Теория расписаний

Минимизация
приоритето-порождающих функций

Минимизация приоритето-порождающих функций

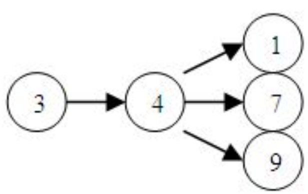
Задача 1/out — tree/ $\sum C_j$

Решить задачу 1/out — tree/ $\sum C_j$, *в которой имеется **10** требований. Требование **3** предшествует требованию **4**, которое, в свою очередь, предшествует требованиям **1, 7 и 9.***

*Длительности обслуживания **p_j** заданы в таблице:*

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_j	4	2	3	5	7	4	1	2	9	4

*Для задачи **1// ∑Cj** решением было бы расписание (**7**, {2, 8}, **3**, {**1**, 6, 10}, **4**, 5, **9**). Однако это расписание нарушает отношения предшествования:*



Минимизация приоритето-порождающих функций

Обозначим

Π_r *- множество всех перестановок $\pi_r = (i_1, \ldots , i_r)$ элементов множества N = {1, ..., n}, r = 1, ..., n*

$\Pi_0 = \{\pi_0\} = \{(\varnothing)\}$

$$\Pi = \bigcup_{r=0}^{n} \Pi_r$$

где U *– операция объединения множеств.*

Минимизация приоритето-порождающих функций

Функция $F(\pi)$**,** *определенная на множестве* Π_n **называется *приоритето-порождающей (ППФ)***, *если существует функция* $\omega(\pi)$, $\pi \in \Pi$, *называемая* ***функцией приоритета***, *которая обладает следующими свойствами:*

для любых перестановок $\pi = (\pi^1, \pi^\alpha, \pi^b, \pi^2) \in \Pi_n$ *и* $\pi' = (\pi^1, \pi^b, \pi^\alpha, \pi^2) \in \Pi_n$

- *из* $\omega(\pi^\alpha) > \omega(\pi^b)$ *следует* $F(\pi) \leq F(\pi')$ *и*
- *из* $\omega(\pi^\alpha) = \omega(\pi^b)$ *следует* $F(\pi) = F(\pi')$.

Минимизация приоритето-порождающих функций

Множество ***N*** *является* ***частично упорядоченным****, если задано отношение предшествования (бинарное, транзитивное, антирефлексивное отношение), представленное графом редукции этого отношения* ***G = (N, U).***

Граф ***G*** *называется* ***графом редукции отношения предшествования****, если он получен из графа отношения частичного порядка путем удаления всех транзитивных дуг.*

Минимизация приоритето-порождающих функций

Многие задачи построения оптимальных расписаний сводятся к минимизации ППФ на частично упорядоченных множествах требований.

Отношения предшествования присутствуют в задачах, где некоторые операции используют результаты других (предшествующих) операций.

Примеры приоритето-порождающих функций

Можно доказать, что:

для задачи $\mathbf{1/prec/\ \Sigma C_j}$ *целевая функция является ППФ с функцией приоритета*

$$\omega(\pi) = |\{\pi\}|/P(\pi)$$

где $\mathbf{P(\pi) = \Sigma p_j}$,

для задачи $\mathbf{1/prec/\ \Sigma w_j C_j}$ *целевая функция является ППФ с функцией приоритета*

$$\omega(\pi) = W(\pi)/P(\pi),$$

где $\mathbf{W(\pi) = \Sigma w_j}$.

Методы минимизации приоритето-порождающих функций на частично упорядоченных множествах

Пусть задано частично упорядоченное множество $\boldsymbol{N}$ с графом редукции отношения частичного порядка $\boldsymbol{G = (N,U)}$.

Задача состоит в минимизации $\boldsymbol{F(\pi)}$, $\boldsymbol{\pi \in \Pi_n(G)}$, где $\boldsymbol{\Pi_n(G)}$ - множество всех перестановок элементов множества $\boldsymbol{N}$, допустимых относительно $\boldsymbol{G}$.

Методы минимизации приоритето-порождающих функций на частично упорядоченных множествах

Введем операции над бесконтурными орграфами, не содержащими транзитивных дуг (в т.ч. графами редукции отношения частичного порядка):

- ***Преобразование I - [t, s] отождествления вершин t и s:*** замена вершин ***t*** и ***s*** одной **составной вершиной [*t, s*]**.

Все входящие (исходящие) дуги в вершины ***t*** и ***s*** заменяются на входящие (исходящие) дуги в составную вершину. Удаляются появившиеся тразитивные дуги.

- ***Преобразование II - (s, t) добавления дуги (s, t)***: добавление дуги *(s, t)* с последующим удалением тразитивных дуг.

Методы минимизации приоритето-порождающих функций на частично упорядоченных множествах

Цепь $(i_1, \ldots, i_k)$, где компоненты i_j являются составными вершинами, называется ***ω-цепью***, если $\omega(i_l) \geq \omega(i_{l+1})$, $l = 1, \ldots, k - 1$.

Если G представляет собой ***ω -цепь***, то перестановка $(i_1, \ldots, i_k)$ является оптимальной.

Если граф G – лес, то существует последовательность преобразований ***I*** и ***II,*** переводящая G в ***ω -цепь.***

Алгоритм минимизации ППФ на частично упорядоченных множествах

Задача ***1/out — tree/ F***, где ***F*** – ППФ.

Алгоритм минимизации ППФ на множестве $\mathbf{\Pi_n(G)}$, где ***G*** - ***набор выходящих деревьев*** :

- 1. Вычисляем ***приоритеты*** не имеющих потомков (*висячих) вершин*.
- 2. Если ***G*** не есть набор изолированных вершин, то находим в ***G*** вершину i_0, называемую ***опорной***, все **прямые потомки которой** являются висячими.

Пусть этим потомкам соответствуют ***ω-цепи*** $C_1, \ldots, C_l$.

Построим ***ω-цепь*** $(i_1, \ldots, i_v)$, упорядочив все (составные) вершины цепей $C_1, \ldots, C_l$ по невозрастанию приоритетов.

Алгоритм минимизации ППФ на частично упорядоченных множествах (продолжение)

Построим цепь $(i_0, i_1, ..., i_v)$.

- Если $\omega(i_0) > \omega(i_1)$, то цепь $(i_0, i_1, ... ,i_v)$ является ***ω-цепью***.
- Если $\omega(i_0) \le \omega(i_1)$, то объединяем i_0 и i_1 в составную вершину $[i_0, i_1]$.

Далее сравниваем $\omega(i_0, i_1)$ и $\omega(i_2)$ и, в случае необходимости, объединяем $[i_0, i_1]$ и i_2 и т.д.

Процесс продолжается до тех пор, пока цепь $(i_0, i_1, ..., i_v)$ не будет преобразована в некоторую ω-цепь $C^0 = ([i_0, i_1, \ldots, i_k], i_{k+1}, ... , i_v)$.

Удаляем из G всех потомков вершины i_0 и ставим ей в соответствие ω-цепь C^0.

Алгоритм минимизации ППФ на частично упорядоченных множествах (продолжение)

- 3. Повторяем описанный процесс до тех пор, пока не будет построен граф, состоящий из **изолированных вершин**.

Последовательность (составных) вершин соответствующих ***ω-цепям****, в которой вершины упорядочены по невозрастанию приоритетов, является* ***оптимальным решением задачи****.*

Алгоритм минимизации ППФ на частично упорядоченных множествах (продолжение)

В случае, когда граф **G** *–* ***входящее дерево****, в качестве опорной выбирается вершина i_0, все непосредственные* ***предшественники*** *которой* $\boldsymbol{i_1, \dots, i_v}$ ***не имеют предшественников****.*

Формируется цепь $(\boldsymbol{i_1, \dots, i_v}, i_0)$*. Она преобразуется в* ***ω-цепь*** *путем сравнения* $\boldsymbol{\omega(i_0)}$ *и* $\boldsymbol{\omega(i_v)}$*. Составная вершина* $[\boldsymbol{i_v}, i_0]$ *образуется, если* $\boldsymbol{\omega(i_v) \leq \omega(i_0)}$*.*

Далее процесс аналогичен случаю выходящего дерева.

Пример реализации алгоритма.

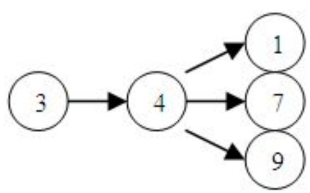
Задача 1/out — tree/ ∑Cj

Решить задачу 1/out — tree/ ∑Cj, *в которой имеется* ***10*** *требований. Требование* ***3*** *предшествует требованию* ***4,*** *которое, в свою очередь, предшествует требованиям* ***1, 7 и 9.***

Длительности обслуживания $\boldsymbol{p_j}$ *заданы в таблице:*

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_j	4	2	3	5	7	4	1	2	9	4

Граф отношений предшествования:



Пример реализации алгоритма (продолжение).

1. *Вычислим значение функции приоритета для висячих вершин.*

Функция приоритета:

$\boldsymbol{\omega}$ **(***π***) = |{***π***}|/P (***π***)** *где* **P (***π***) = Σp$_j$,**

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω	1/4	1/2			1/7	1/4	1	1/2	1/9	1/4

Пример реализации алгоритма (продолжение).

2а. Опорной вершиной является вершина ***4****, все прямые потомки которой* ***1****,* ***7*** *и* ***9*** *являются висячими.*

ω-цепь для потомков вершины ***4****:* ***(7, 1, 9)****, поскольку значения функции* ***ω*** *вершин равны, соответственно,* ***(1, 1/4, 1/9)***

Пример реализации алгоритма (продолжение).

2б. Цепь ***(4, 7, 1, 9) не является ω-цепью****, поскольку значения функции* ***ω*** *вершины 4 равно* **1/5<1**.

Объединяем вершины ***4*** *и* ***7*** *в составную вершину* **[*4, 7*].**

Приоритет составной вершины **[*4, 7*]** *равен 2/(5+1)=****1/3****. Цепь* ***([4, 7], 1, 9) является ω-цепью****, т.к.* **1/3>1/4**.

Удаляем из графа **G** *всех потомков вершины* **4** *и ставим ей в соответствие* ***ω-цепь.***

Пример реализации алгоритма (продолжение).

3а. *Опорной вершиной является вершина **3**, **ω-цепь** для потомков вершины **3: (**[4, 7]**, 1, 9)***

Пример реализации алгоритма (продолжение).

3б. *Цепь* **(3, [4, 7], 1, 9)** ***не является ω-цепью*** *поскольку значения функции* ***ω*** *вершины* ***3*** *равно* **1/3=1/3***.*

Объединяем вершины ***3*** *и* **[4, 7]** *в составную вершину* **[3, 4, 7].** *Приоритет составной вершины* **[3, 4, 7]** *равен 3/(3+5+1)=****1/3****.*

Цепь **([3, 4, 7], 1, 9)** ***является ω-цепью****, т.к.* **1/3>1/4***.*

Удаляем из графа ***G*** *всех потомков вершины* ***3*** *и ставим ей в соответствие* ***ω-цепь****.*

Пример реализации алгоритма (продолжение).

4. *Построен граф, состоящий из изолированных вершин.*

*Последовательность (составных) вершин соответствующих **ω-цепям**, в которой вершины **упорядочены по невозрастанию приоритетов (ω)**:*

({2, 8}, 3, 4, 7, {1, 6, 10}, 5, 9).

Данная последовательность является оптимальной.

Ответ: ({2, 8}, 3, 4, 7, {1, 6, 10}, 5, 9), *значение целевой функции равно **174.***

j	*{2*	*8}*	*3*	*4*	*7*	*{1*	*6*	*10}*	*5*	*9*	
p	*2*	*2*	*3*	*5*	*1*	*4*	*4*	*4*	*7*	*9*	*∑Cj=*
Cj	*2*	*4*	*7*	*12*	*13*	*17*	*21*	*25*	*32*	*41*	*174*