

## Лекция 19.

Тема: Транспортная задача.

**Цель:** Рассмотреть метод «северо-западного угла». Узнать понятие цикла пересчета и его свойства. Метод потенциалов решения транспортной задачи.

**Метод Северо-  
западного угла. Метод  
минимальной  
стоимости (элемента).**

**ПРИМЕР.** В резерве трех железнодорожных станций *A, B, C* находятся соответственно *60, 80, 100* вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к 4-ем пунктам погрузки хлеба, если пункту *№1* необходимо *40* вагонов, *№2* – *60*, *№3* – *80*, *№4* – *60*. Стоимость перегонов одного вагона со станции *A* в в указанные пункты соответственно равны *1, 2, 3, 4* ден.ед., со станции *B* – *4, 3, 2, 0* ден.ед. и со станции *C* – *0, 2, 2, 1* ден.ед..

Постав- щики	Потребители				Запасы
	1	2	3	4	
А	40	20	—	—	60
В	—	40	40	—	80
С	—	—	40	60	100
Потреб- ности	40	60	80	60	240

$$m = 3; \quad n = 4; \quad m+n-1 = 6 \quad \Rightarrow$$

**План опорный**

$$x(x_{11} = 40; \quad x_{12} = 20; \quad x_{22} = 40; \quad x_{23} = 40; \quad x_{33} = 40; \quad x_{34} = 60)$$

**Общая стоимость составленного плана:**

$$**Z=40 \cdot 1+20 \cdot 2+40 \cdot 3+40 \cdot 2+40 \cdot 2+60 \cdot 1=**$$

$$**40+40+120+80+80+60=420**$$

**Это не оптимальное решение.**

**Если при составлении опорного плана учитывать стоимость перевозки единицы груза, то очевидно, что план будет ближе к оптимальному.**

**Суть метода минимальной стоимости (элемента)**

**заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую, и в клетку, которая ему соответствует, помещают меньшее из чисел  $a_i$  и  $b_j$ .**



**Затем из рассмотренного исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец. Затем из оставшейся части опять выбирают наименьшую стоимость и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.**

**Итак, опорный план трансформированной задачи построен, теперь надо из него получить оптимальный. Можно было получить оптимальный план используя симплекс-метод, но в нашем случае симплексная таблица будет содержать  $mn$  неизвестных, что приведет к громоздким вычислениям.**

**Поэтому для нахождения  
оптимального плана  
транспортной задачи  
используют другие методы,  
самый распространенный из  
которых метод потенциалов.**

# Метод потенциалов.

**Теорема.** Если план  $\overline{X}^* = \{ \overline{x_{ij}} \}$  транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система из  $m+n$  чисел  $u_i$  и  $v_j$  удовлетворяющим условиям:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \overline{x_{ij}} > 0$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \overline{x_{ij}} = 0$$

Числа  $u_i$  и  $v_j$  называют потенциалами поставщиков и потребителей



**Для того чтобы план был оптимальным,  
необходимо выполнение следующих условий:**

**1.) для каждой занятой клетки сумма**

**потенциалов должна быть равно стоимости**

**единицы перевозки, стоящей в этой клетке;**

**2.) для каждой незанятой клетки сумма**

**потенциалов должна быть меньше, либо равна**

**стоимости единицы перевозки, стоящей в этой**

**клетке.**

**Если хотя бы одна незанятая  
клетка удовлетворяет условию  
(2), то опорный план не  
является оптимальным, и его  
улучшают, перемещая в клетку  
некоторое количество единиц  
груза).**

**Проверяем условие оптимальности для незанятых клеток: если  $U_i + V_j > C_{ij}$ , то план не является оптимальным, и для каждой клетки, в которой не выполняется условие оптимальности, находим величину  $(U_i + V_j) - C_{ij} > 0$  и записываем в левый нижний угол.**



**Выбор клетки в которую необходимо послать перевозку: транспортная задача линейного программирования решается на  $\min$  линейной функции, поэтому алгоритм ее решения тот же, что и алгоритм симплекс-метода.**

**Загрузке подлежит в первую очередь**

**клетка, которой соответствует  $[(U_i + V_j) - C_{ij} > 0]$**

**Построение цикла и определение величины перераспределения груза:**  
отмечаем знаком « + » незанятую клетку, которую надо загрузить (знаки (-;+) чередуются). Затем находим  $\min x_{ij}$ , где  $x_{ij}$  – перевозки, стоящие в вершинах цикла, отмеченных знаком « - ».

Величина  $\min x_{ij}$  определяет сколько единиц груза надо перераспределить.

После перераспределения должно получиться  $m+n-1$  занятых клеток.

Если для какой-либо клетки условие оптимальности не выполняется, то можно улучшить решение двойственной задачи, а заодно и исходной задачи, сделав эту клетку занятой и перебросив груз по циклу.

**Для свободных клеток сумма потенциалов меньше, либо равна стоимости, следовательно в последней таблице должно быть получено оптимальное решение исходной транспортной задачи.**

# Открытая модель транспортной задачи.

*Закрытой* называется транспортная задача, для которой выполняется

условие  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ . В

противном случае задача называется *открытой*.

**Для такой задачи может быть два случая:**

**1.) Суммарные запасы превышают**

**суммарные потребности  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$  ;**

**2.) Суммарные потребности превышают**

**суммарные запасы  $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$  .**

**Линейная функция остается без изменения, изменяются только ограничения.**

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$



$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_{ij} \quad i = \overline{1, m} \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} = b_{ij} \quad j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_{ij} \quad i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_{ij} \quad j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

Открытая модель задачи решается  
приведением к закрытой:

а) Вводится фиктивный потребитель  $B_{n+1}$   
потребности которого

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

б) Вводится фиктивный поставщик  $A_{n+1}$   
запасы которого

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

**Стоимость перевозки  
единицы груза в этих  
случаях полагают равными  
нулю, т.к. груз в обоих  
случаях не перевозится.**

## Вопросы:

- 1) Чем различаются открытая и закрытая модели транспортной задачи?
- 2) В чем заключается метод потенциалов решения транспортной задачи?