Введение.
Теория множеств.

Преподаватель: Митянина А.В.
ИИТ, ЧелГУ

Введение в дискретную математику

Термин «*дискретная математика*» появился на рубеже 50-х и 60-х годов XX века. Когда появилась сама наука?

Дискретная математика — часть математики, изучающая дискретные математические структуры (множества, выражения, графы,…).

Дискретные величины и непрерывные величины.

- <u>Расстояние между соседними числами</u>: дискретными (нельзя вставить число), непрерывными (можно вставить сколько угодно чисел).

Введение в дискретную математику

Зачем нужна дискретная математика:

- для четкой *формулировки и формализации* понятий, объектов и процессов как природного мира, так и инженерно-технического;
- для постановок различных *прикладных задач*, их формализации и компьютеризации;
- для усвоения и разработки современных *информационных технологий*.

Введение в дискретную математику

Разделы дискретной математики:

- Теория множеств
- Теория графов
- Теория автоматов
- Теория кодирования
- Комбинаторика
- Математическая логика
- И т.д.

Теория множеств. Понятие множества

Термин «*множество*» - фундаментальное понятие.

Под **множеством** интуитивно понимают совокупность определенных, вполне различимых объектов, рассматриваемых как единое целое.

Отдельные объекты, из которых состоит множество, называются **элементами** множества.

<u>!!! Следовательно, элементы множества должны быть:</u>

· вполне различимыми;

· иметь общее свойство.

<u>Договоренность</u>: множества обозначаются заглавными латинскими буквами, элементы множества – строчными.

Теория множеств. Терминология

Если x есть один из объектов множества *A*, то x есть элемент *A*, или, говорят, $\boldsymbol{x}$ **принадлежит *A***.

Обозн. $x \in A$

Аналогично определяется «**непринадлежность**» элемента множеству и обозначается $x \notin A$.

Множество *A* есть **подмножество** множества *B* (обозн. $A \subseteq B$), если каждый элемент *A* является элементом *B*.

То есть, если $x \in A$, то $x \in B$.

Прим. В частности, каждое множество есть подмножество самого себя.

Аналогично. $A \not\subset B$, если существует элемент в множестве *A*, не принадлежащий множеству *B*.

Теория множеств. Примеры

Примеры множеств:

$N = \{1,2,3,4,\dots\}$

M = {сентябрь, октябрь, ноябрь}

P = {Анна, Марина, Иван, Сергей, Ольга}

G = {Анна, Марина, Ольга}, $G \subseteq P$

B = {Иван, Андрей}, $B \not\subseteq P$

Еще примеры множеств?

Теория множеств. Терминология

Пусть A и B – некоторые множества.

A* равно *B (обозн. $A = B$), если для любого $x : x \in A$ тогда и только тогда, когда $x \in B$.

Прим. $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A есть ***собственное подмножество*** B (обозн. $A \subset B$).

Пустым множеством (обозн. $\varnothing$ или {}) называется множество, которое не содержит элементов.

Универсальное множество *U* есть множество, обладающее свойством, что все рассматриваемые множества (в рамках задачи) являются его подмножествами.

Теория множеств. Терминология

Множества могут содержать любое число элементов.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется **конечным**, в противном случае – **бесконечным**. Число элементов в конечном множестве A называется его **мощностью** и обозначается |A|.

Георг Кантор (родоначальником теории множеств) для бесконечных множеств <u>ввел два типа бесконечности</u>:

- Множества, равномощные множеству натуральных чисел N , называются **счетными**.
- Множества, равномощные множеству вещественных чисел R , называются **континуальными**.

<u>Примеры</u>:

Множество дней недели – конечно. W ={Пн,Вт, …,Вс}, |W| = 7.

Множество натуральных чисел N – бесконечно. N = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18, 19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54,55,56,57,58,59, 60,61,62,63,64,65,66,67,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,81,82,83,84,85,86,87,88,89,90,91,92,93,94,95,96,97,98,99, 100,101,102,103,104,105,106,107,108,109,110,111,112,113,114,115,116,117,118,119,120,121,122,123,124,125, 126,127,…

Теория множеств. Терминология

Булеан (*степень множества, показательное множество*) – множество всех подмножеств заданного множества A.

Обозн. 2^A или $P(A)$.

Пример. $A = \{1,2,3\}$.

Тогда $2^A = \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\}, \{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

Замечания:

1. $2^{\varnothing} = \{\varnothing\}$.
2. $|2^A| = 2^{|A|}$.

Теория множеств. Способы задания

1) Задание перечислением.

   Явно указываем список элементов множества.

2) Задание с помощью описания характеристических свойств.

   Указывается свойство(а), которым(и) должны обладать все элементы множества.

   Пример 1. {n| *(n ∈ N) и (10<n<100)*}. Или {n ∈N | *10<n<100*}.

   Пример 2. {n ∈N | *n – простое число*}.

   Пример 3. {n ∈N | n^2*-3n+2=0*}

Теория множеств. Способы задания

3) Задание с помощью порождающей процедуры.

Процедура описывает способ получения элементов множества из уже имеющихся элементов либо других объектов. В таком случае элементами множества являются все объекты, которые могут быть получены с помощью такой процедуры.

Пример. Зададим множество M целых чисел, являющихся степенями двойки.

Порождающая процедура задается 2 правилами:

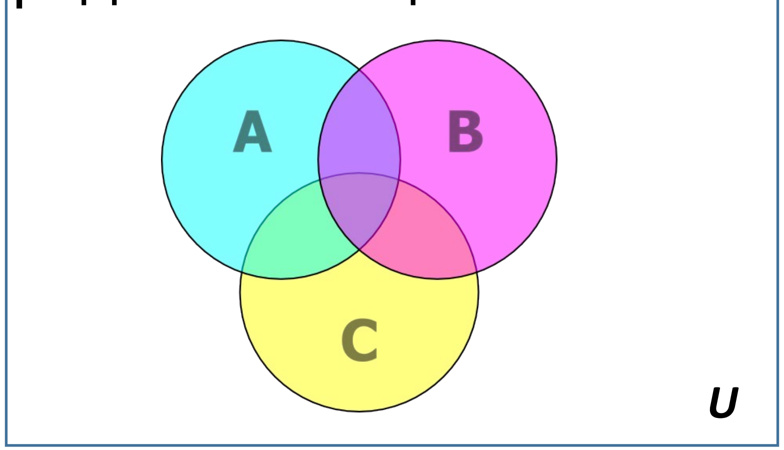
1. а) $1 \in M$; б) если $m \in M$, то $2m \in M$.

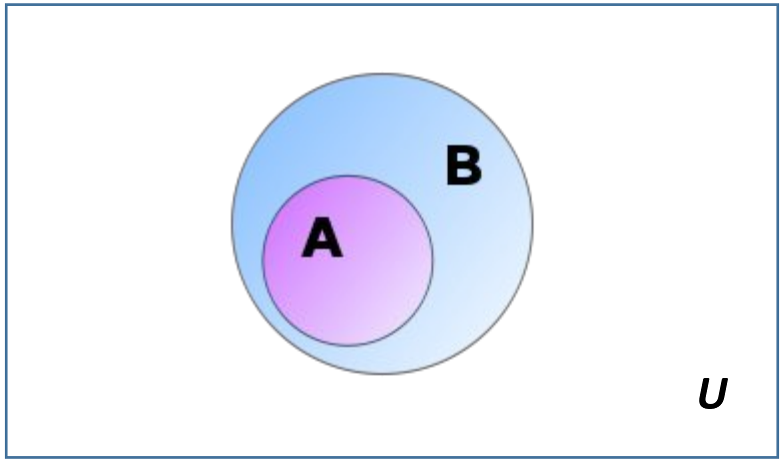
Теория множеств. Диаграмма Эйлера-Венна

Диаграмма Эйлера-Венна – это геометрические представления множеств.

<u>Построение диаграмм заключается в изображении:</u>

- большого прямоугольника, представляющего универсальное множество U ,
- внутри прямоугольника – круги или другие замкнутые фигуры, представляющих множества.





Теория множеств. Операции

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и A, и B.

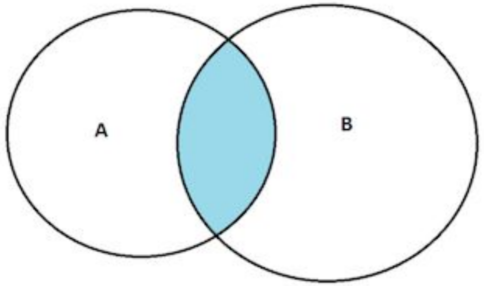
<u>Обозн</u>. $A \cap B$. $A \cap B = \{x : x \in A$ *и* $x \in B\}$.

Пересечение множеств в общем случае:

Если $I = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, то

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k =$$
$$= \{x : x \in A_i \text{ для всех } i \in I\}.$$

Диаграмма Эйлера-Венна



Пересечение множеств А и В

Теория множеств. Операции

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.

<u>Обозн</u>. $A \cup B$. $A \cup B = \{x : x \in A$ *и* $x \in B\}$.

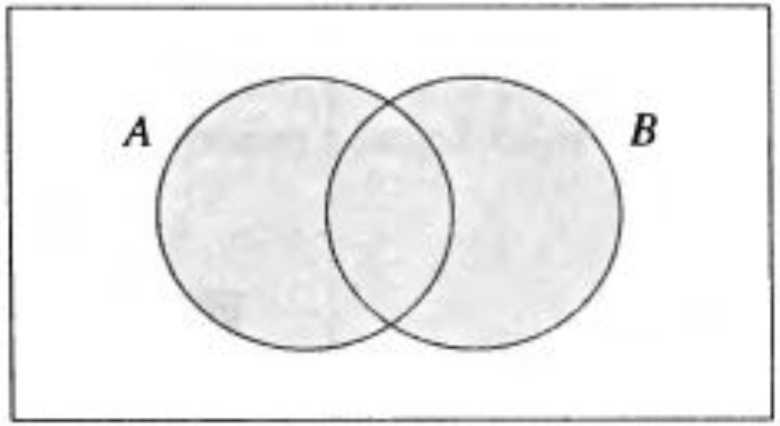
Объединение множеств в общем случае:

Пусть $I = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, то

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k =$$

$$= \{x : \text{существует } i \in I \text{ такое, что } x \in A_i\}.$$

Диаграмма Эйлера-Венна

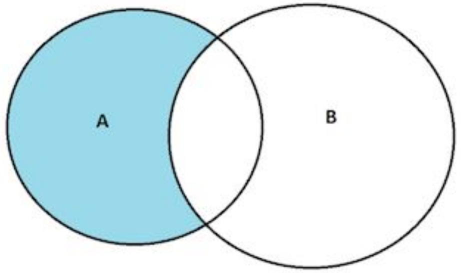


Теория множеств. Операции

Пусть A и B множества. ***Разностью множеств*** $A \backslash B$ называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B.

$$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

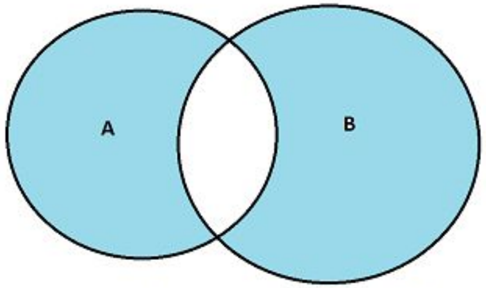
Диаграмма Эйлера-Венна



Симметрическая разность множеств A и B (обозн. A-B) есть множество

$(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

Диаграмма Эйлера-Венна



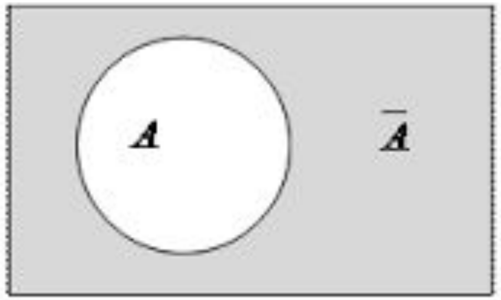
Симметрическая разность множеств A и B

Теория множеств. Операции

Дополнение множества A (обозн. A‘ или Ā) - это множество элементов универсума, которые не принадлежат A.

$$\bar{A} = U - A = \{x : x \in U \text{ и } x \notin A\}.$$

Диаграмма Эйлера-Венна



Теория множеств. Операции

Декартово (прямое) произведение множеств A и B (обозн. $A \times B$) есть множество

$$\{(a, b) : a \in A \text{ и } b \in B\}.$$

Объект (a, b) называется упорядоченной парой с первой компонентой a, второй компонентой b.

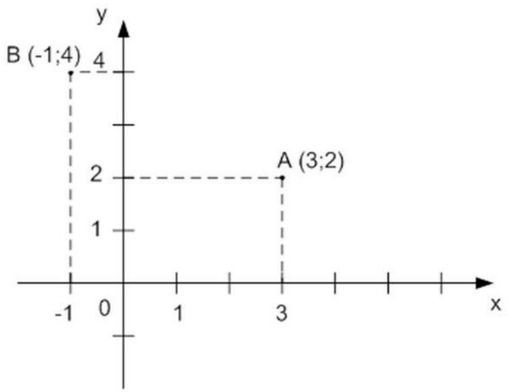
Декартовой (прямой) степенью множеств A (обозн. A^n) является множество A × A ×… × A (декартово произведение n копий множества A).

<u>Пример</u>.

Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, и $B = \{r, s\}$. Тогда

$$A \times B = \{(1, r), (1, s), (2, r), (2, s), (3, r), (3, s)\}.$$

Если каждое из множеств A и B представляет собой множество действительных чисел, то $A \times B$ представляет собой ***декартову плоскость***, на которой упорядоченные пары чисел используются для графического изображения функций.



Теория множеств. Свойства операций

1. Закон двойного дополнения $\overline{\overline{A}} = A$

1. Идемпотентность операций $\cup$ и $\cap$
   $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$

2. Коммутативность операций $\cup$ и $\cap$
   $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$

3. Ассоциативность операций $\cup$ и $\cap$
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Теория множеств. Свойства операций

5. Дистрибутивные законы

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

6. Законы поглощения

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

7. Законы де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Теория множеств. Свойства операций

9. Свойства дополнения

$A \cup \overline{A} = U$

$A \cap \overline{A} = \varnothing$

10. Свойства тождества

$A \cup \varnothing = A$

$A \cap U = A$

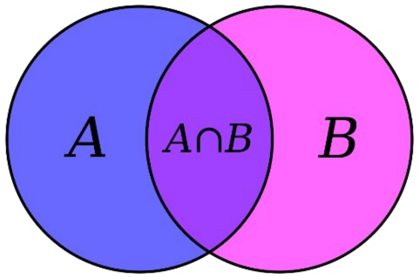
11. Дополнительные свойства

$A \cup U = U$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

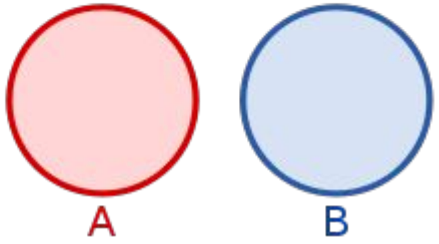
$\overline{U} = \varnothing$ и $\overline{\varnothing} = U$

Теория множеств. Мощность объединения



<u>Мощность объединения двух множеств (общий случай)</u>:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



<u>Мощность объединения двух непересекающихся множеств</u>

<u>($A \cap B = \varnothing$)</u>:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

<u>Мощность объединения произвольного числа множеств</u>:

Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - некоторые конечные множества, то

$$| A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n | = (|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|) +$$
$$+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) - \ldots + $$
$$+ (-1)^{n-1} | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n |$$