МЧС РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРОТИВОПОЖАРНОЙ СЛУЖБЫ

Кафедра прикладной математики и информационных технологий

Математическое моделирование

специальность 230401.65 – «Прикладная математика»

Литература по учебной дисциплине

1. **Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. Вып. XXI. / В.С. Зарубин. – М.: Букинист, 2010 – 495с.**
2. **Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: Учебник для бакалавров. – М.: Юрайт, 2011.**
3. **Шикин Е.В. Математические методы и модели управлений: Учеб. пособие/ Е.В. Шикин, А.Г. Чхартишвили. – М.:. Дело, 2002.**

Тема 2.

Детерминированные аналитические модели.

Лекция 2.1

Типовые классы детерминированных аналитических моделей.

Учебные вопросы:

1. Классификация детерминированных аналитических моделей.
2. Непрерывные и дискретные детерминированные модели.
3. Категорийно-функторные и теоретико-множественные математические модели.

1. Классификация детерминированных аналитических моделей

Для построения математических моделей применяют разнообразные *математические средства*.

В зависимости от *признаков классификации* моделей:

- характер связи между параметрами и показателем качества объекта (детерминированные, вероятностные и неопределенные);

- учет времени. Статические (не учитываются изменения параметров во времени), динамические (учитывают изменения параметров во времени) модели;

- количество этапов операции моделирования (одноэтапные и многоэтапные модели);

- тип параметров (дискретные и непрерывные параметры).

Типовые математические схемы

Процесс функционирования системы	**Типовая математическая схема**	**Обозначение**
Непрерывно-детерминированный подход	Стандартные ДУ	D-схема
Дискретно-детерминированный подход	Конечные автоматы	F-схема
Дискретно-стохастический подход	Вероятностные автоматы	P-схема
Непрерывно-стохастический подход	Система массового обслуживания	Q-схема
Обобщенные (универсальный)	Агрегативная система	A-схема

Кроме этого:

Обобщённые *теоретико-множественные модели*, базирующиеся на общей теории систем и аппарате теории множеств.

Категорийно-функторные модели, базирующиеся на некоторый абстрактный язык высказываний.

Игровые модели, базирующиеся на теории игр (раздел теории исследования операции).

Нечёткие модели, базирующиеся на аппарате нечётных множеств и нечётной логики.

Уровни формального описания объектов моделирования

Приняты следующие **верхние** уровни абстрактного (формального) описания объектов моделирования:

Лингвистический, использующий исчисление высказываний математической логики.

Теоретико-множественный (частный случай лингвистического), использующий понятия множества, подмножества, элемента множества и отношений между элементами (пересечение, объединение, разность и др.).

Абстрактно - алгебраический, вытекающий из теоретико-множественного, при условии, что отношения (связи) между элементами рассматриваемых множеств устанавливаются с помощью однозначных функций.

Топологический, возникающий в случае, если на элементах рассматриваемых множеств используется понятие топологической структуры, когда используется язык общей топологии или её ветвей, например, язык теории графов.

2. Непрерывные и дискретные детерминированные модели.

Наиболее подходящим аппаратом для построения *непрерывно детерминированных моделей* функционирования объектов являются алгебраические и дифференциальные уравнения.

Дифференциальные уравнения – это уравнения, в которых неизвестными являются *функции* одной или нескольких переменных, причем в уравнения входят не только функции, но и их производные различных порядков.

Все дифференциальные уравнения можно разделить на 2 группы:

- уравнения в частных производных, в которых неизвестны функции *многих* переменных;

- обыкновенные дифференциальные уравнения, в которых неизвестны функции только *одной* переменной.

Порядок старшей производной, входящей в дифференциальные уравнения модели, характеризует *порядок дифференциального уравнения.*

У *линейного* дифференциального уравнения его левая часть есть многочлен 1-й степени относительно неизвестной функции y и её производных $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Многочлен не содержит произведений переменной и ее производных

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f(x)$$

где функции $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_0(x)$ – коэффициенты, а $f(x)$ – свободный член линейного дифференциального уравнения.

У *однородных* дифференциальных уравнений правая часть равна нулю $f(x) = 0$.

Общим решением *линейного* дифференциального уравнения является функция $y = \phi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, которая содержит столько независимых постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$, каков порядок n этого уравнения.

Наиболее разработаны методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядков, линейных дифференциальных уравнений с частыми производными.

Обычно в непрерывно детерминированных математических моделях в качестве независимой переменной, от которой зависят неизвестные искомые функции, служит время t.

Поскольку математические модели (схемы) рассмотренного вида отражают динамику изучаемого объекта, т.е. его функционирование во времени, то их называют *D*-схемами (от англ. *dynamic*).

Тогда для детерминированных моделей $\vec{y}(t) = f(\vec{x}, t)$

в общем виде получают математическое соотношение:

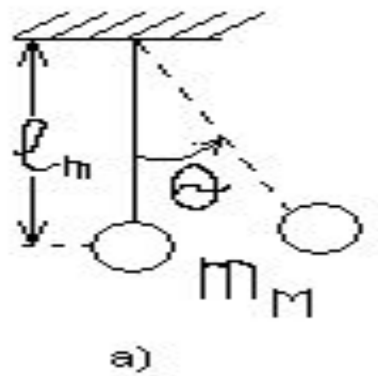
$$\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y}, t); \vec{y}(t_0) = y_0,$$

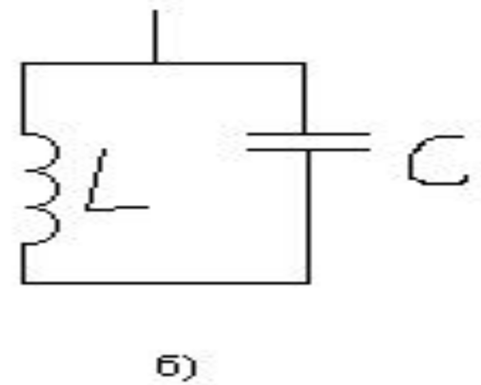
где: $\vec{y}' = {d\vec{y}}/{dt}$,

$\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n), \vec{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ - n-мерные векторы

$\vec{f}(\vec{y}, t)$ - вектор- функция, определённая на некотором (n+1)-мерном множестве и являющаяся НЕПРЕРЫВНОЙ.

В качестве иллюстрации построения математических моделей в виде *D*-схем можно привести пример формализации функционирования двух элементарных объектов различной физической природы





Механический объект-оригинал

Электрический объект-оригинал (колебательный контур)

$$m_M l_m^2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + m_M g\, l_m \theta(t) = 0$$

$$L\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = 0,$$

Процессы функционирования обоих объектов можно исследовать на основе общей непрерывно детерминированной математической модели. Кроме того, функционирование одного из объектов можно исследовать с помощью другого.

Введя обозначения: $h_0 = m_M \cdot l_M^2$ и $h_0 = L$

$h_1 = 0$

$h_2 = m_M g l_m$ и $h_2 = \dfrac{1}{c}$

$\theta(t) = Z(t)$ и $q(t) = Z(t)$

Получают обыкновенное ДУ 2-го порядка, описывающее функционирование обоих объектов-оригиналов

$$h_0 \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + h_1 \frac{dZ(t)}{dt} + h_2 Z(t) = 0$$

где h_0, h_1, h_2 – параметры объектов-оригиналов, $Z(t)$ - состояние объектов-оригиналов в момент времени t.

Следовательно, процессы функционирования обоих объектов-оригиналов могут быть исследованы на основе общей непрерывно-детерминированной математической модели. Кроме того, функционирование одного из объектов-оригиналов может быть исследовано с помощью другого.

Если изучаемый объект-оригинал взаимодействует с внешней средой (E), т.е. появляется входное воздействие $x(t)$ в виде внешней силы для маятника и источника энергии для контура, то непрерывно-детерминированная математическая модель такого объекта-оригинала имеет вид:

$$h_0 \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + h_1 \frac{dZ(t)}{dt} + h_2 Z(t) = x(t)$$

т.е. $x(t)$ является входным (управляющим) воздействием, а состояние объекта-оригинала можно рассматривать как выходную характеристику

Для построения *дискретно детерминированных моделей* функционирования объектов применяют математический аппарат конечных автоматов (*F*-схемы).

На основе этого аппарата процесс функционирования объекта представляют автоматом, который в ходе функционирования перерабатывает дискретную информацию и меняет свои внутренние состояния в допустимые моменты времени.

Конечный автомат - это автомат, у которого множества входных воздействий, состояний и выходных характеристик являются конечными.

Для детерминированных автоматов должно выполняться условие *однозначности* переходов. Автомат, находящийся в некотором состоянии, под действием конкретного входного воздействия может перейти только в конкретное соседнее состояние. При графическом способе задания автомата из любой вершины *не могут выходить* две и более дуги, отмеченные одним и тем же входным воздействием.

3. Категорийно-функторные и теоретико-множественные математические модели

Категорийно-функторные математические модели относятся к лингвистическому уровню абстрактного описания объектов-оригиналов.

Для обозначения вводимых понятий используется совокупность символов и правил их применения, которые совместно и образуют абстрактный язык.

Высказывания, определяющие понятия на данном языке, означают, что имеется некоторое предложение, построенное по правилам языка, представляющее формулу алгебры логики (ФАЛ), которая содержит варьируемые конституенты и переменные, которые только при определённых значениях делают высказывание истинным.

Все высказывания делятся на два вида:

1. ***Категории*** **(*термы*) - высказывания, с помощью которых обозначают элементы объекта-оригинала, названия режимов функционирования и т.д.;**
2. ***Функторы*** **- высказывания, определяющие отношения между термами.**

Совокупность элементов объекта-оригинала представляет некоторые множества, а совокупности элементов его отдельных компонентов – подмножества.

Каждый из названных компонентов обладает определенными свойствами и находится в некоторых отношениях с другими элементами.

Следовательно, объекты-оригиналы всегда можно формально описать с помощью термов и функторов.

С помощью категорийно-функторных моделей можно получить только общие сведения об объектах-оригиналах.

Основной идеей теории категорий является выражение понятия *отношения принадлежности* элемента множеству через термины связей этого множества с другими множествами.

Теоретико-множественные математические модели

Множество суть совокупность элементов, обладающих общим свойством (природой, семантикой).

Два способа порождения множеств:

а) для конечных множеств – перечисление элементов;

б) для бесконечных множеств – алгоритм или правила порождения.

Каждый элемент множества должен отличаться от другого. Обычно для описания элементов применяется такой способ кодирования, при котором код каждого элемента уникален.

Интерпретация множества - приписывание некоторого набора свойств той совокупности элементов, которые объединены в множество.

Пример 1. Множество натуральных чисел N. Каждый элемент множества представляет собой код, построенный из алфавита цифр $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Известны способы кодирования двоичных чисел, чисел с плавающей запятой, обратных и дополнительных кодов.

Пример 2. В языках программирования механизм кодирования объектов, составляющих множества, и операций над объектами определяет сущность языка.

В отличии от операций над элементами множеств теоретико-множественные операции определяются над совокупностью элементов, так что результат операции есть новое множество. Существуют три базовые операции – объединение, пересечение, дополнение (интерпретация операций известна из курса математики). На совокупности этих операций определена Булева алгебра, которая позволяет производить эквивалентные преобразования формул, описывающие множества, сконструированные из исходных множеств.

Множество, сконструированное из базовых и заданное формулой, в общем случае не наследует свойства исходных базовых множеств.

Вопрос наследования свойств (интерпретаций) приходится определять особо, для чего, например, в объектно-ориентированных языках, вводятся специальные механизмы.

Отношения

Пусть задано множество A (конечное или бесконечное), введем понятие декартова произведения $A \times A$, которое представляет собой множество всех пар $D^2=\{<a_i, a_j>\}$, где $(i, j) = 1, 2, 3, \ldots, (a_i, a_j) \in A$, и допускается $i = j$. Итак, D^2 задает декартово пространство, элементами которого являются все возможные пары. Любое подмножество $\alpha \subseteq A \times A = D^2$ называется бинарным отношением.

Математическая модель - это конечная совокупность множеств и отношений на этих множествах с *заданной интерпретацией*.

***Пример*. Линейное уравнение $y = 0.5x + 1$ есть бинарное отношение, где D^1 – множество действительных чисел. Пары чисел лежат на прямой $y = 0.5x + 1$ и только на ней.**

Формальные языки

Пусть $A=\{a, b, \ldots, z\}$. Введем процедуру, порождающую все возможные слова в алфавите A, сначала слова длиной в один символ, далее два символа и т.д., длины n. Полученное множество слов обозначим как A^*. Понятно, что A^* - бесконечное множество слов. Процедура порождения слов описывается индуктивной схемой с единственной операцией, которая называется конкатенацией:

1. Вводится пустое слово $\varnothing$ $(A_0 = \varnothing)$.

2. К пустому слову приписываются последовательно все буквы из алфавита A, получается слово длины 1, которые составляют множество $A' = \{a, b, \ldots\}$.

…

(n-1). Пусть порождено множество A_{n-1} слов длины $n-1$.

n. Каждое слово $y \in A_n$ получается из $x \in A_{n-1}$ приписыванием букв из алфавита, так что $y_1 = x * a$, $y_2 = x * b$ и т. д.

Формальным языком L называется любое подмножество A^*, т.е. $L \subseteq A$, т.е. язык L является отношением на A^*.

Кроме того, на множестве задают *функции* и *операции*.

Теоретико-множественные модели **- математические модели в виде абстрактно-алгебраического описания, согласно которому систему S представляют в виде совокупности соотношений, определяемых на декартовом произведении множеств:**

- **совокупность входных воздействий на систему *X*;**
- **совокупность воздействий внешней среды *V*;**
- **совокупность внутренних (собственных) параметров системы *C*;**
- **совокупность выходных характеристик системы *Y*.**

Такое описание применимо к широкому классу систем, т.е. представляет собой почти универсальную модель. Однако, при сложной многоуровневой структуре системы модель становится ненаглядной, трудно воспринимаемой и трудно анализируемой. Методом повышения наглядности систем является представление ее в виде графа.

Теоретико-множественные математические модели можно рассматривать, как частный случай категорийно-функторных, если провести аналогию понятий «терма» и «множества» и, соответственно, понятий «функтора» и «отношения».

С точки зрения теоретико-множественного подхода к построению математических моделей *термы* - это некоторые множества, с помощью которых перечисляются элементы компонент объекта-оригинала, а функторы устанавливают характер отношений между введёнными множествами.

Аналогично можно рассматривать в виде термов множества элементов процесса функционирования компонент объекта-оригинала, а функторы отражают характер отношений между введёнными множествами.

В простейшем случае задано множество элементов системы S (элементов процесса функционирования) $N = \{v_i : i \in I\}$.

Тогда можно определить систему S как некоторое отношение в виде декартова произведения $S \subset N \times N \{v_i : i \in I\}$, элементы которого есть составляющие структуры системы S и процесса её функционирования, а множество этих составляющих называют системным множеством.