

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ (КОМБИНАТОРИКА)

§1. Принципы сложения и умножения

- **Комбинаторика** занимается подсчетом количеств разных комбинаций, которые можно получить различными способами из тех или иных конечных множеств.

- Если конечное множество A состоит из m элементов, то мы будем писать: $|A| = m$ или $n(A) = m$.
- **Теорема 1 (принцип сложения).** Пусть $A \cap B = \emptyset$. Тогда $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.
- **Следствие 2.** Пусть A_1, A_2, \dots, A_l – система попарно непересекающихся конечных множеств.
- Тогда $n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_l) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_l)$.

- **Доказательство:**
- **При $l=2$** ссылаемся на теорему 1:

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2).$$
- Допустим, что утверждение верно **при $l = k$** ,

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_k).$$
- Докажем утверждение **при $l = k+1$** .
- **В этом случае**
- $$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1}) = n((A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) \cup A_{k+1}) = n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) + n(A_{k+1}).$$
- Здесь мы воспользовались базисом индукции и, применяя индуктивное предположение, получим:
 - $$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) + n(A_{k+1}) = n(A_1) + \dots + n(A_k) + n(A_{k+1}).$$

Следствие доказано.

- Иногда *принцип сложения* можно встретить в таком виде: если объект x можно получить m способами, а объект y можно получить l способами, причем множества этих способов не пересекаются, то объект x или объект y можно получить $m + l$ способами. Таким образом, необходимо помнить, что в комбинаторике союз “или” ассоциирован с операцией сложения.

- **Теорема 3 (принцип умножения).** Если множество A состоит из m элементов, а множество B состоит из l элементов, то $n(A \times B) = ml$.

Доказательство: При $l=1$ множество B состоит из 1 элемента: $B = \{b_1\}$.

Поэтому мн-во $A \times B = \{(a_i, b_1) | i = 1, 2, \dots, m\}$ состоит из m элементов, $n(A \times B) = m \cdot 1 = m \cdot l$.

Базис индукции проверен.

- При $l = k$,
- если $n(A) = m$, $n(B) = k$, то $n(A \times B) = m \cdot k$.
- При $l = k + 1$.
- Пусть $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k, b_{k+1}\}$ или $B = B' \cup \{b_{k+1}\}$,

- Где множество $B' = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ состоит из k элементов.
- По индуктивному предположению $n(A \times B') = n(A) \cdot n(B') = m \cdot k$.
- С другой стороны $B = B' \cup \{b_{k+1}\}$,
поэтому $(A \times B) = A \times B' \cap A \times \dots \times \{b_{k+1}\}$,
- причем $A \times B' \cap A \times \{b_{k+1}\} = \emptyset$,
так как $B' \cup \{b_{k+1}\} = \emptyset$.
- По теореме 1
- $n(A \times B) = n(A \times B' \cup A \times \{b_{k+1}\}) = n(A \times B') + n(A \times \{b_{k+1}\}) = m \cdot k + m \cdot 1 = m(k + 1) = m \cdot l$.

- В комбинаторном изложении принцип умножения часто формулируют так: если объект x можно сконструировать m способами, объект y можно сконструировать l способами, то объект (x, y) или $(x$ и $y)$ можно сконструировать $m \cdot l$ способами. То есть союз “и” в комбинаторике ассоциирован с операцией умножения.

Теорема 4.

Если множества A_1, A_2, \dots, A_k конечны,
то $n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \dots \cdot n(A_k)$.

Задача . Пусть A и B конечные мн-ва, $B \subseteq A$.

Сколько элементов содержит множества $A \setminus B$.

- **Решение.** Докажем, что в случае, когда
- $B \subseteq A$, $n(A \setminus B) = n(A) - n(B)$.
- В самом деле, запишем очевидное теоретико-множественное равенство
- $(A \setminus B) \cup B = A$, причем $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.
- Применим к множествам $A \setminus B$ и B принцип сложения.
- $n((A \setminus B) \cup B) = n(A \setminus B) + n(B)$ или $n(A) = n(A \setminus B) + n(B)$
- Отсюда получаем требуемое равенство $n(A \setminus B) = n(A) - n(B)$.

Задача . Из цифр $A=\{0,1,2,3,5,6,7\}$ составить все четырехзначные числа, не содержащие повторяющихся цифр и делящиеся на 3.

- **Решение.** Воспользуемся признаком делимости на три: число делится на три в том и только в том случае, когда сумма цифр этого числа делится на три. Поэтому надо перебрать всевозможные четверки цифр, сумма которых делится на три. Перечислим такие четверки:

- $A_1 = \{0, 1, 2, 3\}$, $A_2 = \{0, 1, 2, 6\}$, $A_3 = \{0, 1, 3, 5\}$,
- $A_4 = \{0, 1, 5, 6\}$, $A_5 = \{0, 2, 3, 7\}$, $A_6 = \{0, 3, 5, 7\}$,
- $A_7 = \{0, 5, 6, 7\}$, $A_8 = \{1, 2, 3, 6\}$, $A_9 = \{1, 3, 5, 6\}$,
- $A_{10} = \{1, 2, 5, 7\}$, $A_{11} = \{2, 2, 6, 7\}$, $A_{12} = \{3, 5, 6, 7\}$.

• **Обозначим** через B множество всех искомым чисел, а через B_i ($i = 1, 2, \dots, 12$) множества чисел, полученные из цифр множества A_i соответственно.

• **Так как при $i \neq j$**

• $B_i \cap B_j = \emptyset$, то по принципу сложения

$$\bullet n(B) = \sum_{i=1}^{12} n(B_i) \cdot$$

• **По принципу произведения**

$$\bullet n(B_1) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18.$$

- Аналогично
- $n(B_2) = n(B_3) = n(B_4) = n(B_5) = n(B_6) = n(B_7) = 18$
- По принципу произведения $n(B_8) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Аналогично, $n(B_9) = n(B_{10}) = n(B_{11}) = n(B_{12}) = 24$.
- Наконец, $n(B) = 18 \cdot 7 + 24 \cdot 5 = 246$

§2. Размещения и перестановки

- **Определение 1.** Пусть дано конечное множество A , $n(A)=n$ и $1 \leq k \leq n$. k -размещением множества A называется любой упорядоченный набор длины k $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$, где все координаты - попарно различные элементы множества A . Число всех k -размещений n -элементного множества обозначается через A_n^k .

- **Пример.** Пусть $A = \{a, b, c, d\}$.
- Выпишем все 2-размещения этого четырёхэлементного множества:
- $(a;b), (b;a), (a;c), (c;a), (a;d), (d;a), (b;c), (c;b), (b;d), (d;b), (c;d), (d;c)$.
- Таким образом $A_4^2 = 12$

Теорема 2. Пусть $n \in N$, $1 \leq k \leq n$.

Тогда
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} .$$

Доказательство. Применим индукцию по k .

Докажем равенство при $k=1$.

1 -размещения это наборы состоящие из одного элемента, взятого из n -элементного множества.

Очевидно, что их будет столько же, сколько элементов, в n -элементном множестве, то есть

$$A_n^1 = n .$$

С другой стороны , $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-2)!} = n$

то есть $A_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!}$

- Допустим, равенство выполняется для $k < n$, то есть

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Докажем равенство для $k+1 \leq n$.
- Каждый $(k+1)$ -элементный набор можно получить из k -элементного приписыванием справа одного допустимого элемента.
- Для фиксированного k -элементного набора это будет любой элемент, не входящий в этот набор. Очевидно, что таких допустимых элементов будет $n-k$.
- Значит, из одного k -элементного набора можно получить $(n-k)$ $(k+1)$ -элементных наборов, поэтому

$$\begin{aligned} A_n^{k+1} &= A_n^k (n-k) = \frac{n!}{(n-k)!} (n-k) = \\ &= \frac{n!(n-k)}{(n-k-1)!(n-k)} = \frac{n!}{(n-(k+1))!} \end{aligned}$$

Пример. В первенстве страны участвуют 12 команд. Сколькими способами они смогут занять призовые места.

Решение. Поскольку является существенным тот факт, какая команда займет первое место, какая – второе, какая – третье, то задача сводится к вопросу: сколькими способами можно выбрать трёхэлементный упорядоченный набор из 12-элементного множества. Таких способов будет $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ способов.

$$A_{12}^3 = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

- **Замечание 3.** При $k > n$ невозможно построить k -размещение, поэтому

$$A_n^k = 0 \quad \text{при} \quad k > n.$$

- **Замечание 4.** При $k=0$ под 0 -размещением мы будем понимать пустое множество.

- Так как пустое множество единственно,

$$\text{то} \quad A_n^0 = 1$$

- что согласуется с формулой $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$,

- так как при $k=0$ имеем

$$A_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$$

- **Определение 5.** Пусть конечное множество A состоит из n элементов. k -размещением с повторениями множества A называется упорядоченный набор длины k , элементы которого берутся из A . Элементы в k -размещении с повторениями не обязаны быть различными.
- **Пример.** Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. Выпишем все 2-размещения с повторениями множества A :
 $(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3)$.
- Число k -размещений с повторениями
- n -элементного множества обозначается \overline{A}_n^k

Теорема 6. $\overline{A}_n^k = n^k$

- **Доказательство.**

- Применим индукцию по k .

- При $k=1$ число 1 -размещений равно числу элементов множества A ,

то есть $\overline{A}_n^1 = n$

- С другой стороны, $n^1 = n$. Базис индукции доказан.

- Допустим, формула верна при $k=l$, то есть

$$\overline{A}_n^l = n^l$$

- Докажем утверждение при $k = l + 1$.
- Из каждого упорядоченного l -элементного набора можно получить n упорядоченных наборов длины $l+1$,
- приписывая любой элемент A справа, то есть
- $(l+1)$ -размещений с повторениями в n раз больше, чем l -размещений с повторениями, то есть

$$\overline{A_n^{l+1}} = \overline{A_n^l} n = n^l = n^k$$

- Теорема доказана.

Пример. Номер машины состоит из двух букв русского алфавита (32 буквы) и из четырёх цифр. Сколько всего существует номеров?

Решение. Пару букв мы можем выбрать $\overline{A_{32}^2}$ способами,

четвёрку цифр можно выбрать $\overline{A_{10}^4}$ способами.

Значит, всего машинных номеров можно составить по принципу произведения

$$\overline{A_{32}^2} \cdot \overline{A_{10}^4} = 32^2 \cdot 10^4$$

- **Определение 7.**
- **Перестановкой** n -элементного множества называется упорядоченный набор длины n , составленный из этих элементов, причём каждый элемент входит в набор ровно один раз.
- **Число перестановок** n -элементного множества обозначается символом P_n .
- **Пример.** Выпишем все перестановки 3-х элементного множества $A=\{a;b;c\}$:
 $(a;b;c), (a;c;b), (b;a;c), (b;c;a), (c;a;b), (c;b;a)$.
- Таким образом, $P_3=6$.

Теорема 8. $P_n = n!$

- **Доказательство.** Каждую перестановку n -элементного множества можно рассматривать как n -размещение этого множества. Поэтому

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Задача. Сколькими способами на шахматной доске можно расставить 8 ладей таким образом, что бы они не били друг друга.

- **Решение.** Первую вертикаль можно заполнить лишь одной ладьёй, чтобы не нарушалось условие задачи. Причём количество способов заполнить эту вертикаль равно восьми.
- На вторую вертикаль можно поставить тоже только одну ладью, причём уже семью способами, и т.д. вплоть до восьмой вертикали, которую можно заполнить одним способом.
- По принципу произведения всего способов расстановки ладей так, чтобы они не били друг друга, будет $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 8!$

§3. Сочетания. Свойства сочетаний. Бином Ньютона

- **Определение 1.**
- Пусть дано n -элементное множество. Любое k -элементное подмножество множества A называется **k -сочетанием** n -элементного множества.

Число k -сочетаний n -элементного множества обозначается C_n^k .

- **Пример.** Выпишем все 2-сочетания 4-элементного множества $A = \{a, b, c, d\}$:
 $\{a; b\}, \{a; c\}, \{a; d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$.
- Таким образом, $C_4^2 = 6$.

Теорема 2. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ при $k \leq n$.

- **Доказательство.** Из одного k -сочетания можно получить $k!$ k -размещений n -элементного множества, потому что k элементов можно упорядочить $k!$ способами.
- Поскольку каждое k -размещение есть не что иное, как упорядоченное k -сочетание, то всего k -размещений будет
- $C_n^k \cdot k!$
- С другой стороны k -размещений имеется A_n^k .
- Получили равенство

$$C_n^k k! = A_n^k \quad \text{или} \quad C_n^k k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- и отсюда получаем искомую формулу:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

• Теорема 3 (простейшие свойства сочетаний).

• 1) $C_n^0 = C_n^n = 1;$

• 2) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n;$

• 3) $C_n^k = C_n^{n-k}$

• 4) $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$

• 5) $\sum_{k=0}^{m-1} C_{n+k}^n = C_{n+m}^{n+1}, (m \geq 1);$

Теорема 4 (бином Ньютона).

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

- **Доказательство.**
- Второе равенство представляет собой не что иное, как разные записи одной и той же суммы. Слева стоит эта сумма в “развернутом” виде, а справа эта же сумма, записанная с помощью знака суммирования. Поэтому доказываем первое равенство.
- Рассмотрим выражение:

$$A = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n)$$

- Раскрыв скобки, получим сумму

$$A = 1 + \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j + \dots + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} + \dots + x_1 x_2 \dots x_n$$

- В первой сумме количество слагаемых равно количеству элементов множества $S = \{1, 2, \dots, n\}$,
- $n = C_n^1$ то есть . Во второй сумме количество слагаемых равно количеству двухэлементных подмножеств n -элементного множества S , то есть равно C_n^2 .

- Число слагаемых в k -ой сумме равно количеству k -элементных подмножеств n -элементного множества S , то есть равно

$$C_n^k$$

- Поэтому, если положить в A

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$$

- то получим

$$(1 + x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^k x^k + \dots + x^n$$

- Теорема доказана

- **Следствие 5.**

$$2^n = 1 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n$$

- **Следствие 6.**

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot C_n^k = 0$$

- **Следствие 7.** $(a+b)^n = \sum a^{n-k} \cdot b^k \cdot C_n^k$

Замечание. В силу большой важности биннома Ньютона для самых разных разделов математики, числа называются *биномиальными коэффициентами*.

• **Следствие 9.**

$$\sum_{k=1}^n k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$$

- **Определение 10.** Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ - n -элементное множество.
- k -сочетанием с повторениями множества A называется *неупорядоченный* набор $[a_1, a_2, \dots, a_k]$,
- где все элементы принадлежат множеству A , причем допустимо повторение этих элементов \overline{C}_n^k .
- **Пример.** Пусть $A = \{a, b, c\}$. Выпишем все 2-сочетания с повторениями множества A :
 - $[a, a], [a, b], [a, c], [b, b], [b, c], [c, c]$.
- Число k -сочетаний с повторениями n -элементного множества обозначается \overline{C}_n^k . Приведенный пример показывает, что $\overline{C}_3^2 = 6$

- **Лемма** . Число всех упорядоченных нулей и единиц последовательностей из нулей и единиц длины n , в которых присутствует l нулей,
- равно C_n^l (или C_n^{n-l} , что одно и то же).

Теорема 12. $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

• **Пример.** В магазине продаются пирожные 4 сортов. Сколькими способами можно купить 8 пирожных?

• **Решение.** Находим число 8-сочетаний с повторениями 4-х элементного множества:

•
$$\overline{C}_4^8 = C_{4+8-1}^8 = C_{11}^8 = \frac{11!}{3! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165$$