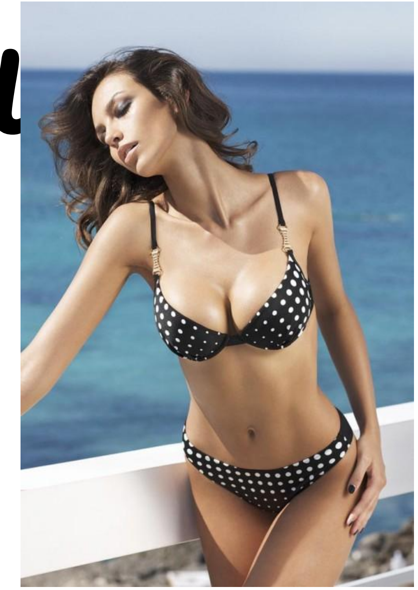
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ



Лекция 12

Точечные оценки

доцент:

Колосько Анатолий Григорьевич

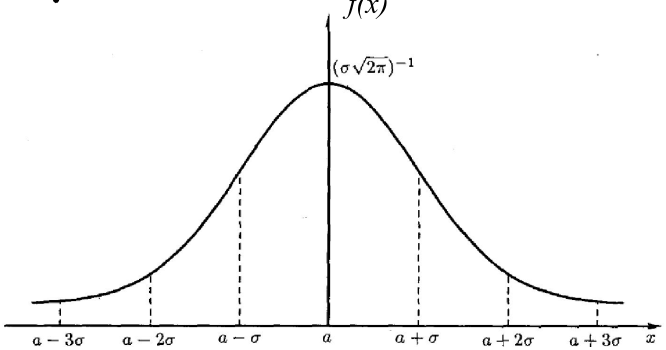
(AGKOLOSKO@MAIL.RU)

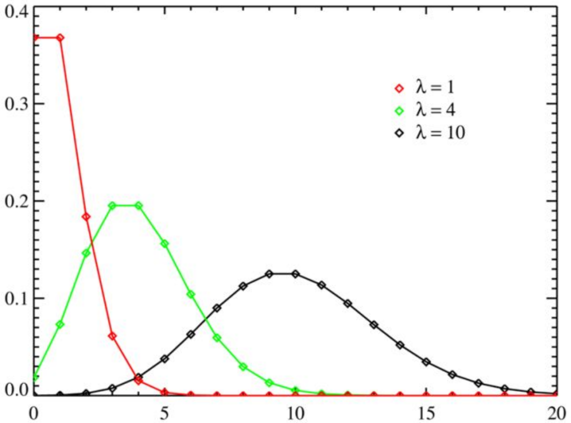
Необходимость оценки распределения

- Пусть требуется изучить количественный признак генеральной совокупности. Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, какое именно распределение имеет признак.
- если наперед известно, что изучаемый признак распределен в генеральной совокупности нормально, то необходимо оценить (приближенно найти) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение,
- признак имеет, например, распределение Пуассона, то необходимо оценить параметр λ, которым это распределение определяется.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$P_n(m) = \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu}$$





Статистическая оценка

Выборку объёма n : $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ можно назвать n-мерной случайной величиной. Любая функция от этой величины называется **статистикой**.

Статистической оценкой неизвестного параметра теоретического распределения
называют функцию от наблюдаемых случайных величин (т.е. статистику), которая его описывает.

Оценку, которая определяется одним числом, называют **точечной**.

Например: для оценки математического ожидания нормального распределения служит функция (среднее арифметическое наблюдаемых значений признака)

$$\bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n.$$

Чтобы статистические оценки давали хорошие приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определённым требованиям, которые мы рассмотрим далее.

Оценка как случайная величина

Обозначим Θ^* – статистическую оценку неизвестного параметра $\Theta_т$ теоретического распределения *f(x)*, описывающего случайную величину X.

Допустим, по выборке объёма n найдена оценка Θ^*_1 .

Повторим опыт – из генеральной совокупности извлечём ещё одну выборку объёма n и получим оценку Θ^*_2 .

Извлекая выборку многократно, получим набор РАЗЛИЧНЫХ статистических оценок $\Theta^*_1, \Theta^*_2, \ldots, \Theta^*_k$.

Здесь мы **можем рассматривать Θ* как случайную величину**, а множество $\{ \Theta^*_1, \ldots, \Theta^*_k \}$ тогда будет набором её возможных значений.

Для этой случайной величины можно ввести те же самые вероятностные параметры, что и для обычной случайной величины X : среднее, дисперсию... при этом Θ сама, как параметр, может быть средней (например, для $Norm(a, \sigma)$).

Требования к оценкам статистических параметров

1. **Состоятельная статистическая оценка** – это оценка, которая при увеличении

объёма выборки n → ∞ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Требование состоятельности предъявляется при рассмотрении больших выборок. $P(\left|\Theta_n^* - \Theta_T\right| > \varepsilon) \to 0 \quad при \quad n \to \infty \quad для \quad \forall \varepsilon > 0$

2. **Несмещённая статистическая оценка** – это оценка, у которой мат. ожидание $M\left[\Theta_n^*\right] = \Theta_T \quad при \quad \forall n$

равно оцениваемому параметру при любом объёме выборки:

$$n \to \infty \quad D(\Theta_n^*) \to 0$$

Соблюдение этого требования гарантирует отсутствие систематических ошибок.

Если у несмещённой Θ при , то оценка ещё и состоятельная.

Смещённая статистическая оценка – это оценка, у которой наоборот : $M(\Theta^*) \neq \Theta_т$ $D\left[\Theta_n^*\right] = \min D(различных \quad \Theta) \quad при \quad заданном \quad n$

3. **Эффективная статистическая оценка** – это оценка, которая при

Генеральная средняя

Генеральной средней $\overline{x}_г$ называют среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности.

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \ldots, N_k$, причем $N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N$, то

$$\overline{x}_г = (x_1 N_1 + x_2 N_2 + \ldots + x_k N_k)/N,$$

Итак, если рассматривать обследуемый признак X генеральной совокупности как случайную величину, то математическое ожидание признака равно генеральной средней этого признака:

$$M(X) = \overline{x}_г.$$

Отклонением называют разность $x_i - \overline{x}$ между значением признака и общей средней.

сумма этих отклонений должна быть равна 0, что следует из определения среднего:

$$\sum n_i (x_i - \overline{x}) = 0.$$

Генеральная средняя = мат. ожидание!

Математическое ожидание – это число: $M(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot p_i)$

Пусть в генеральной совокупности варианты-значения встречаются:

x_1 - n_1 раз, x_2 - n_2 раз ... x_m - n_m раз.

Среднее арифметическое всех результатов будет равно:

$$\langle X \rangle = (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_m n_m) \cdot \frac{1}{n} = x_1 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2 \cdot \frac{n_2}{n} + \ldots + x_m \cdot \frac{n_m}{n}$$

Так как при выборке число X мы выбираем случайно, то полагаем, что все эти

варианты-значения равновероятны. Тогда согласно классическому определению

вероятности относительная частота варианты $\omega_i = n_i / n = P(x_i)$ - вероятность вытащить

её из генеральной совокупности.

$$\langle X \rangle = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_m \cdot p_m = M(X)$$

То есть:

$$\boxed{M(X) = \overline{x}_{\text{г}}}$$

или что то же самое:

Оценка Θ^*: Выборочная средняя

Выборочной средней $\overline{x}_В$ называют среднее арифметическое значение признака
выборочной совокупности (также обозначается $\overline{x}_n$).

$$\overline{X}_B = (x_1 + ... + x_n) \cdot \frac{1}{n}$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то

$$\overline{x}_в = (n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k)/n,$$

или

$$\overline{x}_в = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i \right) \Big/ n,$$

Среднее абсолютное отклонение $\boldsymbol{\theta}$ (ср. арифметическое абсолютных отклонений):

$$\theta = \left(\sum n_i \left| x_i - \overline{x}_в \right| \right) / \sum n_i$$

Свойство устойчивости $\overline{X}_B$

Свойство устойчивости: если по нескольких выборкам достаточно большого объёма
из одной и той же генеральной совокупности будут найдены выборочные средние,
то они будут приближённо равны между собой.

$$\overline{X}_{B1} \approx \overline{X}_{B2} \approx \overline{X}_{B3} \approx \dots$$

Вынос мозга (текст только для самых умных):

Заметим, что если дисперсии двух одинаково распределенных совокупностей равны между собой, то близость выборочных средних к генеральным не зависит от отношения объема выборки к объему генеральной совокупности. Она зависит от объема выборки: чем объем выборки больше, тем меньше выборочная средняя отличается от генеральной. Например, если из одной совокупности отобран 1% объектов, а из другой совокупности отобрано 4% объектов, причем объем первой выборки оказался большим, чем второй, то первая выборочная средняя будет меньше отличаться от соответствующей генеральной средней, чем вторая.

Требования к оценке $\Theta^* = X_B$

1. $\bar{x}_B$ - состоятельная

по теореме Чебышева:

$$P(\left|\overline{X}_n - M(X)\right| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

поэтому:

$$P(\left|\overline{X}_B - \overline{X}_\Gamma\right| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2. $\bar{x}_B$ - несмещённая
мат. ожидание оценки:

$$M\left(\bar{x}_B\right) = M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} M\left(X_i\right)}{n} = \frac{n \cdot M(X)}{n} = M(X) = \Theta_T$$

3. $\bar{x}_B$ - эффективная? Будет ли её дисперсия являться минимальной? Не всегда! Дисперсия оценки:

$$D\left(\bar{x}_B\right) = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i / n\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} D\left(X_i\right)}{n^2} = \frac{n \cdot D(X)}{n^2} = \frac{D(X)}{n}$$

В случае нормального распределения это действительно минимум
по сравнению с
другими оценками Θ

Генеральная дисперсия

Генеральной дисперсией $D_г$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения $\bar{x}_г$.

Если все значения x_1 x_2, . . ., x_N признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$D_Г(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{X}_Г)^2$$

При этом теоретическая дисперсия признака (случайной величины) совпадает с генеральной дисперсией:

$$D(X) = D_Г(X)$$

Генеральным средним квадратическим отклонением (стандартом) называют квадратный корень из генеральной дисперсии:

$$\sigma_г = \sqrt{D_г}.$$

Оценка Θ^*: Выборочная дисперсия

Выборочной дисперсией $D_в$ называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\bar{x}_в$.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$D_B(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X}_в)^2$$

Выборочным средним квадратическим отклонением (стандартом) называют квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}.$$

Коэффициент вариации *V* – выраженное в процентах отношение выборочного среднего квадратического отклонения к выборочной средней:

$$\boxed{V = \sigma_в / \bar{x}_в \cdot 100\%}$$

Требования к оценке $\Theta^* = D_B$

1. **D_B** - состоятельная
   по известной формуле:

$$D_B = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} \right) - \left(\overline{X}_B \right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} M(X^2) - M(X)^2 = D(X) = \Theta_T$$

2. **D_B** - смещённая!
   мат. ожидание оценки:

$$M[D_B(X)] = \frac{n-1}{n} \cdot D(X)$$

   т.е. при использовании этой оценки будет возникать систематическая ошибка в меньшую сторону! потому что $M(D_B) < D(X)$.

3. **D_B** - эффективная? Будет ли её дисперсия являться минимальной? Нет. Даже в случае нормального распределения.
   Однако при $n \to \infty$ её мат. ожидание асимптотически приближается к D(X), поэтому выборочная дисперсия является **асимптотически эффективной**.

Вывод мат. ожидания D_B

Пересчитаем выборочную дисперсию, сделав центрированную величину X-M(X):

$$D_B(X) = \overline{X^2}_в - \left(\overline{X}_в\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X}_в)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M(X) + M(X) - \overline{X}_в\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M(X)\right)^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M(X)\right)\left(M(X) - \overline{X}_в\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(M(X) - \overline{X}_в\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M(X)\right)^2 + \frac{2}{n}\left(M(X) - \overline{X}_в\right)\left(n\overline{X}_в - nM(X)\right) + \frac{1}{n}n\cdot\left(M(X) - \overline{X}_в\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M(X)\right)^2 - 2\left(M(X) - \overline{X}_в\right)^2 + \left(M(X) - \overline{X}_в\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M(X)\right)^2 - \left(M(X) - \overline{X}_в\right)^2$$

Теперь посчитаем мат.ожидание это дисперсии:

$$M\left[D_B(X)\right] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M(X)\right)^2 - \left(M(X) - \overline{X}_в\right)^2\right] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M(X)\right)^2\right] - M\left[\left(M(X) - \overline{X}_в\right)^2\right] =$$

$$\textit{используем} \quad \textit{уже} \quad \textit{доказанное}: \quad M(\overline{X}_в) = M(X)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left[\left(x_i - M(X)\right)^2\right] - M\left[\left(M(\overline{X}_в) - \overline{X}_в\right)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D(X) - D\left(\overline{X}_в\right) = D(X) - \frac{D(X)}{n} = \frac{n-1}{n}D(X)$$

страшно?

Оценка генеральной дисперсии по исправленной выборочной

Зная связь: $M[D_B(X)] = \dfrac{n-1}{n} \cdot D(X)$

легко получить **исправленную выборочную дисперсию**: $\hat{D}_B = \dfrac{n}{n-1} D_B$

которая будет несмещённой точечной оценкой:

$$M[\hat{D}_B(X)] = D(X) = D_Г \qquad M[D_B(X)] = \frac{n-1}{n} \cdot D(X)$$

Т.е. разница между выборочной дисперсией и исправленной лишь в множителе:

$$D_B(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X}_в)^2 \qquad \hat{D} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_B)^2$$

На практике используют исправленную дисперсию, **если n < 30**.

Задача 1

По результатам наблюдений случайной величины X получились числа:

1, 7, 7, 2, 3, 2, 5, 5, 4, 6, 3, 4, 3, 5, 6, 6, 5, 5, 4, 4

построить:
1. дискретный вариационный ряд
2. многоугольник частот
3. график выборочной функции распределения
4. найти выборочное среднее
5. найти выборочную дисперсию

Решение задачи 1

1. Составляем ряд распределения:

Количество элементов выборки равно 20, следовательно объем выборки n = 20.
Составляем ранжированный ряд:
1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7.

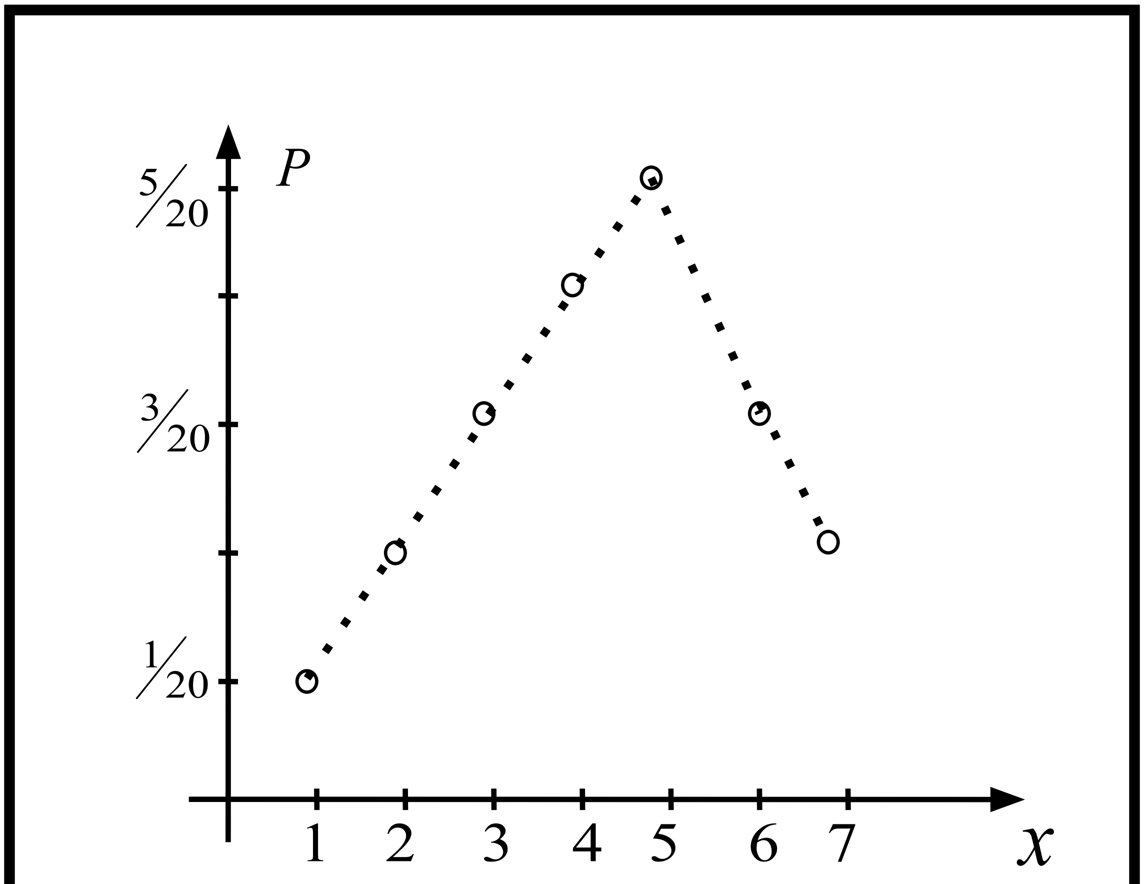
Выделяем варианты и их частоты $x_i(n_i)$:
1(1), 2(2), 3(3), 4(4), 5(5), 6(3), 7(2).
Вариантов всего 7, поэтому будем строить дискретный ряд.

Находим частоты по формуле: $p_i^* = \frac{n_i}{n}$

1	2	3	4	5	6	7
1/20	2/20	3/20	4/20	5/20	3/20	2/20

Решение задачи 1

2. По найденному ряду строим многоугольник частот:



Решение задачи 1

3. Находим выборочную функцию распределения:

$$F^*(x_1) = 0 \qquad F^*(x_2) = p_1^* = \frac{1}{20} \qquad F^*(x_3) = p_1^* + p_2^* = \frac{1}{20} + \frac{2}{20} = \frac{3}{20}$$

$$F^*(x_4) = p_1^* + p_2^* + p_3^* = \frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{3}{20} = \frac{6}{20} \qquad F^*(x_5) = p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* = \frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{3}{20} + \frac{4}{20} = \frac{10}{20}$$

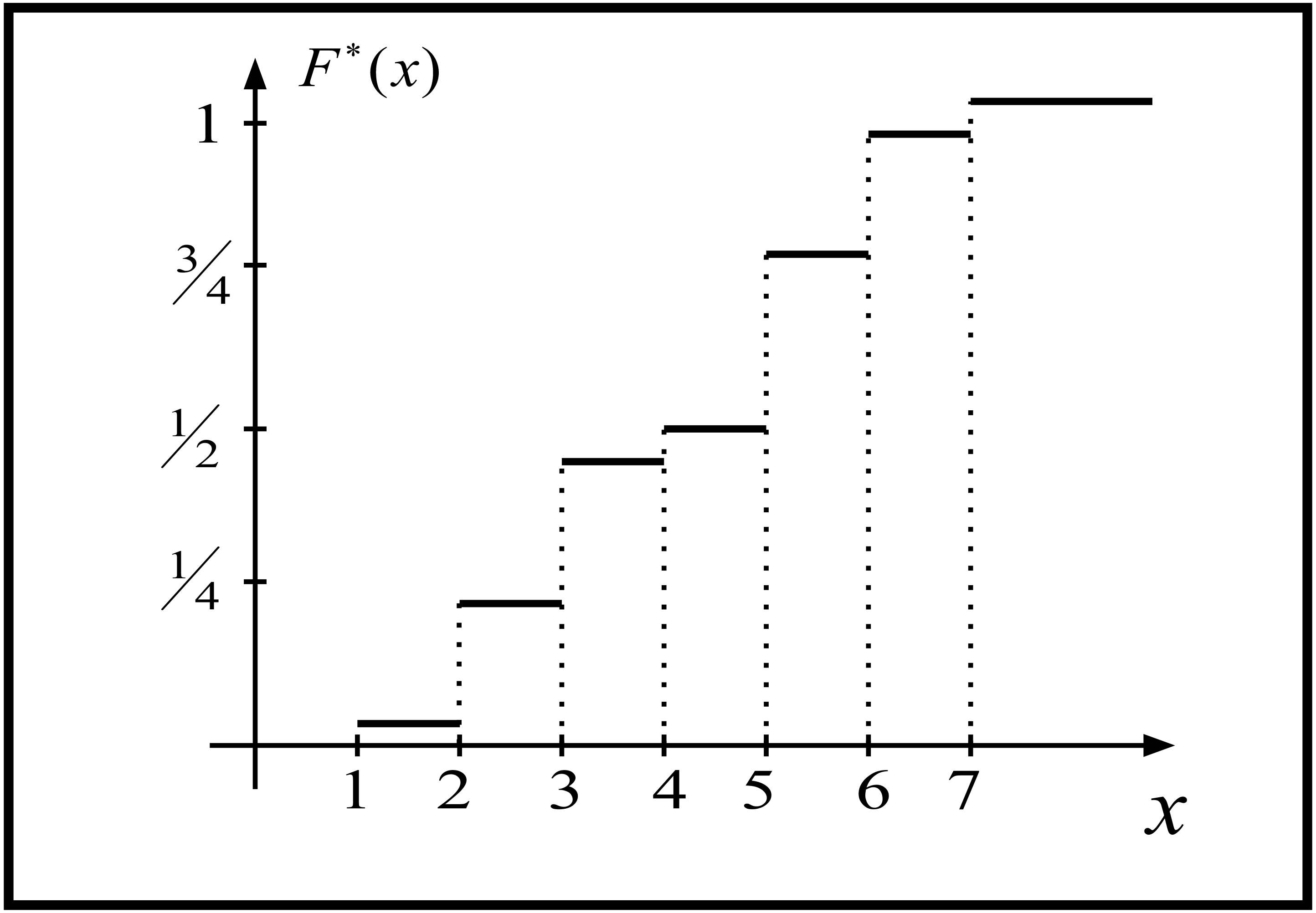
$$F^*(x_6) = p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* + p_5^* =$$
$$= \frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{3}{20} + \frac{4}{20} + \frac{5}{20} = \frac{15}{20}$$

$$F^*(x_7) = p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* + p_5^* + p_6^* =$$
$$= \frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{3}{20} + \frac{4}{20} + \frac{5}{20} + \frac{3}{20} = \frac{18}{20}$$

$$F^*(x_8) = p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* + p_5^* + p_6^* + p_7^* =$$
$$= \frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{3}{20} + \frac{4}{20} + \frac{5}{20} + \frac{3}{20} + \frac{2}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

Решение задачи 1

...строим график выборочной функции распределения:



Решение задачи 1

4. Находим выборочное среднее по ряду распределения:

$$\overline{X}_B = 1\cdot\frac{1}{20} + 2\cdot\frac{2}{20} + 3\cdot\frac{3}{20} + 4\cdot\frac{4}{20} + 5\cdot\frac{5}{20} + 6\cdot\frac{3}{20} + 7\cdot\frac{2}{20} = 4.35$$

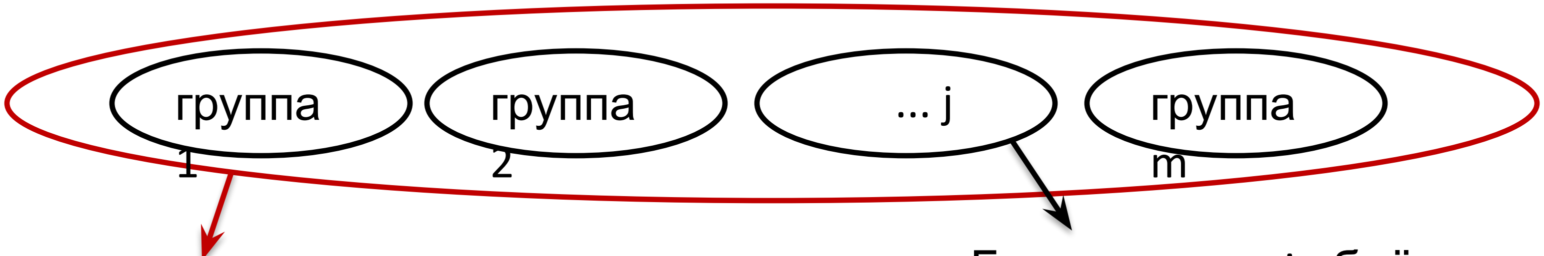
5. Находим выборочную дисперсию:

$$D_B = 1^2\cdot\frac{1}{20} + 2^2\cdot\frac{2}{20} + 3^2\cdot\frac{3}{20} + 4^2\cdot\frac{4}{20} +$$

$$+ 5^2\cdot\frac{5}{20} + 6^2\cdot\frac{3}{20} + 7^2\cdot\frac{2}{20} - (4.35)^2 = 4.74?$$

Разбиение статистической совокупности на группы

Допустим, что все значения количественного признака X совокупности, безразлично генеральной или выборочной, разбиты на несколько групп.



Генеральная совокупность объёма n:
общее среднее $\overline{x}$, **общая дисперсия** $D_{общ}$

$$D_{общ} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Группа номер j объёма N_j:
групповая средняя $\overline{x}_j$,
групповая дисперсия D_j

$$D_j = \frac{1}{N_j}\sum_{i=1}^{N_j}(x_i - \overline{x}_j)^2$$

Внутригрупповая дисперсия:
(среднее групповых дисперсий)

$$D_{внугр} = \sum_{j=1}^{m}\frac{N_j}{n}D_j$$

$$D_{межгр} = \sum_{i=1}^{N_j}\frac{N_j}{n}(\overline{x}_j - \overline{x})^2$$

$$D_{общ} = D_{внугр} + D_{межгр}$$

Межгрупповая дисперсия:

Задача 2

Найти внутригрупповую, межгрупповую и общую дисперсии совокупности,
состоящей из трёх групп:

первая группа:

X_i	1	2	8
n_i	30	15	5

вторая группа:

X_i	1	6
n_i	10	15

третья группа:

X_i	3	8
n_i	20	5

Отв. $D_{\text{внгр}} = 4{,}6$; $D_{\text{межгр}} = 1$; $D_{\text{общ}} = 5{,}6$.

Оценка корреляции величин

Пусть данные наблюдений за признаками X и Y сведены в корреляционную таблицу.

Y	X: 3	X: 9
3	4	13
5	6	7
n_x	10	20
$\bar{y}_x$	4,2	3,7

Можно считать, что наблюдаемые Y разбиты на группы, соответствующие отдельным X.

Тогда условные средние $<y_x>$ можно назвать групповыми средними.

Общая дисперсия в этом случае может быть представлена в виде суммы дисперсий:

$$D_{общ} = D_{внугр} + D_{межгр}$$

Можно доказать, что:

1. если Y связан с X **функциональной зависимостью**, то $D_{межгр} / D_{общ} = 1$
2. если Y связан с X **корреляционной зависимостью**, то $D_{межгр} / D_{общ} < 1$

(функциональная зависимость является крайним случаем вероятностной).

$$\eta_{yx} = \sqrt{D_{межгр} / D_{общ}}$$

– **выборочное корреляционное отношение** Y к X.

Ассиметрия и Эксцесс

Начальный момент порядка *k* случайной величины X это математическое ожидание величины X^k :

$$\nu_k = M(X^k)$$

Центральный момент порядка k случайной величины X это математическое ожидание величины $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M\left[(X - M(X))^k\right]$$

Начальные и центральные эмпирические моменты являются состоятельными оценками соответственно начальных и центральных теоретических моментов.

Асимметрия эмпирического распределения:

$$a_s = \mu_3 / \sigma^3$$

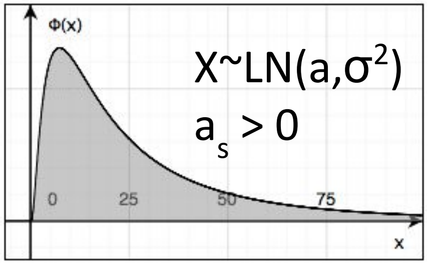
$a_s > 0$ (< 0), если правый хвост распределения длиннее (короче) левого.

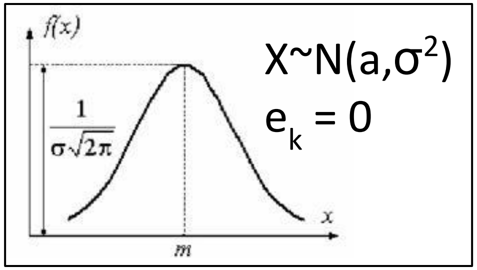
Эксцесс эмпирического распределения:

$$e_k = \mu_4 / \sigma^4 - 3$$

$e_k > 0$ (< 0), если пик возле мат. ожидания острый (гладкий).

Логнормальное распределение
:
$X \sim LN(a,\sigma^2)$ =>
=> $\ln(X) \sim N(a,\sigma^2)$





Метод моментов для точечной оценки параметров распределения

(предложен Пирсоном)

•

А. Оценка одного параметра. Пусть задан вид плотности распределения $f(x, \theta)$, определяемой одним неизвестным параметром θ. Требуется найти точечную оценку параметра θ.

Для оценки одного параметра достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра. Следуя методу моментов, приравняем, например, начальный тео-

$M(X) = \bar{x}_в.$

Математическое ожидание $M(X)$, как видно из соотношения

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;\ \theta)\, dx = \varphi(\theta),$$

есть функция от θ, поэтому (*) можно рассматривать как уравнение с одним неизвестным θ. Решив это уравнение относительно параметра θ, тем самым найдем его точечную оценку θ^*, которая является функцией от выборочной средней, следовательно, и от вариант выборки:

$$\theta^* = \psi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Задача

Пример 1. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения, плотность распределения которого $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$.

Решение:

$1/\lambda = \bar{x}_в.$

Б. Оценка двух параметров методом Пирсона

Б. Оценка двух параметров. Пусть задан вид плотности распределения $f(x;\ \theta_1,\ \theta_2)$, определяемой неизвестными параметрами θ_1 и θ_2. Для отыскания двух параметров необходимы два уравнения относительно этих параметров. Следуя методу моментов, приравняем, например, начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка и центральный теоретический момент второго порядка центральному эмпирическому моменту второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} M(X) &= \bar{x}_{\text{в}}, \\ D(X) &= D_{\text{в}}. \end{aligned}\right\}$$

Математическое ожидание и дисперсия есть функции от θ_1 н θ_2, поэтому (**) можно рассматривать как систему двух уравнений с двумя неизвестными θ_1 и θ_2. Решив

Задача

Пример 2. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точечные оценки неизвестных параметров a и σ нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

Решение:

Приняв во внимание, что математическое ожидание нормального распределения равно параметру a, дисперсия равна σ^2 (см. гл. XII, § 2), имеем:

$$a = \overline{x}_{\text{в}}, \qquad \sigma^2 = D_{\text{в}}.$$

Замечание 1. Для оценок неизвестных параметров можно приравнивать не только сами моменты, но и функции от моментов. В частности, этим путем получают состоятельные оценки характеристик распределений, которые являются функциями теоретических моментов. Например, асимметрия теоретического распределения (см. гл. XII, § 9)

$$A_S = \mu_3/\sigma^3 = \mu_3/(\sqrt{\mu_2})^3$$

есть функция от центральных моментов второго и третьего порядков. Заменив эти теоретические моменты соответствующими эмпирическими моментами, получим точечную оценку асимметрии

$$A_S^* = m_3/(\sqrt{m_2})^3.$$

Метод наибольшего правдоподобия

(предложен Фишером)

А. Дискретные случайные величины. Пусть X — дискретная случайная величина, которая в результате n испытаний приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Допустим, что вид закона распределения величины X задан, но неизвестен параметр θ, которым определяется этот закон. Требуется найти его точечную оценку.

Обозначим вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, через $p(x_i; \theta)$.

Функцией правдоподобия дискретной случайной величины X называют функцию аргумента θ:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = p(x_1; \theta)\, p(x_2; \theta) \ldots p(x_n; \theta),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — фиксированные числа.

L - это вероятность получить такую выборку!

В качестве точечной оценки параметра θ принимают такое его значение $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором функция правдоподобия достигает максимума. Оценку θ^* называют *оценкой наибольшего правдоподобия*.

Метод наибольшего правдоподобия

.

Логарифмической функцией правдоподобия называют функцию $\ln L$. Как известно, точку максимума функции $\ln L$ аргумента θ можно искать, например, так:

1) найти производную $\frac{d \ln L}{d\theta}$;

2) приравнять производную нулю и найти критическую точку — корень полученного уравнения (его называют *уравнением правдоподобия*);

3) найти вторую производную $\frac{d^2 \ln L}{d\theta^2}$; если вторая производная при $\theta = \theta^*$ отрицательна, то θ^* — точка максимума.

Недостаток метода состоит в том, что он часто требует сложных вычислений.

Замечание 2. Оценка наибольшего правдоподобия не всегда совпадает с оценкой, найденной методом моментов.

Метод наибольшего правдоподобия

Б. Непрерывные случайные величины.

Функцией правдоподобия непрерывной случайной величины X называют функцию аргумента θ:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \ldots f(x_n; \theta),$$

где *f* - плотности распределений вероятности величин *x*.

Задача

- **Пример 3.** Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра λ показательного распределения

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (0 < x < \infty),$$

если в результате n испытаний случайная величина X, распределенная по показательному закону, приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Решение

Решение. Составим функцию правдоподобия, учитывая, что $\theta = \lambda$:

$$L = f(x_1;\ \lambda)\, f(x_2;\ \lambda)\ \ldots\ f(x_n;\ \lambda) = (\lambda e^{-\lambda x_1})(\lambda e^{-\lambda x_2})\ \ldots\ (\lambda e^{-\lambda x_1}).$$

Отсюда

$$L = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}.$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum x_i.$$

Найдем первую производную по λ:

$$\frac{d \ln L}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum x_i.$$

Напишем уравнение правдоподобия, для чего приравняем первую производную нулю:

$$(n/\lambda) - \sum x_i = 0.$$

Найдем критическую точку, для чего решим полученное уравнение относительно λ:

$$\lambda = n / \sum x_i = 1 / \left(\sum x_i / n\right) = 1 / \overline{x}_в.$$

Найдем вторую производную по λ:

$$\frac{d^2 \ln L}{d\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2}.$$

Легко видеть, что при $\lambda = 1/\overline{x}_в$ вторая производная отрицательна;

Откуда следует, что: $\lambda^* = 1/\overline{x}_в.$

З а м е ч а н и е. Если плотность распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X определяется двумя неизвестными параметрами θ_1 и θ_2, то функция правдоподобия является функцией двух независимых аргументов θ_1 и θ_2:

$$L = f(x_1;\ \theta_1,\ \theta_2)\, f(x_2;\ \theta_1,\ \theta_2)\ \ldots\ f(x_n;\ \theta_1,\ \theta_2),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — наблюдавшиеся значения X. Далее находят логарифмическую функцию правдоподобия и для отыскания ее максимума составляют и решают систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = 0. \end{cases}$$

Пример 4. Найти методом наибольшего правдоподобия оценки параметров a и σ нормального распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

если в результате n испытаний величина X приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Решение. Составим функцию правдоподобия, учитывая, что $\theta_1=a$ и $\theta_2=\sigma$:

$$L=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x_1-a)^2/2\sigma^2}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x_2-a)^2/2\sigma^2}\ldots\times$$
$$\ldots\times\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x_n-a)^2/2\sigma^2}.$$

Отсюда

$$L=\frac{1}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n}\,e^{-\left(\sum(x_i-a)^2/2\sigma^2\right)}$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L=-n\ln\sigma+\ln\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}-\frac{\sum(x_i-a)^2}{2\sigma^2}.$$

Найдем частные производные по a и по σ:

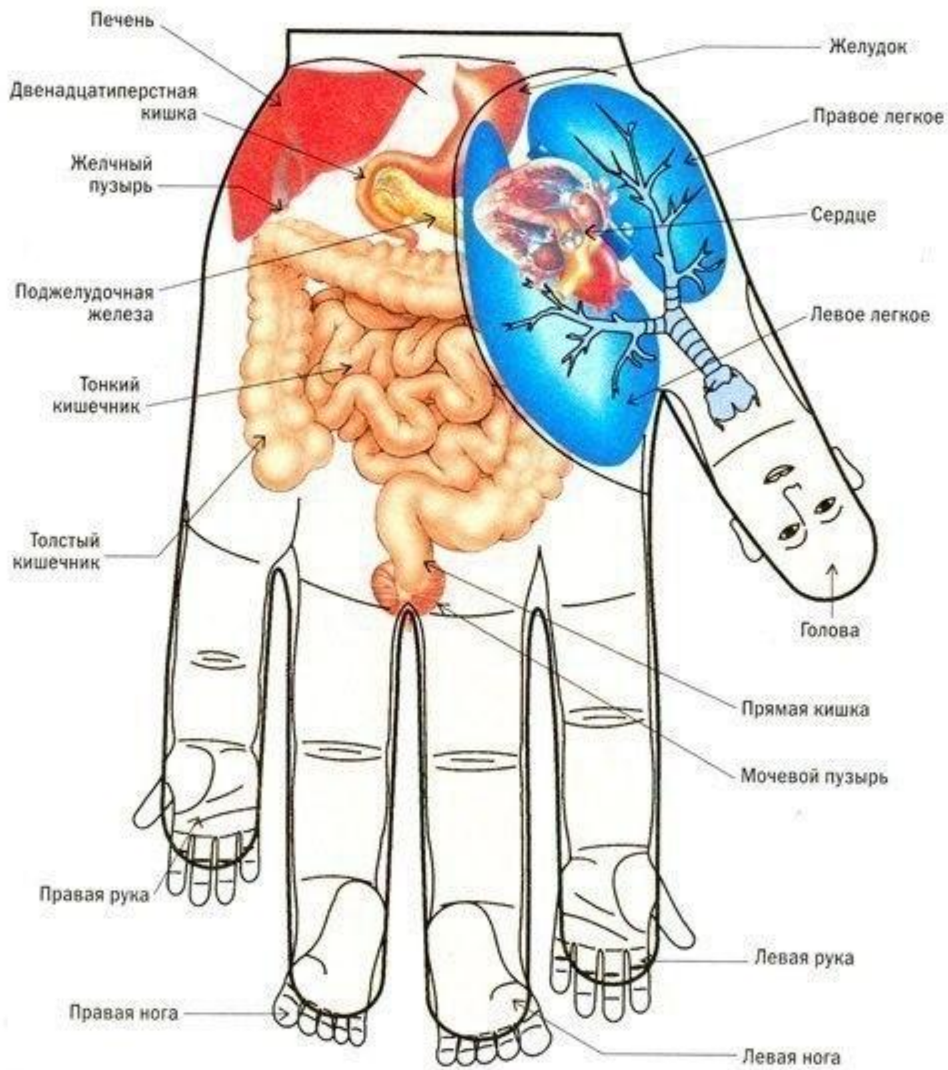
$$\frac{\partial\ln L}{\partial a}=\frac{\sum x_i-na}{\sigma^2};\quad\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum(x_i-a)^2}{\sigma^3}.$$

Приравняв частные производные нулю и решив полученную систему двух уравнений относительно a и σ^2, получим:

$$a=\sum x_i/n=\overline{x}_в;\quad\sigma^2=\left(\sum(x_i-\overline{x}_в)^2\right)/n=D_в.$$

Итак, искомые оценки наибольшего правдоподобия: $a^*=\overline{x}_в$; $\sigma^*=\sqrt{D_в}$. Заметим, что первая оценка несмещенная, а вторая смещенная.

Спасибо за внимание :)



...точечные
оценки

Вопросы для контроля усвояемости предмета (стр1)

- Необходимость статистической оценки теоретического распределения
- Статистическая оценка
- Точечная статистическая оценка
- Точечная оценка Θ – случайная величина?
- Состоятельная статистическая оценка
- Несмещённая статистическая оценка
- Эффективная статистическая оценка
- Как связана генеральная средняя с мат. ожиданием признака?
- Выборочная средняя
- Свойство устойчивости выборочной средней
- Среднее абсолютное отклонение
- Является ли выборочная средняя состоятельной?
- Является ли выборочная средняя несмещённой?
- Является ли выборочная средняя эффективной?
- Генеральная дисперсия
- Выборочная дисперсия
- Генеральное и выборочное среднее квадратическое отклонение

Вопросы для контроля усвояемости предмета (стр2)

- Коэффициент вариации
- Является ли выборочная дисперсия состоятельной?
- Является ли выборочная дисперсия несмещённой?
- Является ли выборочная дисперсия эффективной?
- Исправленная выборочная дисперсия
- Групповая средняя, групповая дисперсия
- Внутригрупповая дисперсия
- Межгрупповая дисперсия
- Связь внутригрупповой и межгрупповой дисперсий
- Начальный момент порядка k
- Центральный момент порядка k
- Асимметрия
- Эксцесс
- Метод моментов. Оценка одного или двух параметров
- Метод наибольшего правдоподобия
- Функция правдоподобия