

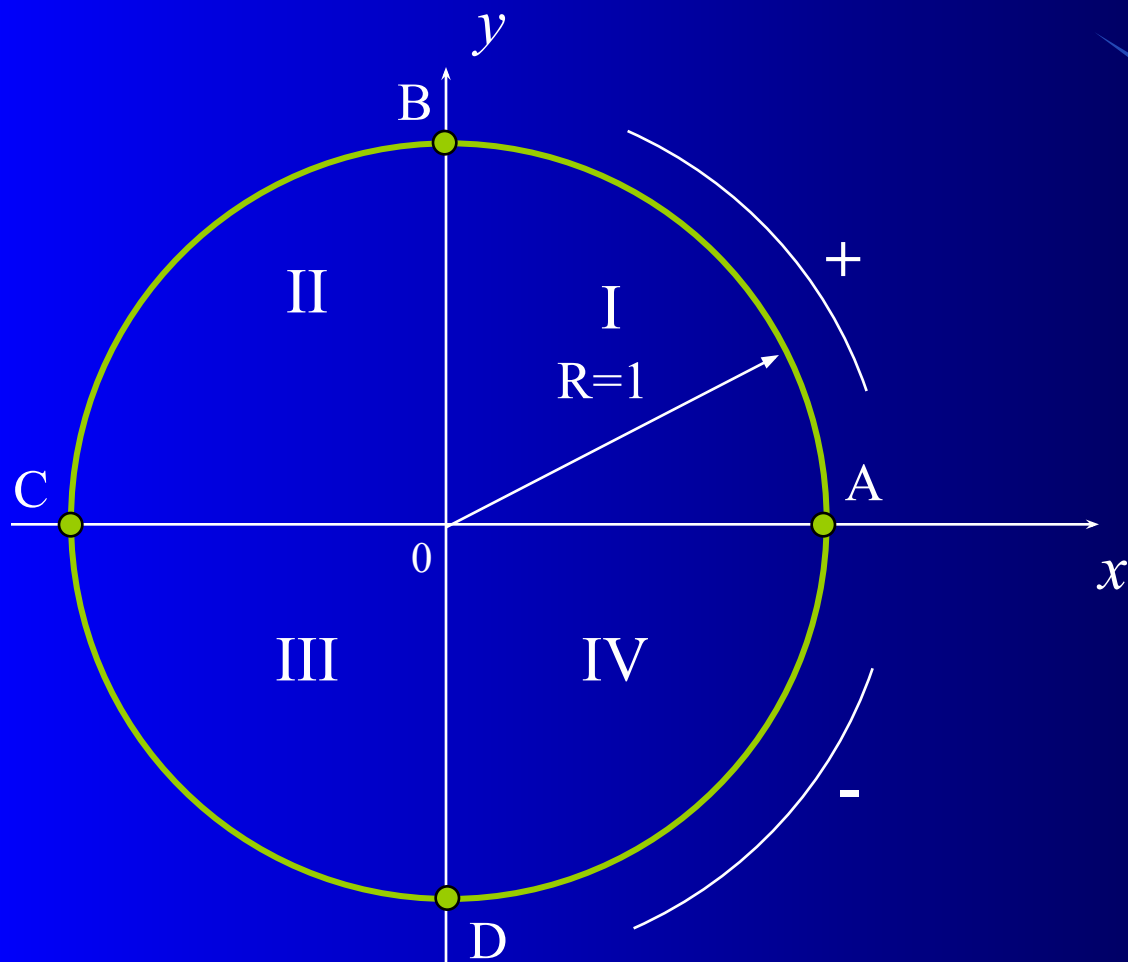
# Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Лекция 4

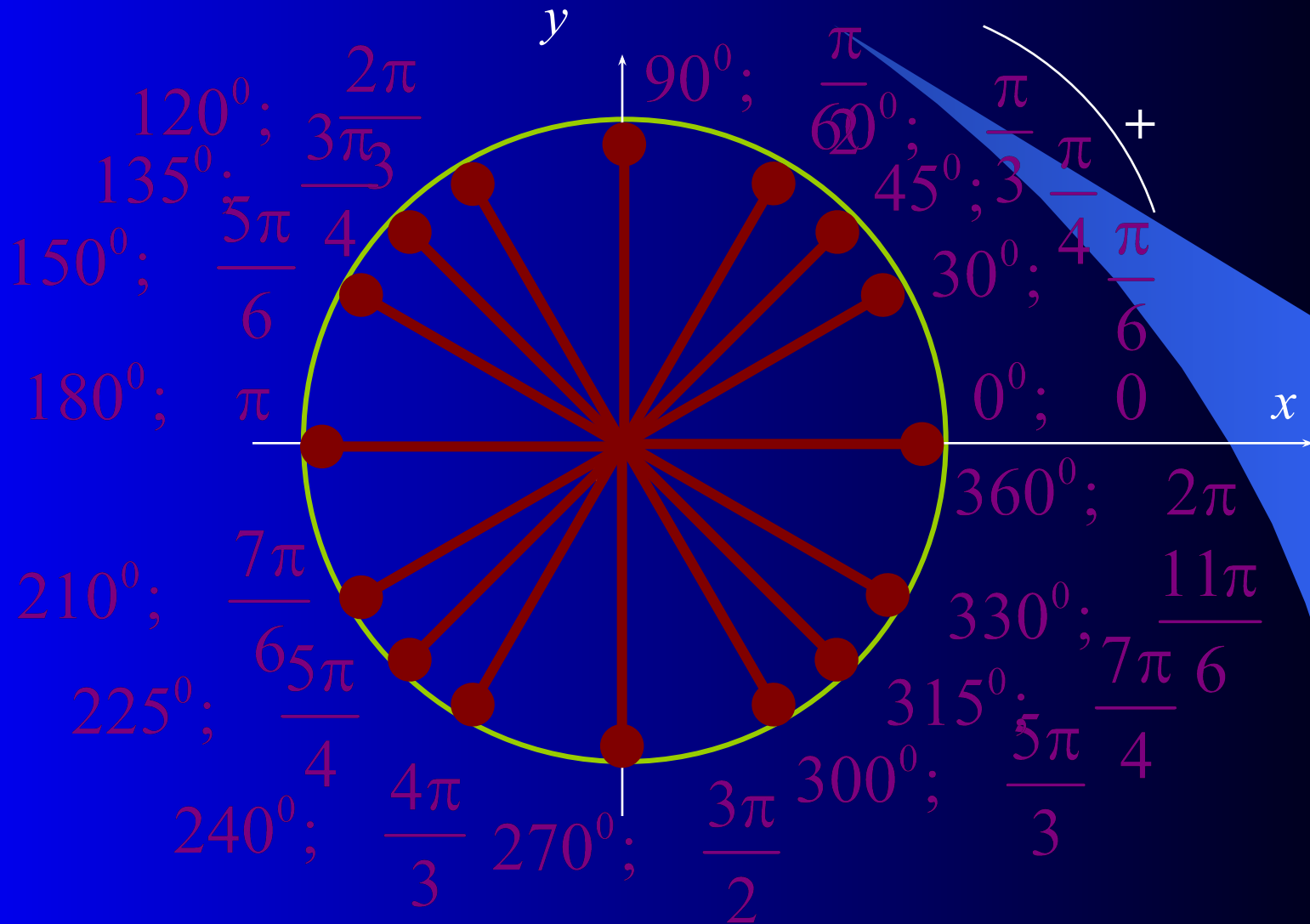
# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- ✓ *тригонометрическая окружность*
- ✓ *градусы и радианы*
- ✓ *синус и косинус*
- ✓ *тангенс и котангенс*

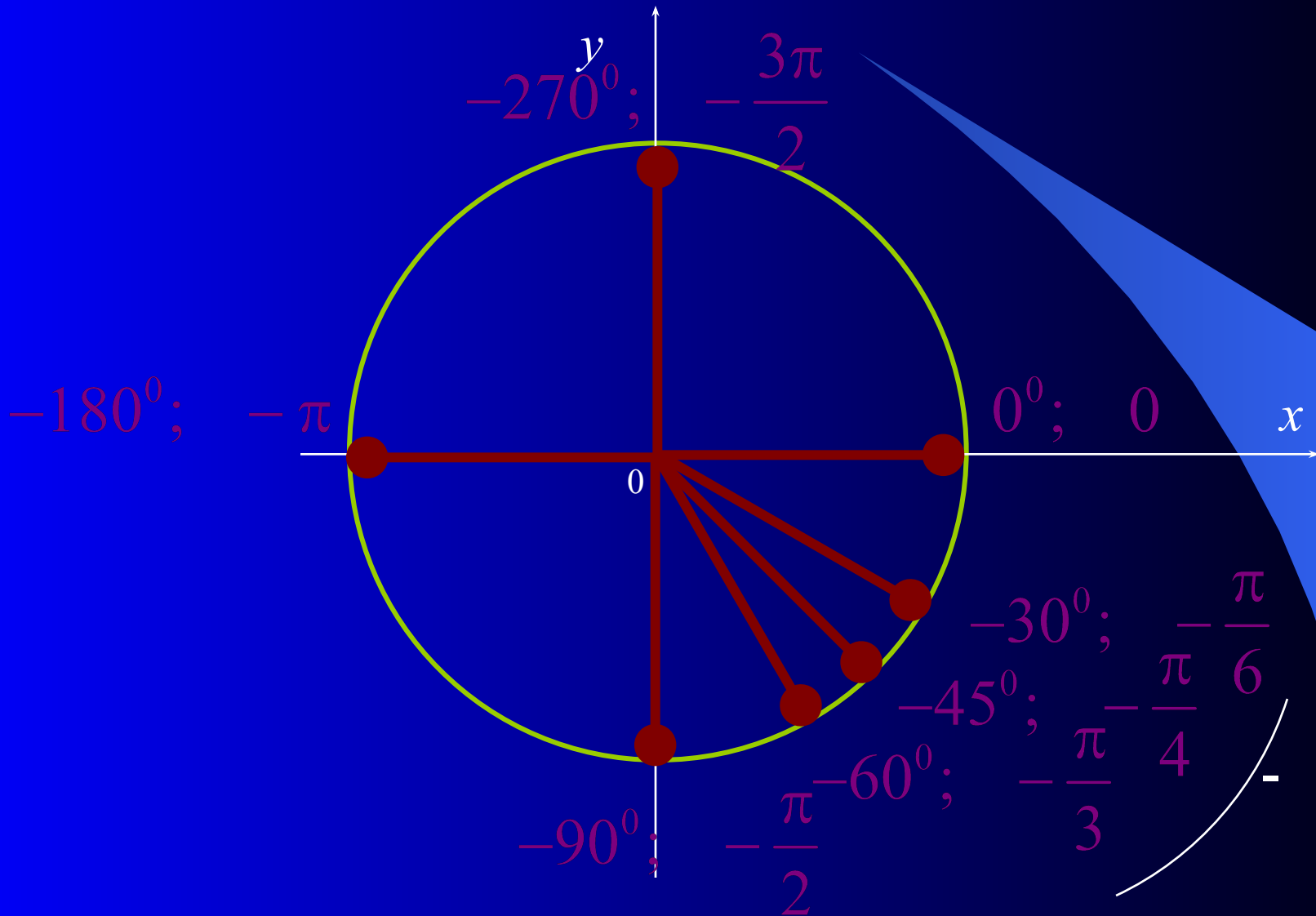
# Тригонометрическая окружность



# Градусы и радианы



# Градусы и радианы



# Градусы и радианы

Углы в градусах	$360^\circ$	$180^\circ$	$90^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$	$30^\circ$
Углы в радианах	$2\pi$	$\pi$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$

# Перевод из радиан в градусы

*Чтобы найти радианную меру любого угла по его данной градусной мере, надо умножить число градусов на / 180  
0.017453, число минут – на / ( 180 · 60 )  
0.000291, число секунд – на / ( 180 · 60 · 60 ) 0.000005 и сложить найденные произведения.*

# Пример 1.

*Найти радианную меру угла  $12^{\circ}30'$  с точностью до четвёртого десятичного знака.*

**Решение.** Умножим 12 на  $/ 180 : 12 \cdot 0.017453 = 0.2094$ .

Умножим 30 на  $/ (180 \cdot 60) : 30 \cdot 0.000291 = 0.0087$ .

Теперь находим:

$$12^{\circ}30' = 0.2094 + 0.0087 = 0.2181 \text{ рад.}$$



# Из градусов в радианы

*Чтобы найти градусную меру любого угла по его данной радианной мере, надо умножить число радиан на  $180^\circ / 57^\circ.296 = 57^\circ 17' 45''$  (относительная погрешность результата составит  $\sim 0.0004\%$ , что соответствует абсолютной погрешности  $\sim 5''$  для полного оборота  $360^\circ$  ).*

## Пример 2.

Найти градусную меру угла 1.4 рад с точностью до 1'.

**Решение.** Последовательно найдём:

$$1 \text{ рад } 57^{\circ}17'45'' ;$$

$$0.4 \text{ рад } 0.4 \cdot 57^{\circ}.296 = 22^{\circ}.9184;$$

$$0^{\circ}.9184 \cdot 60 \text{ } 55'.104; \text{ } 0'.104 \cdot 60 \text{ } 6''.$$

...

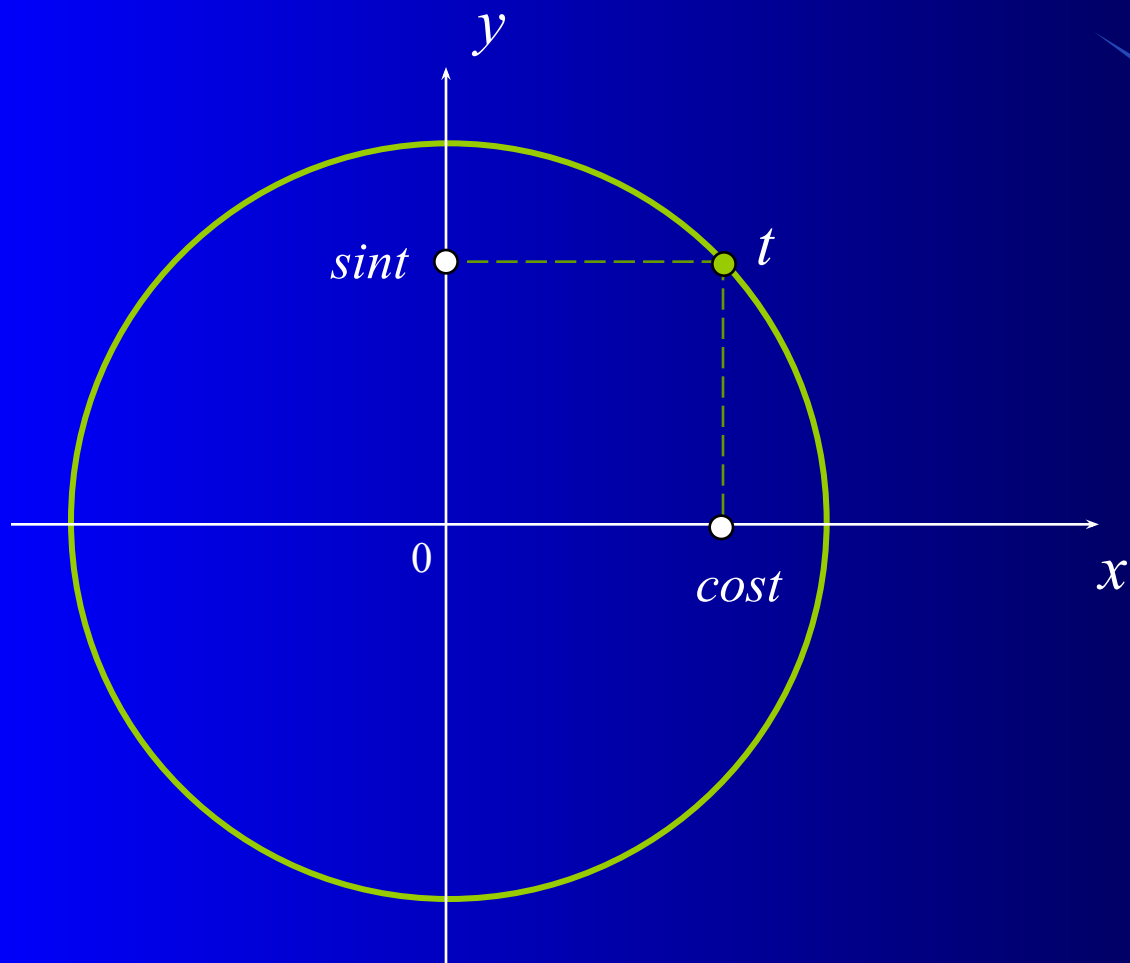
## Пример 2 (продолжение)

Таким образом,  $0.4 \text{ рад } 22^{\circ}55'6''$  и тогда:

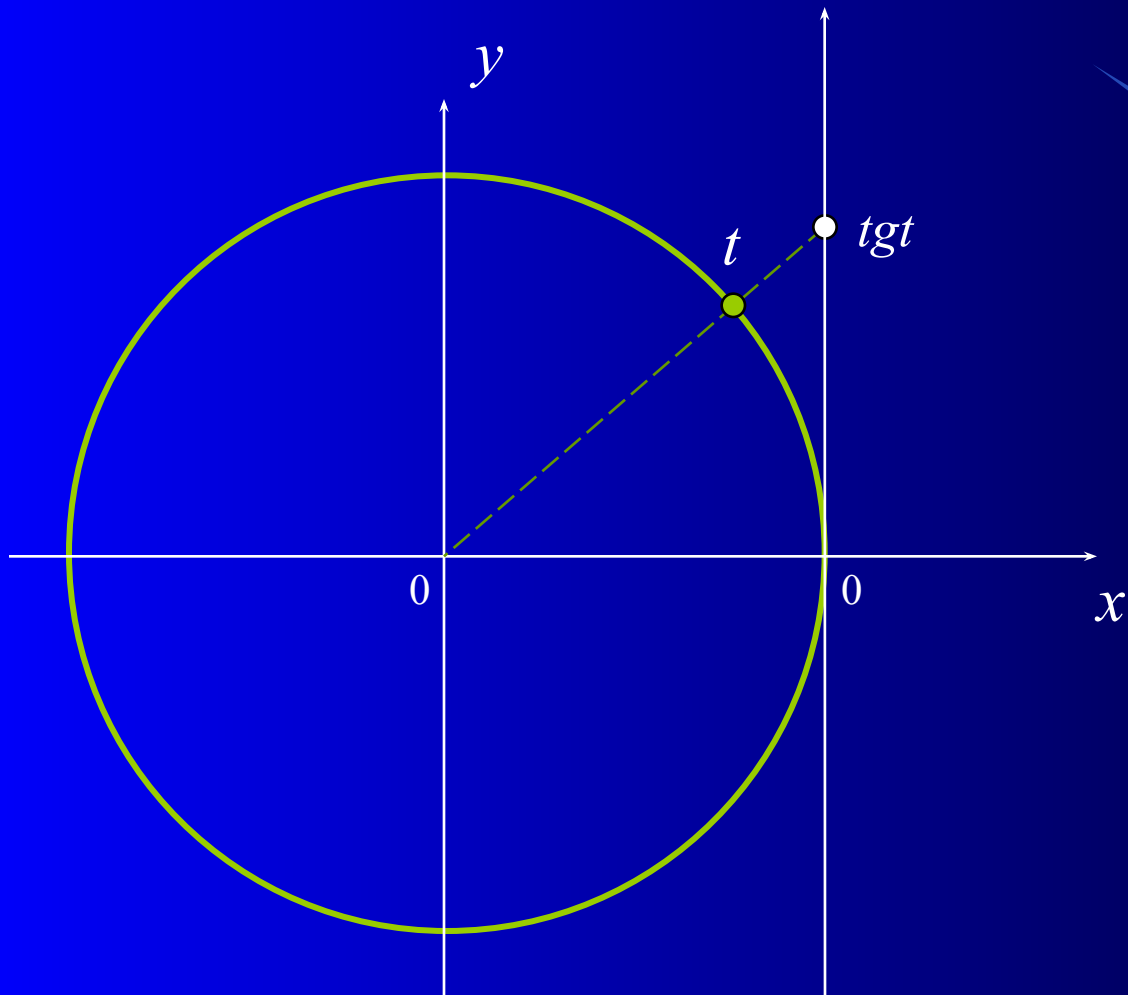
$$\begin{array}{r} 1 \text{ рад } 57^{\circ}17'45'' \\ + \\ 0.4 \text{ рад } 22^{\circ}55'6'' \\ \hline 1.4 \text{ рад } 80^{\circ}12'51'' \end{array}$$

После округления этого результата до требуемой точности в  $1'$  окончательно получим:  $1.4 \text{ рад } \gg 80^{\circ}13'$ .

# Косинус и синус

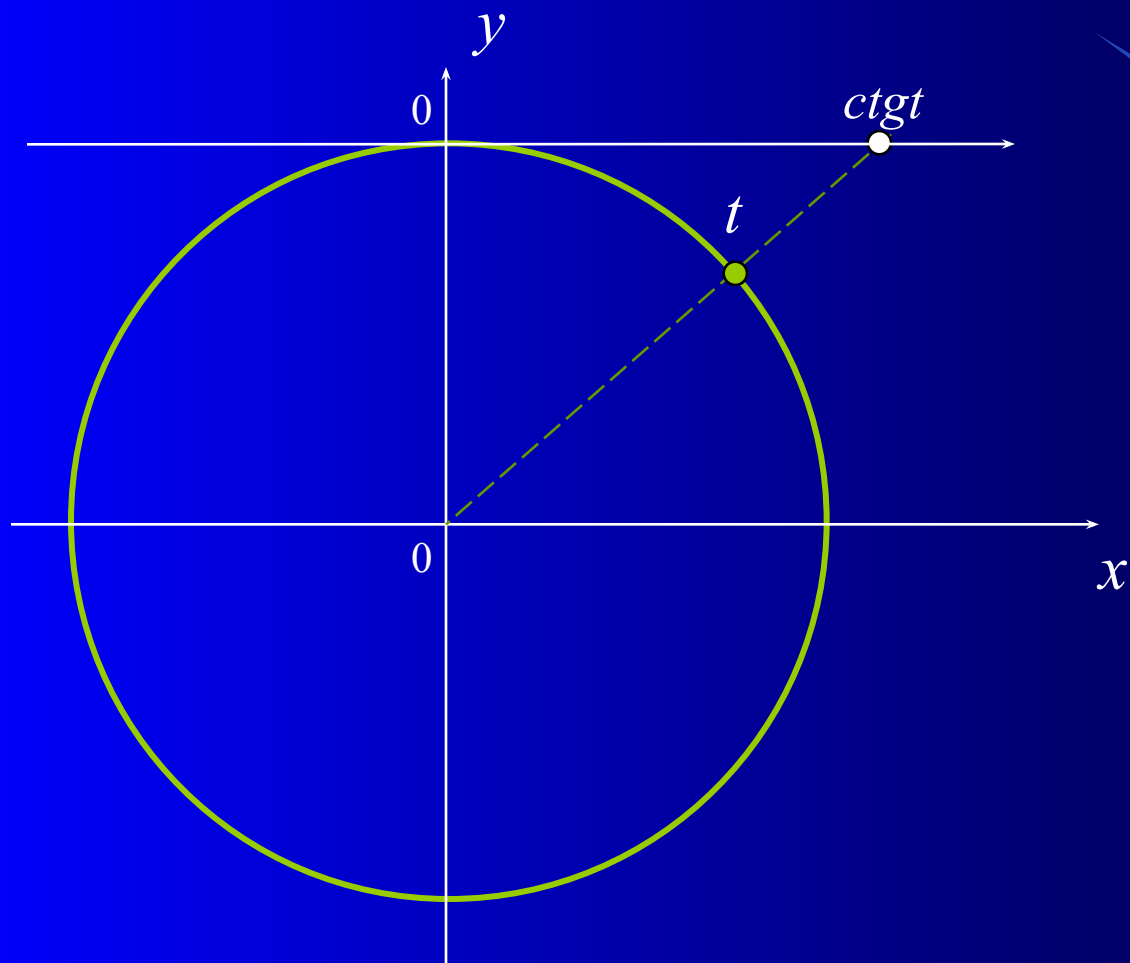


# Тангенс



$$\text{tgt} = \frac{\sin t}{\cos t}$$

# Котангенс



$$ctgt = \frac{\cos t}{\sin t}$$

# Формулы приведения

Эти формулы позволяют:

- 1) найти численные значения тригонометрических функций углов, больших  $90^\circ$ ;
- 2) выполнить преобразования, приводящие к более простым выражениям;
- 3) избавиться от отрицательных углов и углов, больших  $360^\circ$ .

# Формулы приведения

	sin	cos	tan	cot
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$
$90^\circ - \alpha$	$+\cos \alpha$	$+\sin \alpha$	$+\cot \alpha$	$+\tan \alpha$
$90^\circ + \alpha$	$+\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$
$180^\circ - \alpha$	$+\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$
$180^\circ + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$+\tan \alpha$	$+\cot \alpha$
$270^\circ - \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$+\cot \alpha$	$+\tan \alpha$
$270^\circ + \alpha$	$-\cos \alpha$	$+\sin \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$
$360^\circ k - \alpha$	$-\sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$
$360^\circ k + \alpha$	$+\sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$+\tan \alpha$	$+\cot \alpha$



# Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1;$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1;$$

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1;$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha;$$

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha;$$

$$\cos^2 \alpha = 1 / (1 + \tan^2 \alpha) = \cot^2 \alpha / (1 + \cot^2 \alpha);$$

$$\sin^2 \alpha = 1 / (1 + \cot^2 \alpha) = \tan^2 \alpha / (1 + \tan^2 \alpha).$$

# Формулы сложения и вычитания

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta};$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta};$$

$$\cot(\alpha + \beta) = -\frac{1 - \cot \alpha \cot \beta}{\cot \alpha + \cot \beta};$$

$$\cot(\alpha - \beta) = -\frac{1 + \cot \alpha \cot \beta}{\cot \alpha - \cot \beta}.$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha ;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 ;$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} ; \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} ;$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = 3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha ;$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha ;$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} ; \quad \cot 3\alpha = \frac{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1} ;$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{(1 - \cos \alpha) / 2} ; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{(1 + \cos \alpha) / 2} ;$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{(1 - \cos \alpha) / (1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} ;$$

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{(1 + \cos \alpha) / (1 - \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} .$$

# Формулы двойных, тройных и половинных углов

# Преобразование тригонометрических выражений в произведение

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta};$$

$$\cot \alpha \pm \cot \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta};$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ - \alpha);$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ + \alpha);$$

$$\tan \alpha + \cot \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta};$$

# Преобразование тригонометрических выражений в произведение

$$\tan \alpha - \cot \beta = - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta};$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha / 2; \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \alpha / 2;$$

$$1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 (45^\circ - \alpha / 2); \quad 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 (45^\circ - \alpha / 2);$$

$$1 + \tan \alpha \tan \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}; \quad 1 - \tan \alpha \tan \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta};$$

$$\cot \alpha \cot \beta + 1 = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}; \quad \cot \alpha \cot \beta - 1 = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

## Обратные тригонометрические функции

$\arcsin x$  – это угол, синус которого равен  $x$ . Аналогично определяются функции  $\arccos x$ ,  $\arctan x$ ,  $\operatorname{arccot} x$ ,  $\operatorname{arcsec} x$ ,  $\operatorname{arccosec} x$ . Эти функции являются обратными по отношению к функциям  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$ ,  $\operatorname{cosec} x$ , поэтому они называются *обратными тригонометрическими функциями*. Все обратные тригонометрические функции являются *многозначными функциями*, то есть каждому значению аргумента соответствует бесчисленное множество значений функции. Так, например, углы  $30^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $390^\circ$ ,  $510^\circ$ ,  $750^\circ$  имеют один и тот же синус.

# Обратные тригонометрические функции

Если обозначить любое из значений обратных тригонометрических функций через  $\text{Arcsin } x$ ,  $\text{Arccos } x$ ,  $\text{Arctan } x$ ,  $\text{Arccot } x$  и сохранить обозначения:  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctan x$ ,  $\text{arccot } x$  для их главных значений, то связь между ними выражается следующими соотношениями:

$$\text{Arcsin } x = (-1)^k \cdot \arcsin x + k\pi,$$

$$\text{Arccos } x = \pm \arccos x + 2k\pi,$$

$$\text{Arctan } x = \arctan x + k\pi,$$

$$\text{Arccot } x = \text{arccot } x + k\pi,$$

где  $k$  – любое целое число. При  $k = 0$  мы имеем главные значения.

# Основные соотношения для обратных тригонометрических функций

$$\sin \operatorname{Arcsin} a = a ; \quad \operatorname{Arcsin} (\sin \alpha) = k\pi + (-1)^k \cdot \alpha ;$$

$$\cos \operatorname{Arccos} a = a ; \quad \operatorname{Arccos} (\cos \alpha) = 2k\pi \pm \alpha ;$$

$$\tan \operatorname{Arctan} a = a ; \quad \operatorname{Arctan} (\tan \alpha) = k\pi + \alpha ;$$

$$\cot \operatorname{Arccot} a = a ; \quad \operatorname{Arccot} (\cot \alpha) = k\pi + \alpha ;$$

$$\operatorname{arcsin} a = \operatorname{arccos} \sqrt{1-a^2} = \operatorname{arctan} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} ;$$

$$\operatorname{arccos} a = \operatorname{arcsin} \sqrt{1-a^2} = \operatorname{arccot} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} ;$$

$$\operatorname{arctan} a = \operatorname{arccot} \frac{1}{a} = \operatorname{arcsin} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \operatorname{arccos} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} ;$$

$$\operatorname{arcsin} a + \operatorname{arccos} a = \pi / 2 ; \quad \operatorname{arctan} a + \operatorname{arccot} a = \pi / 2 ;$$

$$\operatorname{arcsec} a + \operatorname{arccosec} a = \pi / 2 .$$

при  
 $a > 0$