

# Тетраэдр. Параллелепипед. Задачи на построение сечений.

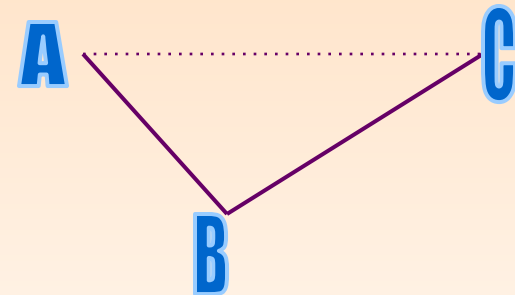


**МОУ СОШ №10**  
**г. Красногорска,**  
**учитель математики**  
**Трапезникова Н.К.**

**Далее**

# Тетраэдр

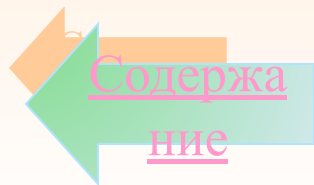
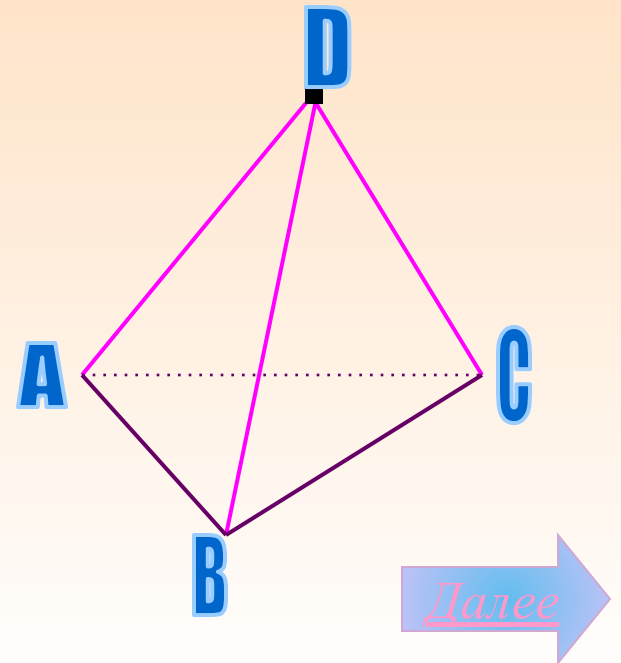
- Рассмотрим произвольный треугольник  $ABC$  и точку  $D$ , не лежащую в плоскости этого треугольника.



D

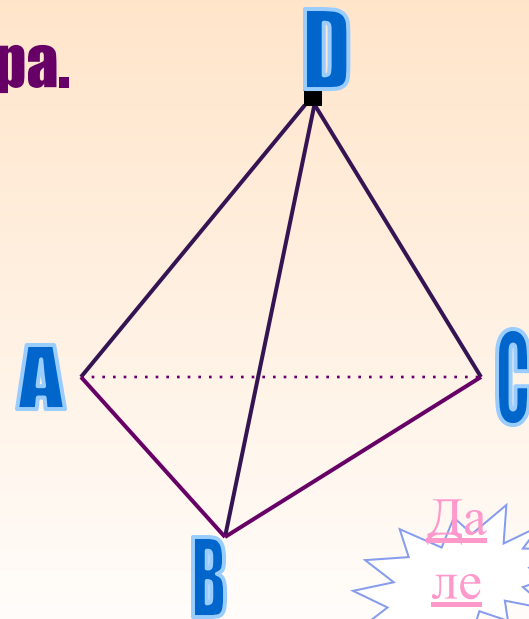
# Тетраэдр

- Соединив точку **D** отрезками с вершинами треугольника **ABC**, получим треугольники **DAB**, **DBC** и **DCA**.

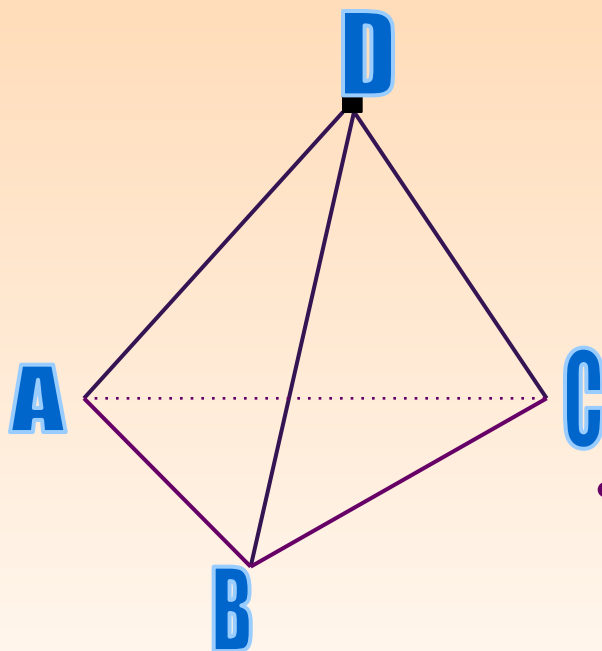


# Определения.

- Поверхность, составленная из четырёх треугольников  $ABC$ ,  $DAB$ ,  $DVC$  и  $DSA$ , называется **тетраэдром** и обозначается так:  **$DABC$** .
- Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются **гранями**, их стороны - **рёбрами**, а вершины - **вершинами** тетраэдра.



# Определения



- Тетраэдр имеет четыре грани, шесть рёбер и четыре вершины. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются противоположными. На рисунке противоположными являются рёбра **AD** и **BC**, **BD** и **AC**, **CD** и **AB**.
- Иногда выделяют одну из граней тетраэдра и называют её основанием, а три другие - боковыми гранями.

Содержание

Далее

- Тетраэдр изображается обычно так, как показано на рисунках 34 и 35, т.е. в виде выпуклого или невыпуклого четырёхугольника с диагоналями. При этом штриховыми линиями изображаются *невидимые рёбра*. На рисунке 34 невидимым является только ребро **AC**, а на рисунке 35 - рёбра **EK**, **KF** и **KL**.

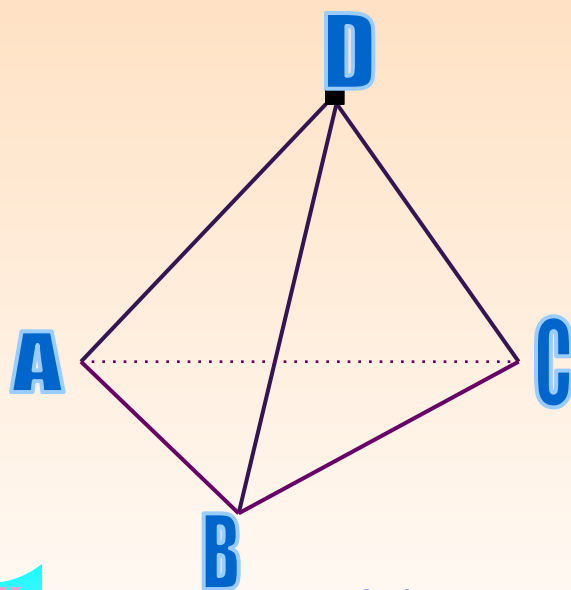


Рис.34.

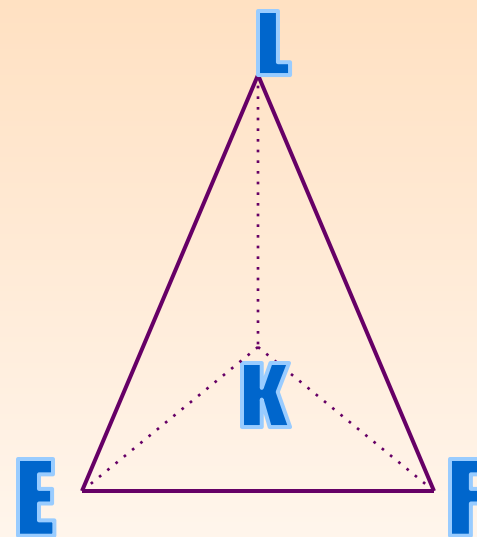
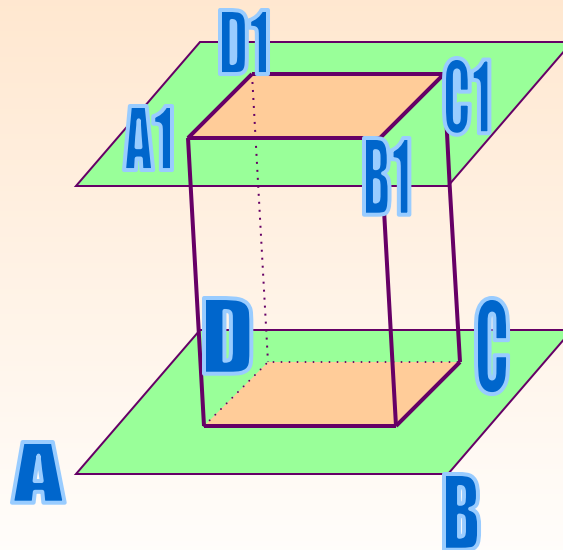


Рис.35.

# Параллелепипед.

- Рассмотрим два равных параллелограмма  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ , расположенных в параллельных плоскостях так, что отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  параллельны.



[Содержание](#)

[Далее](#)

# Содержание

*Тетраэдр*

*Параллелепипед*

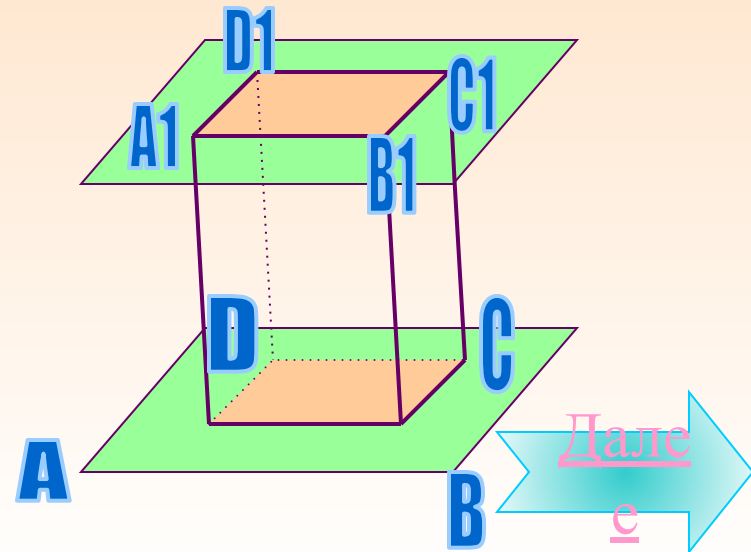
*Задачи  
на построение  
сечений*

**Выход**



# Параллелепипед

- Четырёхугольники  $ABB_1A_1$ ,  $BCC_1B_1$ ,  $CDD_1C_1$ ,  $DAA_1D_1$  также являются параллелограммами, т.к. каждый из них имеет попарно параллельные противоположные стороны (в четырёхугольнике  $ABB_1A_1$  стороны  $AA_1$  и  $BB_1$  параллельны по условию, а стороны  $AB$  и  $A_1B_1$  - по свойству линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей).



# Определения

- Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  и четырёх параллелограммов, называется параллелепипедом и обозначается так:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .
- Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются гранями, их стороны - рёбрами, а вершины параллелограммов - вершинами параллелепипеда.

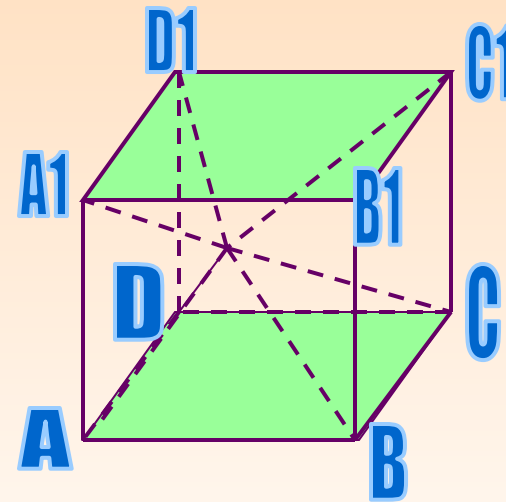
# Определения

- Параллелепипед имеет шесть граней, двенадцать рёбер и восемь вершин.
- Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются смежными, а не имеющие общих рёбер - противоположными.

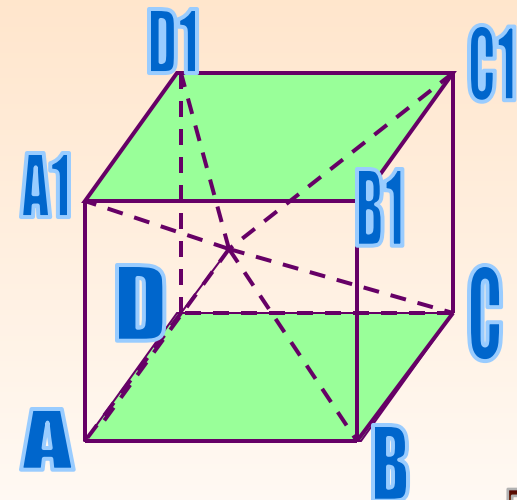
Содержание

Далее

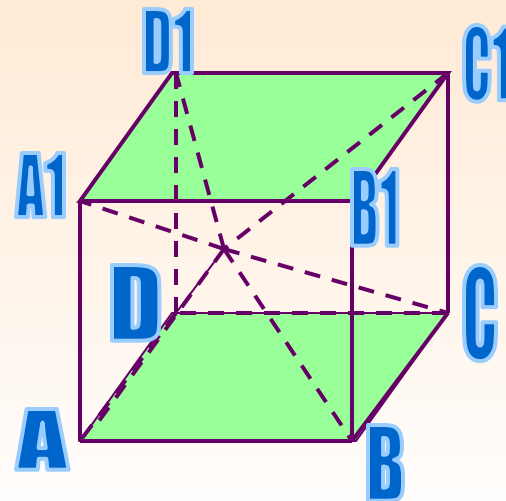
- На рисунке противоположными являются грани  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $ABB_1A_1$  и  $DCC_1D_1$ ,  $ADD_1A_1$  и  $BCC_1B_1$ . Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются противоположными.



- Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется **диагональю** параллелепипеда.
- Каждый параллелепипед имеет **четыре** диагонали. На рисунке диагоналями являются отрезки  **$AC_1$** ,  **$BD_1$** ,  **$CA_1$**  и  **$DB_1$** .



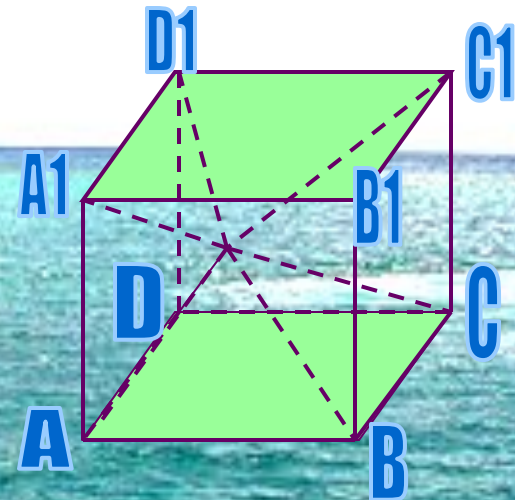
- Часто выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их основаниями, а остальные грани - боковыми гранями параллелепипеда.
- Рёбра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называются боковыми рёбрами. Если выбрать грани  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ , то боковыми гранями будут параллелограммы, а боковыми рёбрами - отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$ .



# Свойства параллелепипеда

- 1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.

- Докажем, параллельность и равенство граней  $ABB_1A_1$  и  $DCC_1D_1$  параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ .

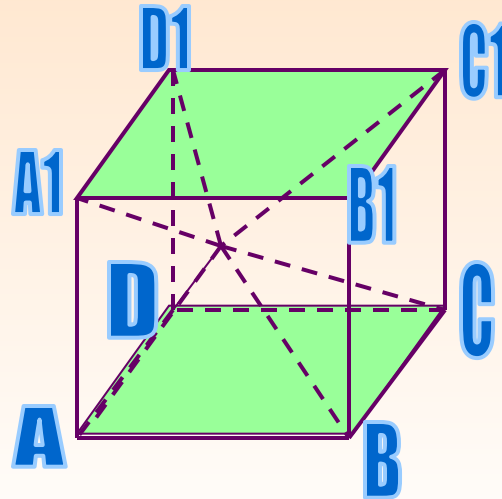


В содержание

Далее

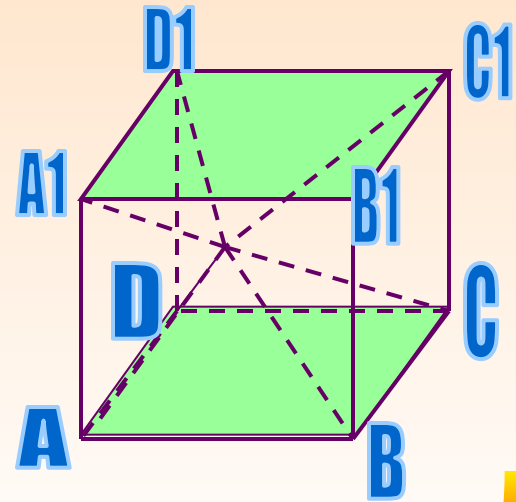
# Доказательство.

- Т.к.  $ABCD$  и  $ADD_1A_1$  - параллелограммы, то  $AB \parallel DC$  и  $AA_1 \parallel DD_1$ . Таким образом, две пересекающиеся прямые  $AB$  и  $AA_1$  одной грани соответственно параллельны двум прямым  $CD$  и  $DD_1$  другой грани. Отсюда по признаку параллельности плоскостей следует, что грани  $ABB_1A_1$  и  $DCC_1D_1$  параллельны.





- Докажем теперь равенство этих граней. Т.к. все грани параллелепипеда - параллелограммы, то  $AB=DC$  и  $AA_1=DD_1$ . По этой же причине стороны углов  $A_1AB$  и  $D_1DC$  соответственно сонаправлены, и, значит, эти углы равны. Таким образом, две смежные стороны и угол между ними параллелограмма  $ABB_1A_1$  соответственно равны двум смежным сторонам и углу между ними параллелограмма  $DCC_1D_1$ , поэтому эти параллелограммы равны.



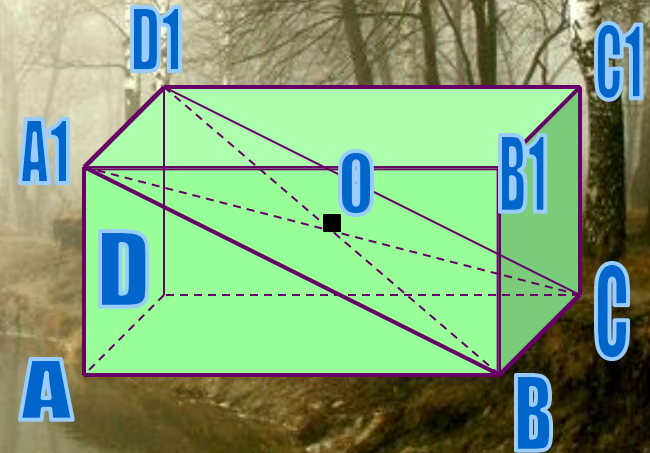
[В содержание](#)

[Далее](#)

- 2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

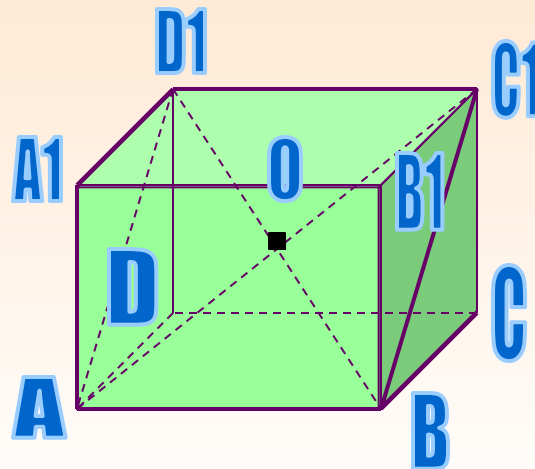
- Рассмотрим четырёхугольник  $A_1D_1CB$ , диагонали которого  $A_1C$  и  $D_1B$  являются диагоналями параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Т.к.  $A_1D_1 \parallel BC$  и  $A_1D_1 = BC$ , то  $A_1D_1CB$  - параллелограмм. Поэтому диагонали  $A_1C$  и  $D_1B$  пересекаются в некоторой точке  $O$  и этой точкой делятся пополам.

## Пример №1



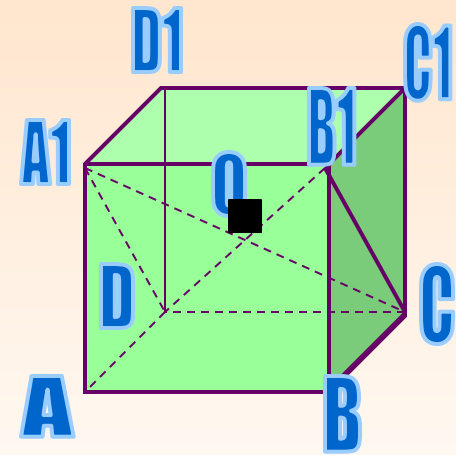
# Пример №2

- Рассмотрим четырёхугольник  $AD_1C_1B$ . Он также является параллелограммом, и, следовательно, его диагонали  $AC_1$  и  $D_1B$  пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Но серединой диагонали  $D_1B$  является точка  $O$ . Таким образом, диагонали  $A_1C$ ,  $D_1B$  и  $AC_1$  пересекаются в точке  $O$  и делятся этой точкой пополам.



# Пример №3

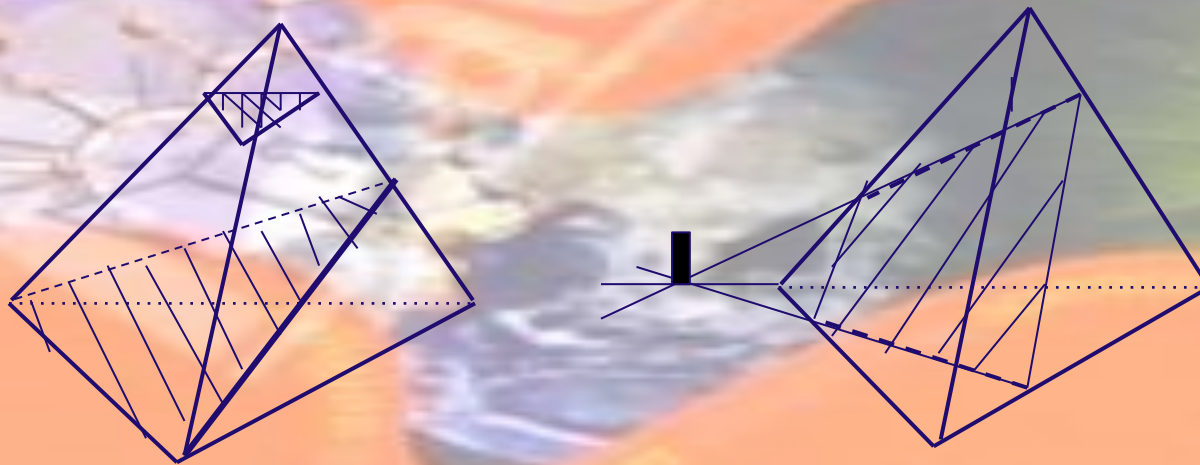
- Рассматривая четырёхугольник  $A_1B_1CD$ , точно так же устанавливаем, что и четвёртая диагональ  $DB_1$  параллелепипеда проходит через точку  $O$  и делится ею пополам.



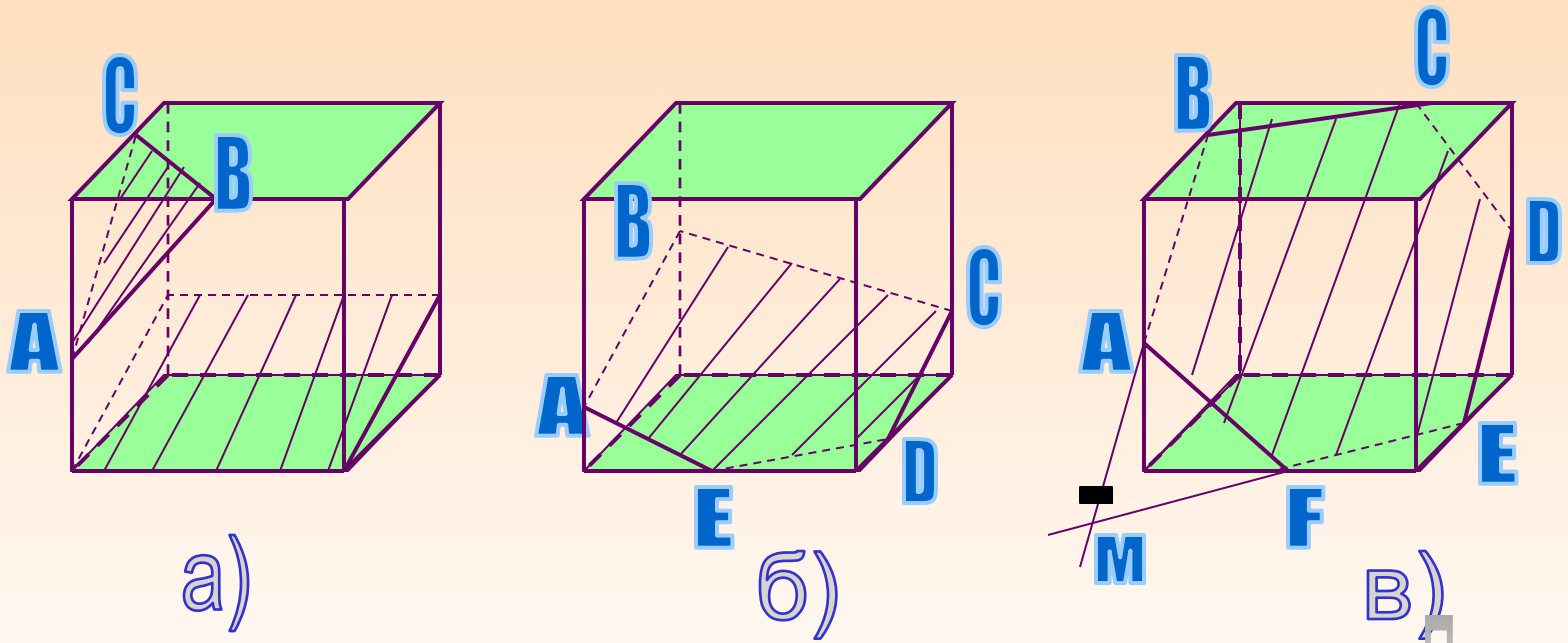
# Задачи на построение с

- **Секущей плоскостью** тетраэдра называется любая плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). **Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра по отрезкам.**
- Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется **сечением** тетраэдра (параллелепипеда).

- **Т.к. тетраэдр имеет четыре грани, то его сечениями могут быть только треугольники и четырёхугольники.**



- Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырёхугольники (рис.39,а), пятиугольники (рис.39,б) и шестиугольники (рис.39,в).



- На рисунке 39,б секущая плоскость пересекает две противоположные грани (левую и правую) по отрезкам **AB** и **CD**, а две другие противоположные грани (переднюю и заднюю) - по отрезкам **AE** и **BC**, поэтому **AB**  $\parallel$  **CD** и **AE**  $\parallel$  **BC**.

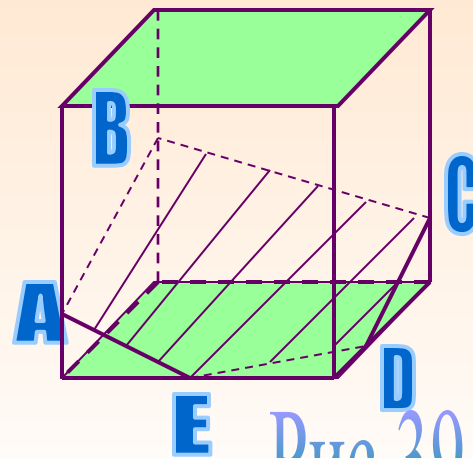


Рис.39.б)

*Далее*



- По той же причине на рисунке 39, в  $AB \parallel ED$ ,  $AF \parallel CD$ ,  $BC \parallel EF$ . Для построения сечения достаточно построить точки пересечения секущей плоскости с рёбрами тетраэдра (параллелепипеда), после чего остаётся провести отрезки, соединяющие каждые две построенные точки, лежащие в одной и той же грани.

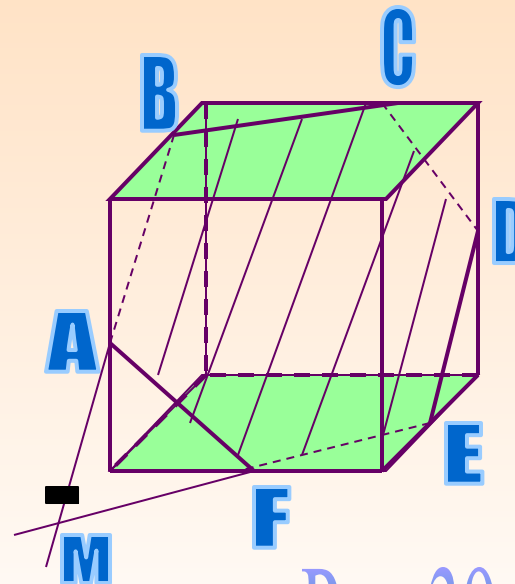
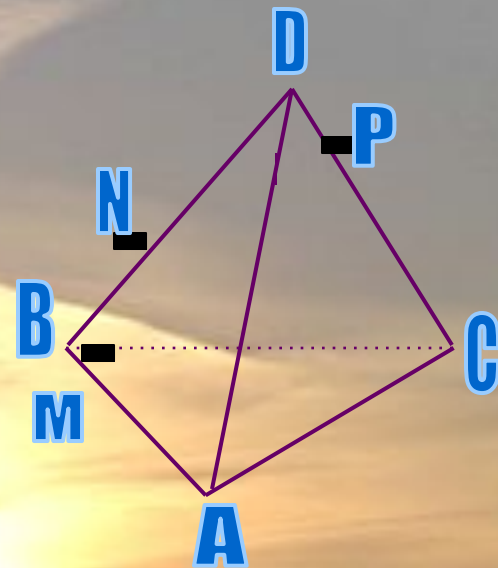


Рис.39. В)

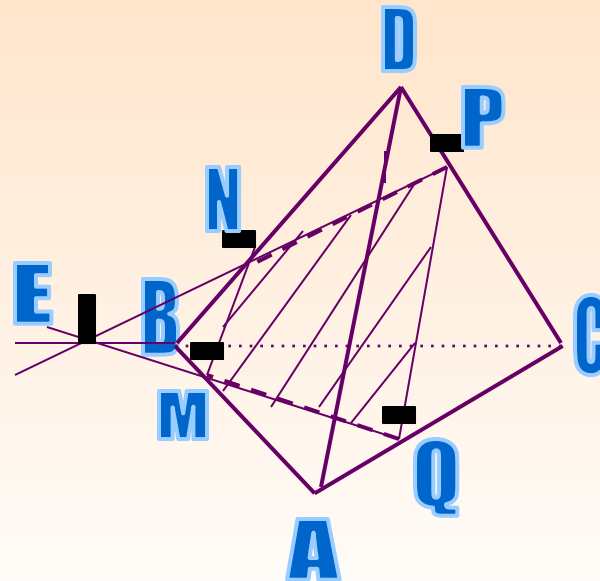
# Примеры построения сечений

- **Задача 1.** На рёбрах **AB**, **BD** и **CD** тетраэдра **ABCD** отмечены точки **M**, **N** и **P**. Построить сечение тетраэдра плоскостью **MNP**.

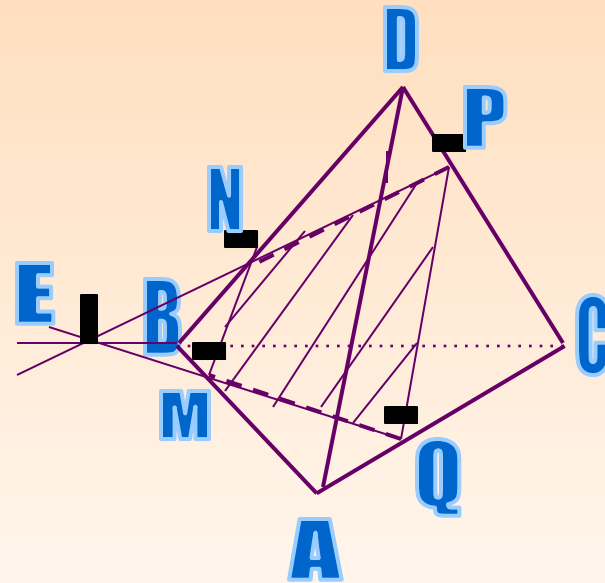


## • *Решение.*

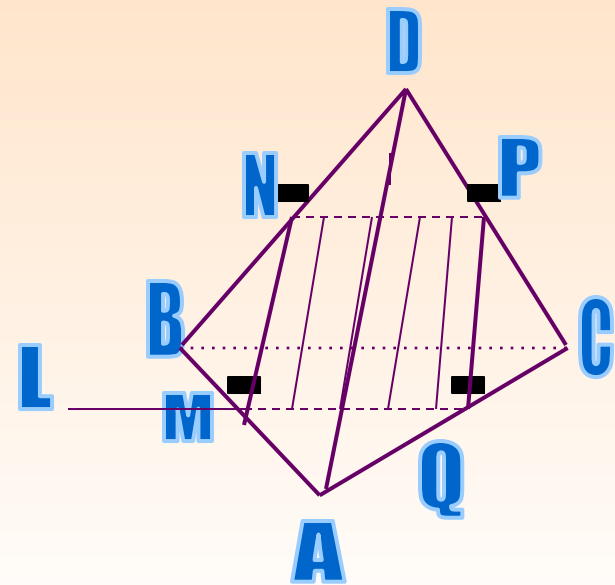
- Построим сначала прямую, по которой плоскость **MNP** пересекается с плоскостью грани **ABC**. Точка **M** является общей точкой этих плоскостей. Для построения ещё одной общей точки продолжим отрезки **NP** и **BC** до их пересечения в точке **E**, которая и будет второй общей точкой плоскостей **MNP** и **ABC**.



- Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой  $ME$ . Прямая  $ME$  пересекает ребро  $AC$  в некоторой точке  $Q$ . Четырёхугольник  $MNPQ$  - искомое сечение.

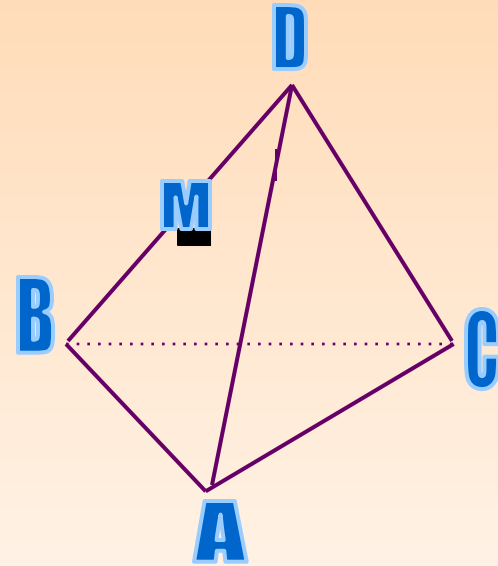


- Если прямые  $NP$  и  $BC$  параллельны, то прямая  $NP$  параллельна грани  $ABC$ , поэтому плоскость  $MNP$  пересекает эту грань по прямой  $ML$ , параллельной прямой  $NP$ . Точка  $Q$ , как и в первом случае, есть точка пересечения ребра  $AC$  с прямой  $ML$ .



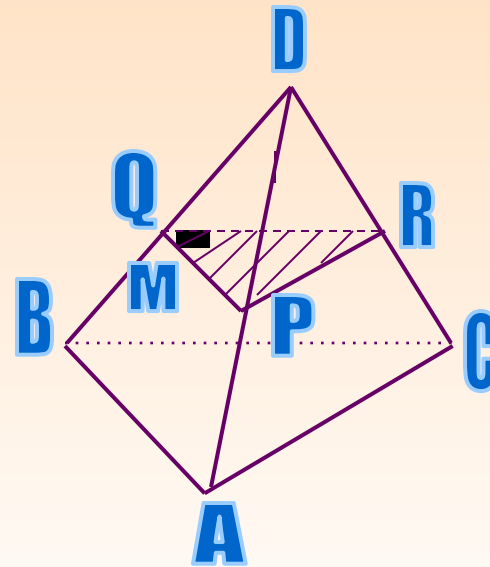
# Задача №2

- Точка **M** лежит на боковой грани **ADB** тетраэдра **DABC**. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку **M** параллельно основанию **ABC**.

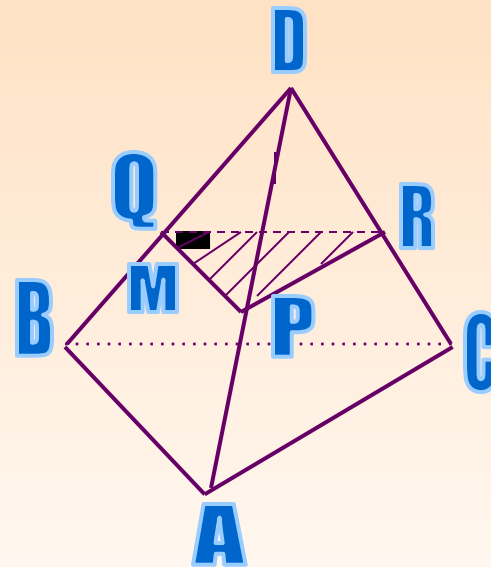


## • Решение.

- Т.к. секущая плоскость параллельна плоскости  $ABC$ , то она параллельна прямым  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ . Следовательно, секущая плоскость пересекает боковые грани тетраэдра по прямым, параллельным сторонам треугольника  $ABC$ .
- Отсюда вытекает следующий способ построения искомого сечения. Проведём через точку  $M$  прямую, параллельную отрезку  $AB$ .



- Обозначим буквами **P** и **Q** точки пересечения этой прямой с боковыми рёбрами **DA** и **DB**. Затем через точку **P** проведём прямую, параллельную отрезку **AC**, и обозначим буквой **R** точку пересечения этой прямой с ребром **DC**. Треугольник **PQR** - искомое сечение.

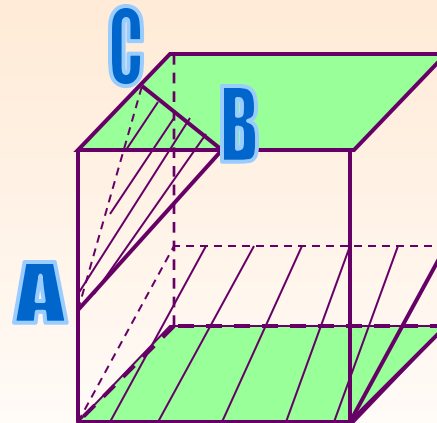




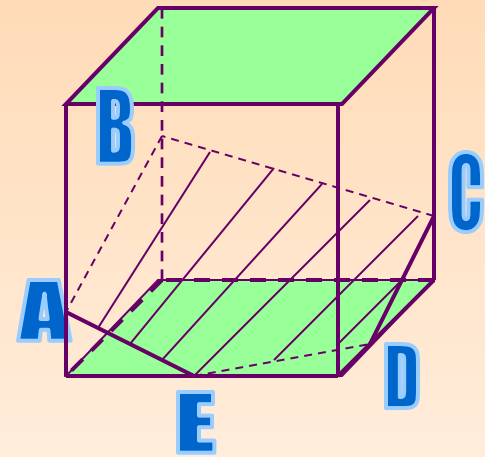
# Задача №3

- На рёбрах параллелепипеда даны три точки **A**, **B** и **C**. Построить сечение параллелепипеда плоскостью **ABC**.

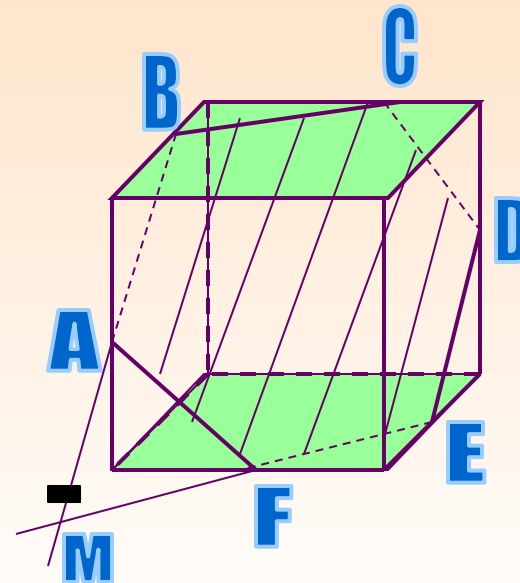
- **Решение**. Построение искомого сечения зависит от того, на каких рёбрах параллелепипеда лежат точки **A**, **B** и **C**. Когда эти точки лежат на рёбрах, выходящих из одной вершины, нужно провести отрезки **AB**, **BC** и **CA**, и получится искомого сечение - треугольник **ABC**.



- Если три данные точки **A**, **B** и **C** расположены так, как показано на рисунке, то сначала нужно провести отрезки **AB** и **BC**, а затем через точку **A** провести прямую, параллельную **BC**, а через точку **C** - прямую, параллельную **AB**. Пересечения этих прямых с рёбрами нижней грани дают точки **E** и **D**. Остаётся провести отрезок **ED**, и искомое сечение - пятиугольник **ABCDE** - построено.



- Более трудный случай, когда данные точки **A**, **B** **C** расположены так, как показано на рисунке. В этом случае сначала построим прямую, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания.
- Для этого проведём прямую **AB**, до пересечения с этой прямой в точке **M**. Далее через точку **M** проведём прямую, параллельную прямой **BC**. Это и есть прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания.



- Эта прямая пересекается с рёбрами нижнего основания в точках **E** и **F**. Затем через точку **E** проведём прямую, параллельную прямой **AB**, и получим точку **D**. Проводим отрезки **AF** и **CD**, и искомое сечение - шестиугольник **ABCDEF** - построено.

