{k+1}) = n(A_1) + \ldots + n(A_k) + n(A_{k+1})$.

Следствие доказано.

- Иногда ***принцип сложения*** можно встретить в таком виде: если объект x можно получить m способами, а объект y можно получить l способами, причем множества этих способов не пересекаются, то объект x или объект y можно получить $m + l$ способами. Таким образом, необходимо помнить, что в комбинаторике союз “**или**” ассоциирован с операцией сложения.

- **Теорема 3 (принцип умножения).** Если множество $\boldsymbol{A}$ состоит из m элементов, а множество $\boldsymbol{B}$ состоит из $\boldsymbol{l}$ элементов, то $\boldsymbol{n(A\times B)=ml}$.

Доказательство: При $l=1$ множество B состоит из 1 элемента: $B=\{b_1\}$.

Поэтому мн-во $A\times B=\{(a_i, b_1)|i=1, 2,\ldots,m\}$ состоит из m элементов, $n(A\times B)=m\cdot 1=m\cdot l$.

Базис индукции проверен.

- **При** $l=k$,
- если $n(A)=m$, $n(B)=k$, то $n(A\times B)=m\cdot k$.
- **При** $l=k+1$.
- Пусть $B=\{b_1, b_2,\ldots, b_k, b_{k+1}\}$ или $B=B'\cup\{b_{k+1}\}$,

- Где множество$B'=\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$состоит из k элементов.
- По индуктивному предположению

$n(A \times B') = n(A) \cdot n(B') = m \cdot k.$

- С другой стороны $B = B' \cup \{b_{k+1}\}$,

поэтому $(A \times B) = A \times B' \cap A \times \ldots \times \{b_{k+1}\}$,

- причем $A \times B' \cap A \times \{b_{k+1}\} = \varnothing$,

так как $B' \cup \{b_{k+1}\} = \varnothing$.

- По теореме *1*
- $n(A \times B) = n(A \times B' \cup A \times \{b_{k+1}\}) = n(A \times B') + n(A \times \{b_{k+1}\}) = m \cdot k + m \cdot 1 = m(k + 1) = m \cdot l.$

- В комбинаторном изложении принцип умножения часто формулируют так: если объект $\boldsymbol{x}$ можно сконструировать $\boldsymbol{m}$ способами, объект y можно сконструировать $\boldsymbol{l}$ способами, то объект $\boldsymbol{(x, y)}$ или $\boldsymbol{(x}$ и $\boldsymbol{y)}$ можно сконструировать $\boldsymbol{m \cdot l}$ способами. То есть союз "**и**" в комбинаторики ассоциирован с операцией умножения.

Теорема 4.

Если множества A_1, A_2, …, A_k конечны, то $n(A_1 \times A_2 \times ,\ldots, \times A_k) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot ,\ldots, \cdot n(A_k)$.

Задача . Пусть A и B конечные мн-ва, $B \subseteq A$. Сколько элементов содержит множества $A \setminus B$.

- **Решение.** Докажем, что в случае, когда
- $B \subseteq A$, $n(A \setminus B) = n(A) - n(B)$.
- В самом деле, запишем очевидное теоретико-множественное равенство
- $(A \setminus B) \cup B = A$, причем $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$.
- Применим к множествам $A \setminus B$ и B принцип сложения.
- $n((A \setminus B) \cup B) = n(A \setminus B) + n(B)$ или $n(A) = n(A \setminus B) + n(B)$
- Отсюда получаем требуемое равенство $n(A \setminus B) = n(A) - n(B)$.

Задача . Из цифр $A=\{0,1,2,3,5,6,7\}$ составить все четырехзначные числа, не содержащие повторяющихся цифр и делящиеся на 3.

- **Решение.** Воспользуемся признаком делимости на три: число делится на три в том и только в том случае, когда сумма цифр этого числа делится на три. Поэтому надо перебрать всевозможные четверки цифр, сумма которых делится на три. Перечислим такие четверки:

- $A_1 = \{0, 1, 2, 3\}$, $A_2 = \{0, 1, 2, 6\}$, $A_3 = \{0, 1, 3, 5\}$,
- $A_4 = \{0, 1, 5, 6\}$, $A_5 = \{0, 2, 3, 7\}$, $A_6 = \{0, 3, 5, 7\}$,
- $A_7 = \{0, 5, 6, 7\}$, $A_8 = \{1, 2, 3, 6\}$, $A_9 = \{1, 3, 5, 6\}$,

  $A_{10} = \{1, 2, 5, 7\}$, $A_{11} = \{2, 2, 6, 7\}$, $A_{12} = \{3, 5, 6, 7\}$.
- **Обозначим** через B множество всех искомых чисел, а через B_i $(i = 1, 2, \ldots, 12)$ множества чисел, полученные из цифр множества A_i соответственно.
- **Так как при** $i \neq j$
- $B_i \cap B_j = \varnothing$, то по принципу сложения
- $n(B) = \sum_{i=1}^{12} n(B_i)$.
- **По принципу произведения**
- $n(B_1)=3\cdot 3\cdot 2\cdot 1=18.$

- Аналогично
- $n(B_2)=n(B_3)=n(B_4)=n(B_5)=n(B_6)=n(B_7)=18$
- **По принципу произведения** $n(B_8)=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$.
- Аналогично, $n(B_9)=n(B_{10})=n(B_{11})=n(B_{12})=24$.
- **Наконец**, $n(B)=18\cdot7+24\cdot5=246$

§2. Размещения и перестановки

- **Определение 1.** Пусть дано конечное множество *A*, ***n(A)=n*** **и** ***1*** ≤ ***k*** ≤ ***n***. ***k*-размещением** множества ***A*** называется любой упорядоченный набор длины
- ***k*** $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$, где все координаты - попарно различные элементы множества ***A***. Число всех ***k*-размещений** **n**-элементного множества обозначается через A_n^k.

- **Пример.** Пусть ***A={a,b,c,d}***.
- Выпишем все 2-размещения этого четырёхэлементного множества:
- *(a;b), (b;a), (a;c), (c;a), (a;d), (d;a), (b;c), (c;b), (b;d), (d;b), (c;d), (d;c)*.
- Таким образом $A_4^2 = 12$

Теорема 2. Пусть $n \in N, \quad 1 \leq k \leq n$.

Тогда $$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \; .$$

Доказательство. Применим индукцию по k. Докажем равенство при $\boldsymbol{k=1}$.

1-размещения это наборы состоящие из одного элемента, взятого из n-элементного множества. Очевидно, что их будет столько же, сколько элементов, в n-элементном множестве, то есть

$$A_n^1 = n \; .$$

С другой стороны ,
$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-2)!} = n$$

то есть
$$A_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!}$$

- **Допустим**, равенство выполняется для ***k < n**,* то есть

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Докажем** равенство для ***k+1 ≤ n***.
- Каждый ***(k+1)****-* элементный набор можно получить из *k*-элементного приписыванием справа одного допустимого элемента.
- Для фиксированного *k*-элементного набора это будет любой элемент, не входящий в этот набор. Очевидно, что таких допустимых элементов будет ***n-k***.
- Значит, из одного *k*-элементного набора можно получить ***(n-k) (k+1)-*** элементных наборов, поэтому

$$\mathrm{A}_n^{k+1} = \mathrm{A}_n^k (n-k) = \frac{n!}{(n-k)!}(n-k) =$$

$$= \frac{n!(n-k)}{(n-k-1)!(n-k)} = \frac{n!}{(n-(k+1))!}$$

Пример. В первенстве страны участвуют 12 команд. Сколькими способами они смогут занять призовые места.

Решение. Поскольку является существенным тот факт, какая команда займет первое место, какая – второе, какая - третье, то задача сводится к вопросу: сколькими способами можно выбрать трёхэлементный упорядоченный набор из 12-элементного множества. Таких способов будет способов.

$$A_{12}^{3} = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

- **Замечание 3**. При ***k>n*** невозможно построить *k*-размещение, поэтому

  $$A_n^k = 0 \quad \text{при} \quad k>n.$$

- **Замечание 4.** При ***k=0*** под *0*-размещением мы будем понимать пустое множество.
- Так как пустое множество единственно,

  то $A_n^0 = 1$

- что согласуется с формулой $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$,
- так как при ***k=0*** имеем

$$A_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$$

- **Определение 5.** Пусть конечное множество A состоит из n элементов. **k -размещением с повторениями** множества A называется упорядоченный набор длины k, элементы которого берутся из A. Элементы в k-размещении с повторениями не обязаны быть различными.
- **Пример.** Пусть $A=\{1,2,3\}$. Выпишем все 2-размещения с повторениями множества A:

$$(1;1),(1;2),(1;3),(2;1),(2;2),(2;3),\ (3;1),(3;2),(3;3).$$

- Число k-размещений с повторениями
- n-элементного множества обозначается $\overline{A}_n^k$

Теорема 6. $\overline{A}_n^k = n^k$

- **Доказательство.**
- Применим индукцию по *k*.
- **При** $k=1$ число 1-размещений равно числу элементов множества *A*,
  то есть $\overline{A}_n^1 = n$
- **С другой стороны**, $n^1=n$. Базис индукции доказан.
- **Допустим**, формула верна при $k=l$, то есть

$$\overline{A}_n^l = n^l$$

- **Докажем утверждение при** *k*= *l* +*1*.
- Из каждого упорядоченного *l*-элементного набора можно получить n упорядоченных наборов длины ***l*+*1***,
- приписывая любой элемент ***A*** справа, то есть
- ***(l +1)-***размещений с повторениями в **n** раз больше, чем ***l*** -размещений с повторениями, то есть

$$\overline{A_n^{l+1}} = \overline{A_n^l}\, n = n^l = n^k$$

- Теорема доказана.

Пример. Номер машины состоит из двух букв русского алфавита (32 буквы) и из четырёх цифр. Сколько всего существует номеров?

Решение. Пару букв мы можем выбрать

$\overline{A}_{32}^{2}$ способами,

четвёрку цифр можно выбрать

$\overline{A_{10}^{4}}$ способами.

Значит, всего машинных номеров можно составить по принципу произведения

$$\overline{A_{32}^{2}} \cdot \overline{A}_{10}^{4} = 32^{2} \cdot 10^{4}$$

- **Определение7.**
- ***Перестановкой*** n-элементного множества называется упорядоченный набор длины $\boldsymbol{n}$, составленный из этих элементов, причём каждый элемент входит в набор ровно один раз.
- ***Число перестановок*** n-элементного множества обозначается символом $\boldsymbol{P_n}$.
- **Пример.** Выпишем все перестановки 3-х элементного множества ***A={a;b;c}:*** ***(a;b;c),(a;c;b),(b;a;c),(b;c;a),(c;a;b),(c;b;a).***
- Таким образом, $P_3=6$.

Теорема 8. $P_n = n!$

- **Доказательство.** Каждую перестановку n-элементного множества можно рассматривать как n-размещение этого множества. Поэтому

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Задача. Сколькими способами на шахматной доске можно расставить *8* ладей таким образом, что бы они не били друг друга.

- **Решение.** Первую вертикаль можно заполнить лишь одной ладьёй, чтобы не нарушалось условие задачи. Причём количество способов заполнить эту вертикаль равно восьми.
- На вторую вертикаль можно поставить тоже только одну ладью, причём уже семью способами, и т.д. вплоть до восьмой вертикали, которую можно заполнить одним способами.
- По принципу произведения всего способов расстановки ладей так, чтобы они не били друг друга, будет $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 8!$

§3.Сочетания. Свойства сочетаний. Бином Ньютона

- **Определение 1.**
- Пусть дано n-элементное множество. Любое k-элементное подмножества множества A называется ***k*-сочетанием** n-элементного множества.

Число k-сочетаний n-элементного множества обозначается C_n^k .

- **Пример.** Выпишем все *2*-сочетания *4*-элементного множества ***A={a,b,c,d}:*** ***{a;b},{a;c},{a;d},{b,c},{b,d},{c,d}.***
- Таким образом, $C_4^2 = 6$.

Теорема 2. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ при $k \le n$.

- **Доказательство**. Из одного k-сочетания можно получить $\boldsymbol{k!}$ k-размещений n-элементного множества, потому что k элементов можно упорядочить $k!$ способами.
- Поскольку каждое k-размещение есть не что иное, как упорядоченное k-сочетание, то всего k-размещений будет
- $C_n^k \cdot k!$
- С другой стороны k-размещений имеется $\boldsymbol{A_n^k}$.
- Получили равенство

$$C_n^k k! = A_n^k \quad \text{или} \quad C_n^k k! = \frac{n!}{(n-k)!},$$

- и отсюда получаем искомую формулу:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- **Теорема 3 (простейшие свойства сочетаний).**
- *1)* $C_n^0 = C_n^n = 1;$
- *2)* $C_n^1 = C_n^{n-1} = n;$
- *3)* $C_n^k = C_n^{n-k}$
- *4)* $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$
- *5)* $\sum_{k=0}^{m-1} C_{n+k}^n = C_{n+m}^{n+1}$ *, (m≥1);*

Теорема 4 (бином Ньютона).

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

- **Доказательство**.
- Второе равенство представляет собой не что иное, как разные записи одной и той же суммы. Слева стоит эта сумма в “развернутом” виде, а справа эта же сумма, записанная с помощью знака суммирования. Поэтому доказываем первое равенство.
- Рассмотрим выражение:

$$A = (1 + x_1)(1 + x_2).....(1 + x_n)$$

- Раскрыв скобки, получим сумму

$$A = 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j + \ldots + \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1}, x_{i_2} \ldots x_{i_k} + \ldots + x_1 x_2 \ldots x_n$$

- В первой сумме количество слагаемых равно количеству элементов множества $S = \{1, 2, \ldots, n\}$,
- $n = C_n^1$ то есть . Во второй сумме количество слагаемых равно количеству двухэлементных подмножеств n-элементного множества S, то есть равно C_n^2 .

- Число слагаемых в k-ой сумме равно количеству k-элементных подмножеств n-элементного множества S , то есть равно C_n^k
- Поэтому, если положить в A

$x_1 = x_2 = ... = x_n = x$

- то получим

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^k x^k + ... + x^n$$

- Теорема доказана

- **Следствие 5.**

$$2^n = 1 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n$$

- **Следствие 6.**

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k = 0$$

- **Следствие 7 .** $(a+b)^n = \sum a^{n-k} \cdot b^k \cdot C_n^k$

Замечание. В силу большой важности бинома Ньютона для самых разных разделов математики, числа называются ***биноминальным коэффициентами***.

- **Следствие 9.**

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$$

- **Определение 10.** Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ - n–элементное множество.
- k-сочетанием с повторениями множества ***A*** называется ***неупорядоченный*** набор $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$,
- где все элементы принадлежат множеству ***A***, причем допустимо повторение этих элементов $\overline{C}_n^k$.
- **Пример**. Пусть $A = \{a, b, c\}$. Выпишем все 2-сочетания с повторениями множества ***A*** :
- ***[a, a], [a, b], [a, c], [b, b], [b, c], [c,c].***
- Число k–сочетаний с повторениями n-элементного множества обозначается . Приведенный пример показывает, что $\overline{C}_3^2 = 6$

- **Лемма .** Число всех упорядоченных нулей и единиц последовательностей из нулей и единиц длины $\boldsymbol{n}$, в которых присутствует l нулей,
- равно C_n^l (или C_n^{n-l} , что одно и то же).

Теорема 12. $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

- **Пример.** В магазине продаются пирожные *4* сортов. Сколькими способами можно купить *8* пирожных?
- **Решение.** Находим число *8*-сочетаний с повторениями *4*-х элементного множества:
- $$\overline{C}_4^8 = C_{4+8-1}^8 = C_{11}^8 = \frac{11!}{3!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3} = 165$$