ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

СООТВЕТСТВИЯ. ФУНКЦИИ. ОТОБРАЖЕНИЯ

ЛЕКЦИЯ 2

Факультет компьютерной инженерии и управления,
кафедра АПВТ, ХНУРЭ

Харьковский национальный университет радиоэлектроники,
кафедра АПВТ, тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua

Тема: Соответствия. Функции. Отображения

Цель лекции – ознакомиться и овладеть понятием «соответствие», изучить свойства соответствий для применения в задачах компьютерной инженерии

Содержание:

- Понятие упорядоченной пары и вектора
- Декартово произведение множеств
- Определение соответствия
- Свойства соответствий
- Взаимно-однозначное соответствие
- Функции
- Отображения
- Примеры применения в теории кодирования и задачах диагностирования

ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua

Литература

- **Горбатов В.А.** Основы дискретной математики. М.: Высш. шк., 1986. С. 9-12.
- **Тевяшев А.Д., Гусарова И.Г.** Основы дискретной математики в примерах и задачах. Харьков: ХТУРЭ, 2001. С. 11-17.
- **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 4-10 с.
- **Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М.** Дискретная математика для инженера. М.: Энергия, 1980. 344 с.
- **Новиков Ф.А.** Дискретная математика для программистов. С.-П., 2001. С. 4-24.
- **Хаханов В.І., Хаханова І.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В.** Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Дискретна математика". Харків, ХНУРЕ. 2001. 87с.
- **Хаханов В.И., Чумаченко С.В.** Дискретная математика. Электронный учебник. ХНУРЭ: Электронная библиотека кафедры АПВТ (ауд. 320) NSERV\Library\Чумаченко\Дискретная математика\...

Термины

Базовые понятия:

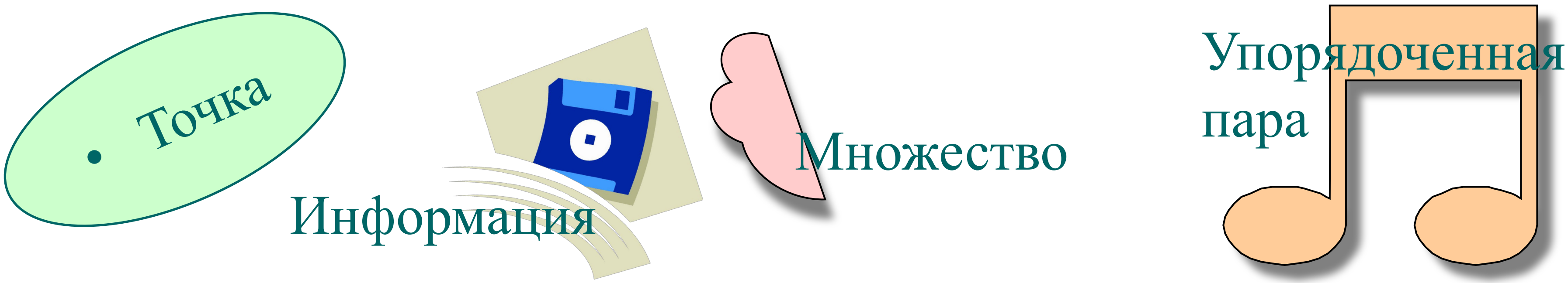
- множество
- упорядоченная пара
- подмножество

Ключевые слова:

- декартово (прямое) произведение множеств
- соответствие
- всюду определенность
- сюръективность
- инъективность
- функциональность
- биекция (взаимная однозначность)

ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua

Основные понятия: упорядоченная пара, вектор



- Упорядоченная пара является одним из **первичных** понятий в теории множеств
- Под **упорядоченной парой** следует понимать двухэлементное упорядоченное множество
- **Вектор** (**кортеж**) представляет собой упорядоченный набор элементов

  $\mathbf{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, где $\mathbf{x_i}$ – **координаты** (**компоненты**)
- **Длина** (**размерность**) вектора определяется количеством его координат

Проекция вектора на ось

Два вектора x, y одинаковой размерности **равны**, если их соответствующие компоненты равны:

$$x=y \Leftrightarrow \forall i \quad x_i=y_i$$

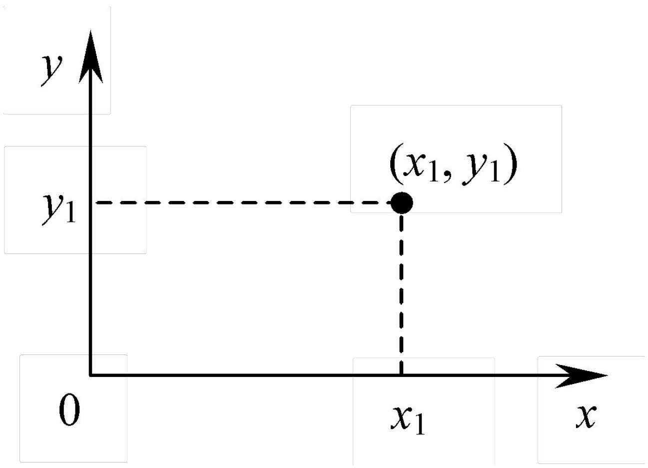
Def: проекцией вектора $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на i-ю ось называется его i-й компонент $Pr_i\, x = x_i$

Def: пусть V – множество векторов одинаковой длины, тогда **проекцией множества V на i-ю ось** называется множество проекций всех векторов из V:

$$Pr_i\, V = \{ Pr_i\, v \mid v \in V \}$$

Примеры

- Координаты точки плоскости образуют упорядоченную пару: на первой позиции – абсцисса, на второй – ордината. Они являются проекциями на первую и вторую оси соответственно



- Дано множество V векторов размерности 3:

$$V = \{ (a,b,c), (c,b,d), (b,b,d) \}$$

Найти проекции множества V на оси

$$Pr_1V=\{a,c,b\}$$

$$Pr_2V=\{b\}$$

$$Pr_3V=\{c,d\}$$

ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua

Декартово (прямое) произведение множеств 1

Def: **прямое (декартово) произведение множеств A и B** есть множество всех упорядоченных пар **(a,b)** таких, что $a \in A$, $b \in B$:

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A,\ b \in B \}$$

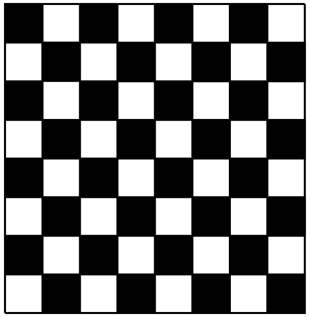
- **Примеры**

1. Декартово произведение множеств $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4,5\}$ есть

$$A \times B = \{ (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5) \}$$

2. $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $B=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$A \times B$ – обозначение клеток шахматной доски



ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua

Декартово (прямое) произведение множеств 2

- Декарту принадлежит координатное представление точек плоскости
- Множество точек плоскости $R \times R = R^2$ есть множество пар вида (a,b), $a \in R$, $b \in R$:

$$R^2 = \{(a,b) \mid a \in R,\ b \in R\}$$

- Декартов квадрат $(A=B)$:

$$A \times A = A^2 = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in A\}$$

Def: прямое произведение n множеств

$$A_1 \times A_2 \times \text{¾} \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = \overline{1,n}\}$$

Мощность декартова произведения множеств:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \bullet |A_2| \bullet \text{¾} \bullet |A_n|$$

Рене Декарт
XVI-XVII вв.

ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua

Соответствия

- **Def: соответствие** – подмножество декартова произведения двух множеств:

$$G \subseteq A \times B$$

- A – **область определения** (**множество отправления**) соответствия G :

$$Pr_1 G = \{\, x \mid (x,y) \in G \,\}$$

- B – **область значений** (**множество прибытия**) соответствия G :

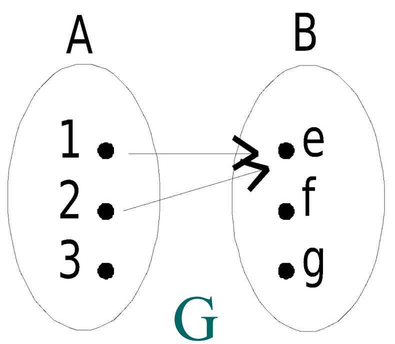
$$Pr_2 G = \{\, y \mid (x,y) \in G \,\}$$

Образы и прообразы

- **Def:** множество всех элементов $y \in B$, соответствующих элементу $x \in A$, называется **образом** элемента x в множестве B при соответствии G.
- **Def:** множество всех элементов $x \in A$, которым соответствует элемент $y \in B$, называется **прообразом** элемента y в множестве A при соответствии G.
- **Пример**

$$A=\{1,2,3\},\ B=\{e,f,g\}$$

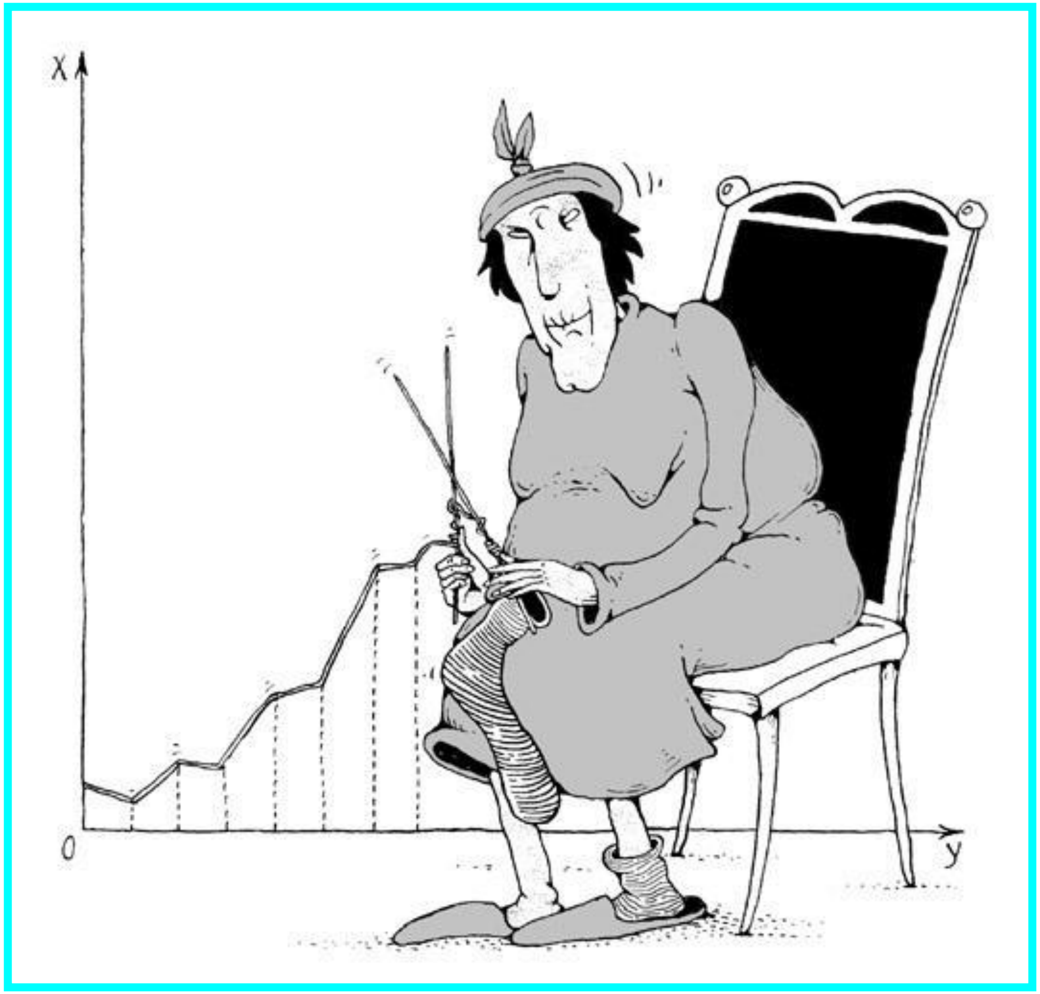
$$G=\{(1,e),\ (2,e)\} \subseteq A \times B$$



прообразы образы

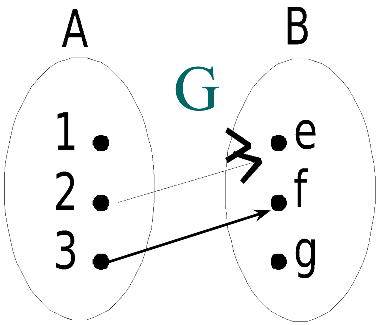
ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua

Time Out

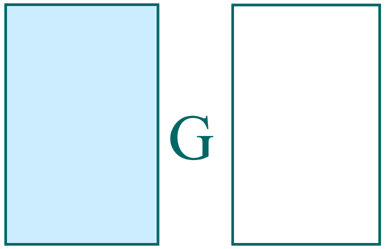


Свойства соответствий. 1

- Всюду определенность: $Pr_1G = A$

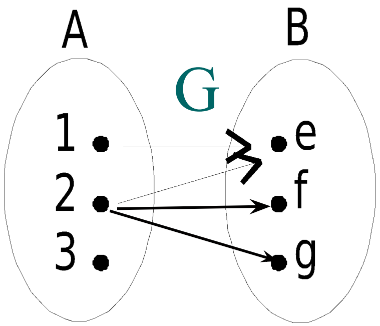


Пример

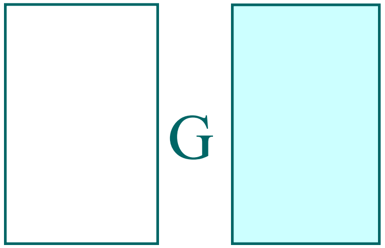


Схема

- Сюръективность: $Pr_2G = B$



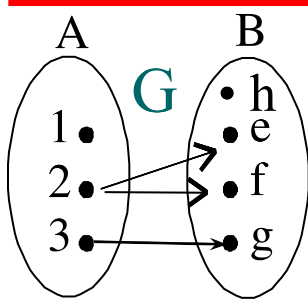
Пример



Схема

Свойства соответствий. 2

- **Инъективность:** $\boxed{in\ \ G: A \to B \Leftrightarrow \forall y \in Pr_2 G \subset B\ \exists! x \in Pr_1 G \subset A}$



Пример

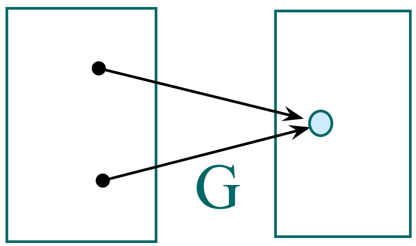
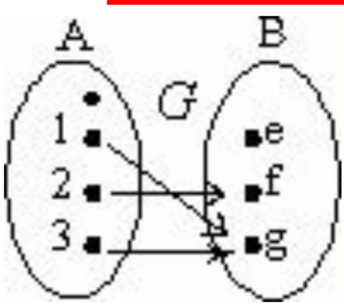


Схема (контрпример)

- **Функциональность:** $\boxed{G: A \to B \Leftrightarrow \forall x \in Pr_1 G \subset A\ \exists! y \in Pr_2 G \subset B}$



Пример

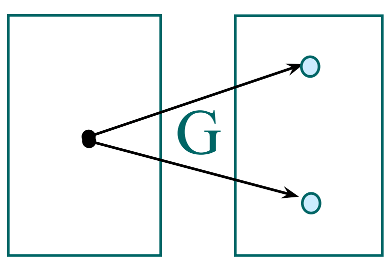


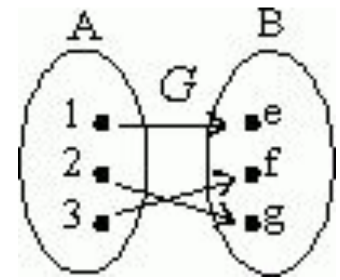
Схема (контрпример)

ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua

Взаимно-однозначное соответствие (биекция). Функция. Отображение

Биекция	=	Всюду определенность	+	Sur	+	In	+	Функциональность

- Соответствие **взаимно-однозначно** (**биективно**), если оно обладает одновременно всеми названными свойствами

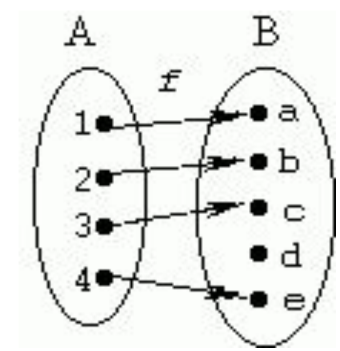


- **Функция** – функциональное соответствие

$$f: A \to B \Leftrightarrow \forall x \in Pr_1 \subset A\ \exists! y \in Pr_2 \subset B:\ f(x) = y$$

x – аргумент, y – значение функции

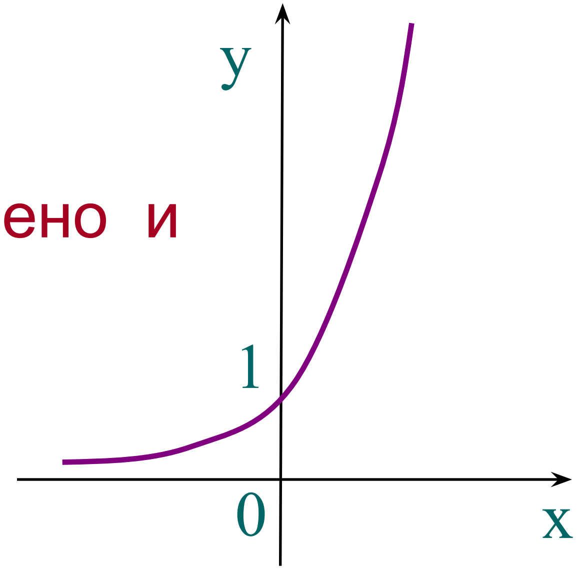
- **Отображение** – всюду определенная функция



Пример

Соответствие $G=\{ (x,y) \mid y = \exp x \} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$

- **всюду определено**: $Pr_1 G = (-\infty; \infty) = \mathbf{R}$
- не **sur**: $Pr_2 G = (0; \infty) \neq \mathbf{R}$
- **in:** образ имеет единственный прообраз
- **функционально**: каждому прообразу соответствует единственный образ
- не является **bi**
- **функция**, так как функционально
- **отображение**, так как всюду определено и функционально



Применение в задачах теории кодирования

Виды кодирования:

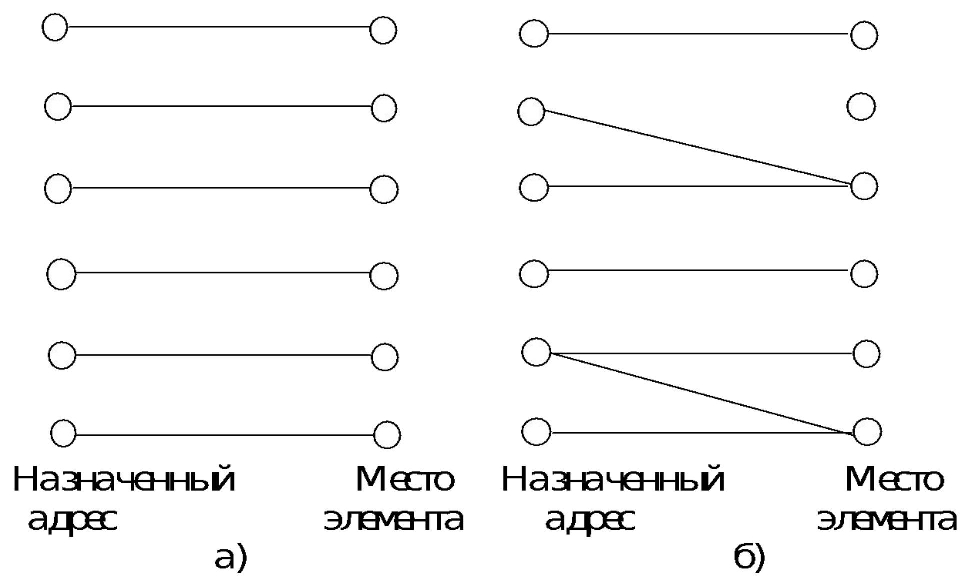
- **кодирование букв азбукой Морзе**
- **представление чисел в системах счисления**
- **секретные шифры**
- **входящие и исходящие номера в деловой переписке**

являются соответствиями между кодируемыми объектами и присваиваемыми им кодами

- **Они обладают всеми свойствами взаимно-однозначного соответствия, кроме сюръективности**
- **Единственность образа и прообраза в кодировании гарантирует однозначность шифровки и дешифровки**
- **Отсутствие сюръективности означает, что не каждый код имеет смысл. Например, кодирование телефонов шестизначными номерами не сюръективно**

Применение в задачах диагностирования

При диагностировании микросхем полупроводниковой памяти работу дешифратора адреса можно представить в виде графа адресной дешифрации, показывающего соответствие между адресами и элементами памяти



Граф адресной дешифрации:
а – случай исправной схемы;
б – случай с неисправностью

Выводы

- Соответствие представляет собой произвольное подмножество декартова произведения двух множеств
- Если множества имеют одинаковое количество элементов, то между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие
- Классификация соответствий применяется в задачах компьютерной инженерии и управления

Множества

↓

Декартово произведение

$A \times B$,

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

↓

Соответствие

$G \subseteq A \times B$

Тест-вопросы. 1

1. Могут ли повторяться компоненты вектора?
а) да; б) нет.
2. Длина вектора определяется:
а) числом различных элементов;
б) числом координат.

3. Какое из соответствий называется взаимно-однозначным:
а) сюръективное, инъективное и функциональное?
б) сюръективное и инъективное?
в) всюду определенное, сюръективное, инъективное и функциональное?

Тест-вопросы. 2

4. Является ли отображение биективным, если оно сюръективно и инъективно?
а) да; б) нет.

5. Отображение А в В это:
а) частично определенная функция;
б) всюду определенная функция;
в) сюръективное соответствие;
г) инъективное соответствие.

ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua

Тест-вопросы. 3

6. Верно ли: $\forall A,B \ \ A\times B=B\times A$?

а) да;

б) нет.

7. Указать проекцию множества A={(3,3,5), (3,3,6), (3,5,5), (3,5,6), (8,3,5), (8,3,6), (8,5,5), (8,5,6)} на третью ось

а) PrA={3,8},

б) PrA={3,5},

в) PrA={5,6}.

8. Верно ли: $|A^n| = |A|^n$?

а) да

б) нет.

9. Соответствие является подмножеством

а) объединения двух множеств;

б) пересечения двух множеств;

в) теоретико-множественной разности двух множеств;

г) декартова произведения нескольких множеств;

д) декартова произведения двух множеств.

ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua