

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Лекции 10,11

Транспортная задача является частным случаем задачи линейного программирования и может быть решена симплекс-методом. Однако, в силу особенностей этой задачи, она решается с помощью так называемого распределительного метода и его модификаций

Общая постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления A_1, A_2, \dots, A_m в n пунктов назначения B_1, B_2, \dots, B_n .

При этом в качестве критерия оптимальности берется либо минимальная стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки.

Рассмотрим транспортную задачу, в которой в качестве критерия оптимальности берется минимальная стоимость перевозок всего груза. Обозначим через c_{ij} тарифы или стоимости перевозки единицы груза из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения, через a_i – запасы груза в i -м пункте отправления, через b_j – потребности в грузе j -ым пунктом назначения, через x_{ij} – количество единиц груза, перевозимого из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения (перевозки).

Математическая модель транспортной задачи

Найти $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

Первое ограничение

$$\left\{ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n} \right.$$

означает, что все потребности должны быть удовлетворены , а второе -

$$\left\{ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m} \right. ,$$

что все запасы должны быть перевезены.

Определение. Всякое неотрицательное решение системы ограничений транспортной задачи, определяемое матрицей размера $m \times n$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

называют **допустимым решением** (или **планом**) транспортной задачи.

Определение.

План $X^* = (x_{ij}^*)_{m \times n}$,

при котором целевая функция принимает минимальное значение, называется **оптимальным**.

Тарифы или стоимости перевозок единицы груза c_{ij} также задаются матрицей, которая называется **матрицей транспортных издержек** или **матрицей стоимостей**

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Транспортная таблица

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Необходимое и достаточное условие разрешимости транспортной задачи

Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, то есть, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

--балансовые условия.

При выполнении этого условия модель транспортной задачи называется закрытой. Если балансовое условие не выполняется, то есть

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j \quad ,$$

то модель транспортной задачи называется **открытой**.

В случае открытой транспортной задачи выполнение балансового условия достигается введением фиктивного поставщика или фиктивного потребителя с соответствующими тарифами, равными нулю.

Любое решение транспортной задачи представляет собой распределение перевозок x_{ij} в транспортной таблице. **Оптимальному решению** транспортной задачи соответствует **оптимальное распределение перевозок**.

Перераспределение перевозок в транспортной таблице осуществляется до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение перевозок.

Пример

трены ниже.

2.1. Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120, 50, 190 и 110 ед. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны 160, 140, 170 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Решение. Обозначим через x_{ij} количество единиц сырья, перевозимого из i -го пункта его получения на j -е предприятие. Тогда условия доставки и вывоза необходимого и имеющегося сырья обеспечиваются за счет выполнения следующих равенств:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 160, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 140, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 170, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 190, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110. \end{cases} \quad (6)$$

При данном плане $X = (x_{ij})$ ($i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}$) перевозок общая стоимость перевозок составит

$$F = 7x_{11} + 8x_{12} + x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + 5x_{22} + 9x_{23} + 8x_{24} + 9x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} + 6x_{34}. \quad (7)$$

Decode/Output time (ms): 65.23/40.26 [w:1423, h:2296, dpi:300, size:5508 byte] scale:50.0%(711x1148)
✓ Математическое программирование в примерах и задачах - Акулич И.Л., djvu

пуск C:\Documents and Se... C:\Documents and Se... Djvureader Microsoft PowerPoint ... EN 21:32

Все грузы должны быть перевезены, поэтому

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,3}$$

Это три первых уравнения.

Все потребности должны быть удовлетворены и, значит,

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,4}.$$

Это четыре последних уравнения.

Здесь закрытая модель: сумма запасов равна сумме потребностей.

А целевую функцию составили по матрице C - матрице тарифов перевозок.

Пример. Задача организации оптимального снабжения .

Три фермерских хозяйства A_1, A_2, A_3 ежедневно могут доставлять в город соответственно 60, 60 и 50 ц молока для обеспечения пяти торговых точек :

B_1, B_2, B_3, B_4, B_5

Стоимость перевозки 1ц молока и потребности торговых точек в молоке указаны в таблице

Таблица

Фермерские хозяйства	Затраты на перевозку 1ц к торговым точкам					Запасы молока ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	6	8	10	12	60
A_2	9	5	7	4	6	60
A_3	6	8	4	9	7	50
Потребности в молоке, ц	30	20	55	20	25	

Определить оптимальный план поставки молока в каждую торговую точку для удовлетворения потребностей, чтобы суммарные транспортные издержки были минимальными.

Экономико-математическая модель задачи.

Переменные : x_{ij} ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,5}$)

- количество молока , поставляемое i -м фермерским хозяйством в j -ю торговую точку.

Целевая функция – суммарные транспортные издержки, которые необходимо минимизировать

$$\begin{aligned} F = & 7x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} + 10x_{14} + 12x_{15} + \\ & + 9x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 4x_{24} + 6x_{25} + \\ & + 6x_{31} + 8x_{32} + 4x_{33} + 9x_{34} + 7x_{35} \rightarrow \min \end{aligned}$$

Эта задача является задачей открытого типа, так как запасы молока у фермерских хозяйств (поставщиков) больше потребностей в молоке у торговых точек. В этом случае изменяется вид системы ограничений.

Функциональные ограничения:

По поставщикам (их 3)

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 60 - \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 60 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 50 \end{cases}$$

по потребителям (их 5)

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 55, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 20, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 25. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Этапы решения транспортной задачи

- Составляют математическую модель задачи.
- Находят исходное опорное решение.
- Проверяют это решение на оптимальность.
- Переходят от одного опорного решения к другому.

Будем называть переменные , стоящие в занятых клетках распределительной или транспортной таблицы, базисными, а переменные находящиеся в пустых клетках, свободными.

Определение исходного допустимого решения

1. Метод «северо-западного угла»

Метод заключается в том, что заполнение клеток таблицы начинают с левой верхней клетки (северо-западная часть таблицы) для перевозки x_{11} и продолжают вниз и вправо, заканчивая клеткой для перевозки x_{mn} .

При этом способе распределения на тарифы c_{ij} не обращают внимания.

2. Метод «наименьшей стоимости»

Метод заключается в том, что заполнение клеток таблицы начинают с клетки, имеющей наименьшую стоимость перевозки. Если таких клеток несколько, то следует выбрать любую из них.

Найти опорный план транспортной задачи методом наименьшей стоимости

. Исходные данные запишем в виде транспортной таблицы.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7 160	8	1 160	2	160
A_2	4 120	5	9	8 20	140
A_3	9	2 50	3 30	6 90	170
Потребности	120	50	190	110	470

Минимальный тариф, равный 1 ,
находится в клетке x_{13} .

Положим $x_{13} = 160$. Запишем это
значение в соответствующую клетку и
времененно исключим из рассмотрения
строку A_1 .

Потребности пункта назначения B_3
считаем времененно равными 30 ед.

В оставшейся части таблицы с двумя строками A_2 и A_3 и с четырьмя столбцами клетка с наименьшим тарифом находится на пересечении строки A_3 и столбца B_2 , где $c_{32} = 2$. Положим $x_{32} = 50$. Внесем это значение в соответствующую клетку таблицы.

Временно исключим из рассмотрения столбец B_2 и будем считать запасы пункта A_3 равными 120 ед. После этого рассмотрим оставшуюся часть таблицы с двумя строками A_2 и A_3 и тремя столбцами B_1 , B_3 и B_4 . В ней минимальный тариф находится в клетке на пересечении строки A_3 и столбца B_3 и равен 3.

Заполним описанным выше способом эту клетку и аналогично заполним (в определенном порядке) клетки, находящиеся на пересечении строки A_2 и столбца B_4 .

В результате получим опорный план

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{pmatrix}$$

При данном плане перевозок общая стоимость перевозок составляет .

$$F = 1 \cdot 160 + 4 \cdot 120 + 8 \cdot 20 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 30 + 6 \cdot 90 = 1530$$

Условие невырожденности плана

Если число заполненных клеток равно $m + n - 1$, то план является невырожденным. Если число заполненных клеток меньше этого значения, то план (решение) называется вырожденным. В случае вырожденности плана условно считают одну (или несколько) из пустых клеток занятой, записывая в нее нулевую перевозку так, чтобы число занятых клеток стало равным $m + n - 1$.

В нашей задаче число заполненных клеток равно $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$, а пустых клеток – $m \times n - (m + n - 1)$, где m – количество пунктов отправления, n – количество пунктов назначения, что в нашем случае $3 \times 4 - 6 = 6$.
Значит, найденный план является невырожденным.

Метод потенциалов проверки решения на оптимальность

Предположим, что каждый пункт отправления A_i вносит за перевозку единицы груза какую-то сумму α_i , а каждый пункт назначения вносит сумму β_j . Эти платежи передаются некоторому третьему лицу, например, перевозчику. Величины α_i и β_j свяжем равенствами $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ где c_{ij} – тарифы для базисных клеток.

Совокупность уравнений $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$, составленных для всех базисных переменных, представляет совместную систему линейных уравнений, причем одну из переменных можно задавать произвольно и тогда остальные переменные из системы уравнений находятся однозначно.

Обозначим через $\alpha_i + \beta_j = \bar{c}_{ij}$, где \bar{c}_{ij} назовем псевдостоимостями или косвенными стоимостями (тарифами). Псевдостоимости находятся для всех свободных клеток.

Платежи α_i и β_j не обязательно должны быть положительны, поскольку не исключено, что «перевозчик» сам платит тому или иному пункту какую-то премию за перевозку.

Теорема «о платежах».

Для заданной совокупности платежей α_i и β_j суммарная косвенная стоимость перевозок при любом допустимом плане сохраняет одно и тоже значение

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{c}_{ij} x_{ij} = c - const.$$

В этой формуле c зависит только от совокупности платежей и не зависит от того, каким именно допустимым планом пользуемся.

Теорема оптимальности.

Если для всех базисных клеток

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij} = \bar{c}_{ij}$$

а для всех свободных клеток

$$\alpha_i + \beta_j = \bar{c}_{ij} < c_{ij} \quad ,$$

то допустимый план является оптимальным и никаким способом улучшен быть не может.

Пример

Найти опорное решение методом минимальной стоимости и проверить оптимальность решения методом потенциалов.

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	2	3	1	60
A_2	4	2	5	30
Потребности	30	40	20	90

Заполним клетку с минимальной стоимостью 1: Вставим потребность 20. Потребность B_3 удовлетворена. В клетку со следующей минимальной стоимостью 2 поставим число 30, т. к. этим запасы A_2 исчерпаны. Таким образом заполним всю таблицу.

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	2 30	3 10	1 20	60
A_2	4	2 30	5	30
Потребности	30	40	20	90

Находим потенциалы базисных клеток

$$\alpha_1 + \beta_1 = c_{11} = 2,$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = c_{12} = 3,$$

$$\alpha_1 + \beta_3 = c_{13} = 1,$$

$$\alpha_{2_2} + \beta = c_{22} = 2.$$

Положим $\alpha_1 = 0$ и решим систему.

Получим $\beta_1 = 2, \beta_2 = 3, \alpha_2 = -1, \beta_3 = 1$.

Найдем псевдостоимости пустых клеток

$$\overline{c}_{21} = \alpha_2 + \beta_1 = -1 + 2 = 1,$$

$$\overline{c}_{23} = \alpha_2 + \beta_3 = -1 + 1 = 0.$$

$$\overline{c}_{21} = 1 < c_{21} = 4, \quad \overline{c}_{23} = 0 < c_{23} = 5.$$

План перевозок оптимален

$$\overline{X} \min = (30, 10, 20, 0, 30, 0),$$

$$F \min = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 30 = 150.$$

Пример 2.

На складах имеются запасы продукции 90, 400 и 110 тонн соответственно. Потребители должны получить эту продукцию в количествах 140, 300 и 160 тонн соответственно. Найти такой план закрепления поставщиков к потребителям, при котором суммы затрат на перевозки минимальны.

Расходы на перевозки 1 т продукции заданы матрицей (у.е.)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Сумма потребностей и сумма запасов равны $140+300+160=90+400+110=600$.

Модель закрытая.

1). Опорное решение найдем методом минимальной стоимости.

Поставщики	Потребители			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	2 90	5	2	90
A_2	4	1 300	5 100	400
A_3	3 50	6	8 60	110
Потребности	140	300	160	

План

$$X = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \\ 50 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

$$F_{\min} = 2 \cdot 90 + 1 \cdot 300 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 50 + 8 \cdot 60 = 1600 \text{ y.e.}$$

2) Проверим план на оптимальность
методом потенциалов.

В таблице занято клеток

$$m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$$

Для них найдем потенциалы.

$$\alpha_1 + \beta_1 = 2,$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 1,$$

$$\alpha_2 + \beta_3 = 5,$$

$$\alpha_3 + \beta_1 = 3,$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 8.$$

Положим $\alpha_1 = 0$.

Решим систему:

$$\beta_1 = 2, \alpha_3 = 1, \beta_3 = 7, \alpha_2 = -2, \beta_2 = 3.$$

Внесем в таблицу потенциалы занятых клеток

α_i	Поставщики	Потребители			Запасы
		B_1	B_2	B_3	
0	A_1	2 90	5	2	90
-2	A_2	4	1 300	5 100	400
1	A_3	3 50	6	8 60	110
	Потребности	140	300	160	
β_j		2	3	7	

Найдем оценки свободных клеток.

$$\overline{c}_{12} = \alpha_1 + \beta_2 = 3,$$

$$\gamma_{12} = c_{12} - \overline{c}_{12} = 5 - 3 = 2 > 0,$$

$$\overline{c}_{13} = \alpha_1 + \beta_3 = 7,$$

$$\gamma_{13} = c_{13} - \overline{c}_{13} = 2 - 7 = -5 < 0,$$

$$\overline{c}_{21} = \alpha_2 + \beta_1 = -2 + 2 = 0,$$

$$\gamma_{21} = c_{21} - \overline{c}_{21} = 4 - 0 = 4 > 0,$$

$$\overline{c}_{32} = \alpha_3 + \beta_2 = 1 + 3 = 4.$$

$$\gamma_{32} = c_{32} - \overline{c}_{32} = 6 - 4 = 2 > 0.$$

Решение не оптимально, т.к. имеется отрицательная оценка.

3)Переход к другому решению.

Перераспределим грузы, перемещая их из занятых клеток в свободные. Свободная клетка становится занятой, а занятая-свободной.

Для свободной клетки с отрицательной оценкой строится цикл(цепь, многоугольник), все вершины которого, кроме одной находятся в занятых клетках. Углы прямые, число вершин четное

Около свободной клетки цикла ставится (+), а затем поочередно(-) , (+). У вершин со знаком (-) выбирают минимальный груз, его прибавляют к грузам, стоящим у вершин со знаком (+) и отнимают от грузов у вершин со знаком (-). В результате перемещения получают новый опорный план. Это решение проверяют на оптимальность и т. д. до тех пор ,пока не получится оптимальное решение.

Клетка (13) имеет отрицательную оценку. Вершину (13) соединяем с вершинами (11), (31) и (33), т. е. с занятыми клетками. У вершины (13) ставим (+) . У вершин со знаком (-) находим минимальный груз. Это 60. Перемещаем его в пустую клетку. Получаем новый цикл.

-90	+
+50	-60

+30	-60
-110	+

α_i	Поставщики	Потребители			Запасы
		B_1	B_2	B_3	
0	A_1	2	5	2	90
			-	+	
		90			
-2	A_2	4	1	5	400
			300	100	
1	A_3	3	6	8	110
		+		--	
		50		60	
	Потребности	140	300	160	
β_j		2	3	7	

Заполняем таблицу

α_i	Поставщики	Потребители			Запасы
		B_1	B_2	B_3	
0	A_1	2 30	5 300	2 100	90
3	A_2	4	1	5	400
1	A_3	3 110	6	8	110
	Потребности	140	300	160	
β_j		2	-2	2	

Получили новое решение

$$X = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 0 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим его на оптимальность,
вычислив потенциалы базисных клеток.

Потенциалы заполненных клеток

$$\alpha_1 + \beta_1 = 2,$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 1,$$

$$\alpha_3 + \beta_1 = 3,$$

$$\alpha_1 + \beta_3 = 2,$$

$$\alpha_2 + \beta_3 = 5.$$

$$\alpha_1 = 0.$$

$$\beta_1 = 2, \alpha_3 = 1, \beta_3 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_2 = -2.$$

Оценки свободных клеток

$$\begin{array}{ll} \overline{c_{12}} = \alpha_1 + \beta_2 = 0 - 2 = -2, & \gamma_{12} = c_{12} - \overline{c_{12}} = 5 - (-2) = 7 > 0, \\ \overline{c_{21}} = \alpha_2 + \beta_1 = 3 + 2 = 5, & \gamma_{21} = c_{21} - \overline{c_{21}} = 4 - 5 = -1 < 0, \\ \overline{c_{32}} = \alpha_3 + \beta_2 = 1 - 2 = -1, & \gamma_{32} = c_{32} - \overline{c_{32}} = 6 - (-1) = 7 > 0, \\ \overline{c_{33}} = \alpha_3 + \beta_3 = 1 + 2 = 3. & \gamma_{33} = c_{33} - \overline{c_{33}} = 8 - 3 = 5 > 0. \end{array}$$

План не оптимален, т.к. оценка клетки (21) отрицательна.

Построим цикл для клетки (21).

α_i	Поставщики	Потребители			Запасы
		B_1	B_2	B_3	
0	A_1	2	5	2	90
		-		+	
		30		60	
3	A_2	4	1	5	400
		+		-	
			300	100	
1	A_3	3	6	8	110
			110	60	
	Потребности	140	300	160	
β_j		2	-2	2	

Перемещаем груз из клетки (11) 30 в пустую клетку (21) и дальше по циклу
 В вершинах прямоугольника ставим соответственно грузы 70, отняв от 100 груз
 30, затем груз 90, прибавив 30 к числу 60.

α_i	Поставщики	Потребители			Запасы
		B_1	B_2	B_3	
0	A_1	2 0	5	2 90	90
3	A_2	4 30	1 300	5 70	400
2	A_3	3 110	6	8	110
	Потребности	140	300	160	
β_j		1	-2	2	

Новый план

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Снова проверяем его на оптимальность.
Для занятых клеток

$$\alpha_1 + \beta_3 = 2,$$

$$\alpha_2 + \beta_1 = 4,$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 1,$$

$$\alpha_2 + \beta_3 = 5,$$

$$\alpha_3 + \beta_1 = 3.$$

Находим

$$\alpha_1 = 0.$$

$$\beta_3 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_2 = -2, \alpha_3 = 2, \beta_1 = 1.$$

Для свободных клеток псевдостоймости
равны

$$\overline{c_{11}} = \alpha_1 + \beta_1 = 0 + 1 = 1,$$

$$\overline{c_{12}} = \alpha_1 + \beta_2 = 0 - 2 = -2,$$

$$\overline{c_{32}} = \alpha_3 + \beta_2 = 2 - 2 = 0,$$

$$\overline{c_{33}} = \alpha_3 + \beta_3 = 2 + 2 = 4.$$

Оценки свободных клеток

$$\gamma_{11} = c_{11} - \overline{c_{11}} = 2 - 1 = 1 > 0,$$

$$\gamma_{12} = c_{12} - \overline{c_{12}} = 5 - (-2) = 7 > 0,$$

$$\gamma_{32} = c_{32} - \overline{c_{32}} = 6 - 0 = 6 > 0,$$

$$\gamma_{33} = c_{33} - \overline{c_{33}} = 8 - 4 = 4 > 0.$$

Все оценки положительны, поэтому план оптимален.

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

При этом

$$F_{ont} = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280.$$

По сравнению с первоначальным планом расходы уменьшились на величину

$$1610 - 1280 = 330 \text{ у.е.}$$