Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Е.Г. Гусев
Курс «Высшая математика»

Лекция 18.

Тема: Транспортная задача.

Цель: Рассмотреть условия, при которых задачу ЛП решают как транспортную.

Пусть однородный продукт, сосредоточенный в m отправления в количествах $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц, необходимо доставить в каждый из n пунктов назначения в количествах $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц. Стоимость перевозки единицы продукта из i-го (i=) пункта отправления в j-й (j=) пункт назначения равна c_{ij} и известна для всех компаний (i; j). Пусть x_{ij} – количество продукта, перевозимого по маршруту (i; j). Задача - определение таких величин x_{ij} для всех маршрутов (i; j), при которых суммарная стоимость перевозок минимальна.

Запишем условие задачи в виде матрицы планирования:

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	…	Bn	
A1	c11 x11	c12 x12	c13 x13	…	c1n x1n	a1
…	…	…	…	…	…	…
Am	cm1 xm1	cm2 xm2	cm3 xm3	…	cmn xmn	am
Потребности	b1	b2	b3	…	bn	$\sum ai=\sum bj$

Математическая модель задачи: т.к. от *i*-го поставщика к *j*-му потребителю запланировано к перевозке x_{ij} ед.груза, то стоимость перевозки составит $c_{ij}x_{ij}$.

Стоимость всего плана выразится

двойной суммой:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Систему ограничений получаем из следующих условий задачи:

1.) Все грузы должны быть вывезены, т.е. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0;$

2.) Все потребности должны быть удовлетворены, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j$$

Тогда математическая модель транспортной задачи имеет следующее.найти наименьшее значение линейной функции при ограничениях:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_{ij} & i = \overline{1, m} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} & j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0 & \end{cases}$$

Если в модели суммарные запасы = суммарным потребностям $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то такая модель называется закрытой.

Построение первоначального опорного плана.

При решении задач ЛП итерационный процесс по описанию оптимального плана начинают с определения опорного плана.

Система ограничений транспортной задачи содержит mn неизвестных и $m+n$ уравнений.

В общем случае система ограничений должна содержать ***m+n-1*** линейно независимых уравнений, значит невырожденный опорный план транспортной задачи содержит ***m+n-1*** положительных линейных компонент или перевозок, т.е. в матрице $\left\{x_{ij}\right\}$ значений компонент положительными являются только ***m+n-1***, а остальные равны 0.

Клетки в таблице матрицы планирования, в которых находятся отличные от 0 перевозки, называются *занятыми*, остальные *незанятыми*. Занятые клетки соответствуют базисным неизвестным и для невырожденного опорного плана их должно быть $m+n-1$.

Опорность плана заключается в его *ацикличности* (это ситуация, при которой нельзя построить замкнутый многоугольник или цикл, все вершины которого будут лежать в занятых клетках).

Циклом **называется набор клеток, в котором две и только две соседние клетки расположены в одном столбце или в одной строке таблице, причем последняя клетка находится в той же строке или столбце, что и первая.**

Построение циклов начинают с какой-либо занятой клетки и переходят по столбцу (строке) к другой занятой клетке, в которой делают поворот под прямым углом и движутся по строке (столбцу) к следующей занятой клетке и т.д., пытаясь возвратиться к первоначальной клетке.

Клетки, в которых происходит поворот под прямым углом, определяют вершины цикла.

Если план транспортной задачи содержит более *m+n-1* занятых клеток, он не является опорным, т.к. ему соответствует линейно-зависимая система векторов.

В этом случае в таблице всегда можно поставить замкнутый цикл, с помощью которого всегда уменьшают число занятых клеток до *m+n-1*.

Если к занятым клеткам, определяющим опорный невырожденный план, а значит и цикличный, присоединить какую-либо незанятую клетку, то план становится не опорным, появляется единственный цикл, все вершины которого за исключением одной, лежат в занятых клетках.

Вопросы:

1) При каких условиях транспортная задача имеет решение?
2) Что такое цикл?