ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЗАДАНИЯХ ЕГЭ

Учитель математики ГБОУ гимназии №1 г. Похвистнево Антонова Г.В.

1. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

Решение: Обозначим через А событие «команда России во второй группе». Тогда количество благоприятных событий m = 4 (четыре карточки с номером 2), а общее число равновозможных событий n = 16 (16 карточек).

Тогда, по определению, вероятность

$$P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

2. В чемпионате мира участвуют 15 команд. С помощью жребия их нужно разделить на пять групп по три команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда Италии окажется в третьей группе?

Решение: **Обозначим через А событие «команда Италии в третьей группе». Тогда количество благоприятных событий** $m = 3$ **(три карточки с номером 3), а общее число равновозможных событий** $n = 15$ **(15 карточек).**

Согласно определению вероятности

$$P(A) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

***Ответ:* 0,2.**

3. Конкурс исполнителей проводится в 4 дня. Всего заявлено 80 выступлений – по одному от каждой страны. В первый день 20 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Решение: **Общее число случаев (число всех выступлений) n = 80. Число благоприятных случаев (число выступлений в третий день) m=**$\frac{80-20}{3} = 20$.

Согласно определению вероятности

$$P = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

Антонова Г.В.

4. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов – первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвёртым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Решение: **Общее число случаев (число всех докладов) n = 75. Число благоприятных случаев (число докладов в последний день конференции) m=$\frac{75-17\cdot 3}{2}=12$.**

Согласно определению вероятности

$$P=\frac{12}{75}=\frac{4}{25}=0,16.$$

Ответ: 0,16.

5. **Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений – по одному от каждой страны. В первый день 8 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?**

Решение: **Общее число случаев (число всех выступлений) n = 80. Число благоприятных случаев (число выступлений в третий день конкурса) m=**$\frac{80-8}{4} = 18$.

Согласно определению вероятности

P = $\frac{18}{80} = 0,225$.

Ответ: 0,225.

6. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 50 спортсменов, среди них 5 прыгунов из Испании и 3 прыгуна из Бразилии. Порядок выступлений определяется жребием. Найдите вероятность того, что сорок вторым будет выступать прыгун из Испании.

Решение: **Общее число случаев (сорок вторым может выступать любой из прыгунов) $n = 50$. Число благоприятных случаев (число прыгунов из Испании) $m = 5$.**

Согласно определению вероятности

$$P = \frac{5}{50} = 0,1.$$

***Ответ:* 0,1.**

7. В классе 21 шестиклассник, среди них два друга – Митя и Петя. Класс случайным образом делят на три группы, по 7 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Митя и Петя окажутся в одной и той же группе.

Решение: В каждой группе 7 человек. Будем считать, что Митя уже занял место в одной группе. Обозначим через А событие «Петя оказался в той же группе». Для Пети останется n = 20 свободных мест, из них m = 6 мест.

Вычисляем вероятность

$$P(A) = \frac{6}{20} = 0,3.$$

Ответ: 0,3.

8. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

Решение: **Общее число случаев (число участников, исключая самого Руслана Орлова) n = 26 – 1 = 25.**

Число благоприятных случаев (число участников из России, исключая самого Руслана Орлова)

m = 10 – 1 = 9.

По определению вероятности P = $\frac{9}{25} = 0,36$.

Ответ:* *0,36.

9. Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (одним из выстрелов).

Решение: **У стрелка есть две возможности: поразить мишень при первом выстреле, либо поразить мишень при втором выстреле (при неудачном первом выстреле). Вероятность поражения мишени при первом выстреле P_1 =0,6. Вероятность того, что первым выстрелом мишень не будет поражена $P_{21}=1-0,6=0,4$.**

Вероятность поражения мишени при втором выстреле $P_{22}=$ 0,6. Согласно теореме умножения вероятностей, вероятность того, что первый выстрел будет неудачным, но мишень будет поражена при втором выстреле $P_2=P_{21}\cdot P_{22}=0,4\cdot 0,6=0,24$.

(продолжение решения 6 задачи)

Согласно теореме сложения вероятностей, вероятность того, что мишень будет поражена $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 = 0,6 + 0,24 = 0,84$.

Второй способ решения задачи:

Вероятность поражения при одном выстреле равна P(A) = 0,6. Вероятность непопадания P($\bar{\mathrm{A}}$)=1 − 0,6 = 0,4. Согласно теореме умножения вероятностей вероятность промахнуться равна P($\bar{\mathrm{A}}$)· P($\bar{\mathrm{A}}$) =0,4·0,4 = 0,16. Тогда вероятность поражения (одним из выстрелов) P=1 – 0,16 = 0,84.

Ответ: 0,84.

10. Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 25% этих стёкол, вторая – 75%. Первая фабрика выпускает 4% бракованных стёкол, а вторая – 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение: Если обозначить всё количество стёкол для автомобильных фар за x, то первая фабрика выпускает 0,25x стёкол, а вторая – 0,75x. Количество выпуска бракованных стёкол первой фабрикой равно $0{,}04 \cdot 0{,}25x$, второй – $0{,}02 \cdot 0{,}75x$. Следовательно, количество всех бракованных стёкол равно $(0{,}04 \cdot 0{,}25x + 0{,}02 \cdot 0{,}75x) = 0{,}025x$.

По определению вероятности $P = \frac{0{,}025x}{x} = 0{,}025$.

Ответ: 0,025.

11. Два завода выпускают одинаковые автомобильные предохранители. Первый завод выпускает 40% предохранителей, второй – 60%. Первый завод выпускает 4% предохранителей, а второй – 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный в магазине предохранитель окажется бракованным.

Решение: Если обозначить всё количество предохранителей за x, то первый завод выпускает 0,4x предохранителей, а второй – 0,6x. Количество выпуска бракованных предохранителей первым заводом равно $0{,}04 \cdot 0{,}4x$, вторым $- 0{,}03 \cdot 0{,}6x$. Следовательно, количество всех бракованных стёкол равно $(0{,}04 \cdot 0{,}4x + 0{,}03 \cdot 0{,}6x) = 0{,}034x$.

По определению вероятности $P = \frac{0{,}034x}{x} = 0{,}034$.

Ответ: 0,034.

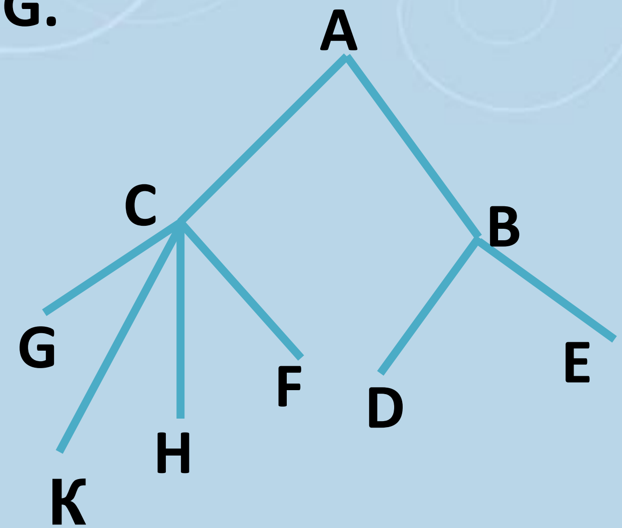
12. На соревнования по метанию ядра приехали 5 спортсменов из Сербии, 7 из Хорватии и 3 из Норвегии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двенадцатым будет выступать спортсмен из Норвегии

Решение: **Общее число случаев (число всех спортсменов) n = 15. Число благоприятных случаев (число спортсменов из Норвегии) m = 3.**

Согласно определению вероятности P = $\frac{3}{15} = 0,2.$

***Ответ:* 0,2.**

13. Павел Иванович совершает прогулку из точки А по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Найдите вероятность того, что Павел Иванович попадёт в точку G.



Решение: Для того чтобы пенсионер пришёл в точку G, должны произойти два события: на первой развилке он должен направиться из точки А в точку С (с вероятностью $p_1 = \frac{1}{2}$), на второй развилке – из точки С в точку G (с вероятностью $p_2 = \frac{1}{4}$).

Тогда, согласно теореме умножения вероятностей, маршрут А-С-G пенсионер выберет с вероятностью $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0,125$.

Ответ: 0,125.

14. Вася, Петя, Коля и Лёша бросили жребий – кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Петя.

Решение: **Обозначим через *А* событие «начинает игру Петя». Тогда количество благоприятствующих исходов m = 1, а общее число равновозможных исходов *n* (начинает игру Петя, начинает игру Вася, начинает игру Коля, начинает игру Лёша).**

Вероятность Р(А) = $\frac{1}{4} = 0,25.$

Ответ: 0,125.

15. Катя дважды бросает игральный кубик. В сумме у неё выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что при одном из бросков выпало 5 очков.

Решение:

Общее число случаев n = 5 ((1,5); (5,1); (2,4); (4,2); (3,3)). Число благоприятных случаев (комбинации (1,5); (5,1)) m = 2.

Согласно определению вероятности P = $\frac{2}{5} = 0,4$.

Ответ: 0,4.

Антонова Г.В.

16. Люда дважды бросает игральный кубик. В сумме у неё выпало 9 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало 5 очков.

Решение: **Общее число случаев *n* = 4 ((3,6); (4,5); (5,4); (6,3)). Число благоприятных случаев *m* = 1 (комбинация (5,4)).**

Согласно определению вероятности P = $\frac{1}{4} = 0,25.$

***Ответ:* 0,25.**

17. Таня и Нина играют в кости. Они бросают кость по одному разу. Выигрывает тот, кто выбросил больше очков. Если очков выпало поровну, то наступает ничья. В сумме выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что Таня выиграла.

Решение: **Общее число случаев *n* = 5 ((1,5); (2,4); (3,3); (4,2); (5,1)). Число благоприятных случаев *m* = 2 (комбинации (1,5); (2,4) или (4,2); (5,1)).**

По определению вероятности P = $\frac{2}{5} = 0,4.$

***Ответ:* 0,4.**

18. **Найдите вероятность того, что при бросании двух кубиков на каждом выпадет менее 4 очков.**

Решение: Общее число случаев $n = 6 \cdot 6 = 36$. Число благоприятных случаев $m = 3 \cdot 3$. Согласно определению вероятности $P = \frac{9}{36}$=0,25.

Ответ: 0,25.

19. **При двукратном бросании игрального кубика в сумме выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что в первый раз выпало меньше 3 очков.**

Решение: Общее число случаев $n = 5$ (комбинации (1,5); (5,1); (2,4); (4,2); (3,3)). Число благоприятных случаев (комбинации (1,5); (2,4)) $m = 2$.

Согласно определению вероятности $P = \frac{2}{5} = 0,4$.

Ответ: 0,4.

20. Перед началом футбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Меркурий» по очереди играет с командами «Марс», «Юпитер» и «Уран». Найдите вероятность того, что во всех матчах право владеть мячом выиграет команда «Меркурий».

Решение: 1способ. Обозначим ситуацию, когда в матче первая владеет мячом команда «Меркурий» за «1», обратную ситуацию за «0». Всего будет сыграно 3 матча. Общее число случаев (комбинации 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111) n = 8. Число благоприятных случаев (комбинация 100) m = 1. Согласно определению вероятности $P=\frac{1}{8}=0{,}125$.

***Ответ:* 0,125.**

2 способ решения:

Обозначим через А событие «команда «Меркурий» начинает игру первой», тогда противоположное событие $\bar{\mathrm{A}}$ означает «команда «Меркурий» не начинает игру первой». Из условия задачи следует, что вероятностьP(A) = 0,5,

тогда P($\bar{A}$)=1 – 0,5. Событие С «команда «Меркурий» будет начинать игру во всех матчах» является произведением независимых событий С =А· А· А. По [формуле](#) умножения вероятностей независимых событий имеем: P(C) = 0,5 · 0,5 · 0,5=0,125.

Ответ: 0,125.

21. Перед началом футбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Хуторянка» по очереди играет с командами «Радуга», «Дружба», «Заря» и «Воля». Найдите вероятность того, что команда «Хуторянка» будет первой владеть мячом только в первых двух играх.

Решение: Обозначим через А событие «команда «Хуторянка» начинает игру первой», тогда противоположное событие $\overline{A}$ означает «команда «Хуторянка» не начинает игру первой». Из условия задачи следует, что вероятностьP(A) = 0,5,

тогда $P(\overline{A}) = 1 - 0,5$. Событие C «команда «Хуторянка» будет первой владеть мячом только в первых двух играх» является произведением независимых событий $C = A \cdot A \cdot \overline{A} \cdot \overline{A}$. По формуле умножения вероятностей независимых событий имеем: $P(C) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,0625$.

Ответ: 0,0625.

22. Перед началом матча по водному поло судья устанавливает мяч в центр бассейна, и от каждой команды к мячу плывёт игрок, чтобы первым завладеть мячом. Вероятность выиграть мяч у игроков равны. Команда «Русалочка» по очереди играет с командами «Наяда», «Ундина» и «Ариэль». Найдите вероятность того, что во втором матче команда «Русалочка» выиграет мяч в начале игры, а в двух других проиграет

Решение: Обозначим через A событие «команда «Русалочка» первой завладеет мячом», тогда противоположное событие $\overline{A}$ означает «команда «Русалочка» не завладеет мячом». Из условия задачи следует, что вероятность $P(A) = 0,5$, тогда $P(\overline{A}) = 1 - 0,5$.

Событие $C = A \cdot A \cdot \overline{A}$. По формуле умножения вероятностей независимых событий имеем:

$P(C) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$.

Ответ: 0,125.

23. В некоторой местности утро в июле может быть либо ясным, либо пасмурным. Наблюдения показали:

1) Если июльское утро ясное, то вероятность дождя в этот день 0,1.

2) Если июльское утро пасмурное, то вероятность дождя в течение дня равна 0,5.

3) Вероятность того, что утро в июле будет пасмурным, равна 0,2.

Найдите вероятность того, что в случайно взятый июльский день дождя не будет.

Решение: 1) Июльское утро может быть либо ясным (P_{11}= 1 – 0,2 = 0,8), либо пасмурным (с вероятностью P_{21} = 0,2). Согласно теореме умножения вероятностей, вероятность P_1 того, что июльское утро будет ясным и дождя не будет, равна произведению вероятностей P_{11}= 0,8 и P_{12}= 1 – 0,1 = 0,9 (дождя не будет при ясном утре): P_1 = $P_{11} \cdot P_{12}$ = 0,8 · 0,9 = 0,72.

2) Вероятность того, что июльское утро будет пасмурным и дождя не будет, равна произведению вероятностей P_{21} = 0,2 (утро будет пасмурным) и P_{22} = 1 – 0,5 = 0,5 (дождя не будет при пасмурном утре): P_2 = $P_{21} \cdot P_{22}$ = 0,2 · 0,5 = 0,1.

3) Согласно теореме сложения вероятностей, вероятность того, что в случайно взятый июльский день дождя не будет $P = P_1 + P_2$ =0,72 + 0,1 = 0,82.

***Ответ:* 0,82.**

24. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение: Первый способ. Обозначим через *A* событие «кофе закончится в первом автомате», через *B* *событие* «кофе закончится во втором автомате». Событие *C* «кофе закончится хотя бы в одном автомате» является их суммой *C = A + B*.

Из условия задачи известны вероятности $P(A) = P(B) = 0,3$ и $P(A \cdot B) = 0,12$. По [формуле]сложения вероятностей имеем:

P(C)=P(A) +P(B) – P(A·B) = 0,3 + 0,3 – 0,12 = 0,48.

Значит, вероятность противоположного события $\overline{C}$ «кофе останется в обоих автоматах» равна 1 – 0,48 = 0,52.

Решение: Второй способ решения задачи 16.

Вероятность того, что кофе останется в первом автомате, равна $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. Вероятность того, что кофе останется во втором автомате, равна $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

Вероятность того, что кофе останется в первом или во втором автомате равна $P(\overline{C}) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$. Поскольку

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A} + \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cdot \overline{B}),$$

то имеем: 0,88 = 0,7 + 0,7 – x, откуда искомая вероятность x = 0,52.

***Ответ*: 0,52.**

25. В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 7 из них встречается вопрос о производной. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не встретится вопрос о производной.

Решение: Общее число случаев (всего билетов) n = 20. Число благоприятных случаев (количество билетов, в которых не встречается вопрос о производной) m = 20 – 7 = 13.

Согласно определению вероятности $P = \frac{13}{20} = 0,65.$

Ответ: 0,65.

26. В классе 7 мальчиков и 14 девочек. 1 сентября случайным образом определяют двух дежурных на 2 сентября, которые должны приготовить класс к занятиям. Найдите вероятность того, что будут дежурить два мальчика.

Решение: Вероятность выбрать первого мальчика-дежурного

(n = 21, m =7) $P_1 = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$.

Вероятность выбрать второго мальчика-дежурного

(n = 20, m = 6) $P_2 = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

Вероятность того, что будут дежурить два мальчика, равна

$$P = P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = 0,1.$$

Ответ: 0,1.

27. Валя выбирает случайное трёхзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 51.

Решение: Общее число случаев (количество всех трёхзначных чисел) $n = 999 - 100 + 1 = 900$. Первое трёхзначное число, которое делится на 51, равно $102 = 51 \cdot 2$.

Последнее трёхзначное число, которое делится на 51, равно $969 = 51 \cdot 19$.

Тогда число благоприятных случаев $m = 19 - 2 + 1 = 18$. Согласно определению вероятности

$$P = \frac{18}{900} = 0,02.$$

***Ответ:* 0,1.**

Формула классической вероятности

Вероятность – есть число, характеризующее возможность наступления события.

Определение. **Вероятностью Р события А называют отношение числа *m* исходов, благоприятных этому событию, к общему числу *n* исходов** $P(A) = \frac{m}{n}$

Сумма вероятностей всех элементарных событий случайного эксперимента равна 1.

Несовместные события. Формула сложения вероятностей

Определение. **События называют несовместными, если они не могут происходить одновременно в одном и том же испытанию**

Например, выигрыш, ничейный исход и проигрыш одного игрока в одной партии в шахматы – три несовместных события.

Теорема. **Вероятность суммы двух несовместных событий А и В (появление хотя бы одного события) равна сумме вероятностей этих событий: Р (А+В)=Р(А) + Р (В).**

Теорема обобщается на любое число попарно несовместных событий

Следствие.

Сумма вероятностей противоположных событий А и $\overline{A}$ равна 1: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Антонова Г.В.

Совместные события. Формула сложения вероятностей (формула для вероятности суммы двух событий в общем случае (не обязательно несовместных))

Определение. **События называют совместными, если они могут происходить одновременно. Например, при бросании двух монет выпадение решки на одной не исключает появление решки на другой монете.**

Теорема. **Вероятность суммы двух совместных событий A и B (появление хотя бы одного события) равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления, то есть** $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Независимые события. Формула умножения вероятностей

Определение. **Два случайных события называют *независимыми,* если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого. В противном случае события называют *зависимыми.***

Теорема. **Вероятность произведения (совместного появления) двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.**

Использованная литература:

1. **ЕГЭ-2014: Математика: самое полное издание типовых вариантов заданий/ авт.-сост. И.В.Ященко, И.Р. Высоцкий; под ред. А.Л.Семёнова, И.В.Ященко.- Москва: АСТ: Астрель, 2014.**
2. **А.Г.Корянов , Н.В.Надежкина. Задача В10. ЕГЭ. Математика, 2014. Элементы теории вероятностей (интернет-ресурс http://alexlarin.net/ege/2014/b102014.html)**
3. **ЕГЭ: 3000 задач с ответами по математике. Все задания группы В/А.Л.Семёнов, И.В.Ященко и др.; под ред. А.Л.Семёнова, И.В.Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2014.**
4. **Источник шаблона презентации : http://pedsovet.su/load/321-1-0-32889**