Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Е.Г. Гусев
Курс «Высшая математика»

Лекция 19.

Тема: Транспортная задача.

Цель: Рассмотреть метод «северо-западного угла». Узнать понятие цикла пересчета и его свойства. Метод потенциалов решения транспортной задачи.

Метод Северо-западного угла. Метод минимальной стоимости (элемента).

ПРИМЕР. **В резерве трех железнодорожных станций *А, В, С* находятся соответственно *60, 80, 100* вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к *4*-ем пунктам погрузки хлеба, если пункту *№1* необходимо *40* вагонов, *№2 – 60*, *№3 – 80*, *№4 – 60*. Стоимость перегонов одного вагона со станции *А* в в указанные пункты соответственно равны *1*, *2*, *3*, *4* ден.ед., со станции *В – 4*, *3*, *2*, *0* ден.ед. и со станции *С – 0*, *2*, *2*, *1* ден.ед..**

Постав-шики	Потребители				Запасы
	1	2	3	4	
A	1 40	2 20	3 —	4 —	60
B	4 —	3 40	2 40	0 —	80
C	0 —	2 —	2 40	1 60	100
Потреб-ности	40	60	80	60	240

***m* = 3;   *n* = 4;   *m*+*n* –1 = 6   =>**

План опорный

$$x\left(x_{11} = 40; \quad x_{12} = 20; \quad x_{22} = 40; \quad x_{23} = 40; \quad x_{33} = 40; \quad x_{34} = 60\right)$$

Общая стоимость составленного плана:

Z=40·1+20·2+40·3+40·2+40·2+60·1=

40+40+120+80+80+60=420

Это не оптимальное решение.

Если при составлении опорного плана учитывать стоимость перевозки единицы груза, то очевидно, что план будет ближе к оптимальному.

Суть ***метода минимальной стоимости (элемента)*** заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую, и в клетку, которая ему соответствует, помещают меньшее из чисел a_i и b_j.

Затем из рассмотренного исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец. Затем из оставшейся части опять выбирают наименьшую стоимость и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Итак, опорный план трансформированной задачи построен, теперь надо из него получит оптимальный. Можно было получить оптимальный план используя симплекс-метод, но в нашем случае симплексная таблица будет содержать mn неизвестных, что приведет к громоздким вычислениям.

Поэтому для нахождения оптимального плана транспортной задачи используют другие методы, самый распространенный из которых метод потенциалов.

Метод потенциалов.

Теорема. Если план $\overline{X}^* = \{\overline{x_{ij}}\}$ транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система из m+n чисел u_i и v_j удовлетворяющим условиям:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \overline{x_{ij}} > 0$$

$$u_i + v_i \leq c_{ij}, \overline{x_{ij}} = 0$$

Числа u_i и y_j называют потенциалами поставщиков и потребителей

Для того чтобы план был оптимальным, необходимо выполнение следующих условий:

1.) для каждой занятой клетки сумма потенциалов должна быть равно стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке;

2.) для каждой незанятой клетки сумма потенциалов должна быть меньше, либо равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке.

Если хотя бы одна незанятая клетка удовлетворяет условию (2), то опорный план не является оптимальным, и его улучшают, перемещая в клетку некоторое количество единиц груза).

Проверяем условие оптимальности для незанятых клеток: **если** $U_i + V_j > C_{ij}$ **, то план не является оптимальным, и для каждой клетки, в которой не выполняется условие оптимальности, находим величину** $\left(U_i + V_J\right) - C_{ij} > 0$ **и записываем в левый нижний угол.**

Выбор клетки в которую необходимо послать перевозку: **транспортная задача линейного программирования решается на min линейной функции, поэтому алгоритм ее решения тот же, что и алгоритм симплекс-метода.**

Загрузке подлежит в первую очередь клетка, которой соответствует $\left[\left(U_i + V_j\right) - C_{ij} > 0\right]$

***Построение цикла и определение величины перераспределения груза*:** **отмечаем знаком « + » незанятую клетку, которую надо загрузить (знаки (-;+) чередуются). Затем находим *min* x_{ij}, где x_{ij} – перевозки, стоящие в вершинах цикла, отмеченных знаком « - ».**

Величина *min* x_{ij} определяет сколько единиц груза надо перераспределить.

После перераспределения должно получиться *m+n-1* занятых клеток.

Если для какой-либо клетки условие оптимальности не выполняется, то можно улучшить решение двойственной задачи, а заодно и исходной задачи, сделав эту клетку занятой и перебросив груз по циклу.

Для свободных клеток сумма потенциалов меньше, либо равна стоимости, следовательно в последней таблице должно быть получено оптимальное решение исходной транспортной задачи.

Открытая модель транспортной задачи.

Закрытой называется транспортная задача, для которой выполняется условие $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. В противном случае задача называется *открытой*.

Для такой задачи может быть два случая:

1.) Суммарные запасы превышают суммарные потребности $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ **;**

2.) Суммарные потребности превышают суммарные запасы $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ **.**

ВГУЭС

Линейная функция остается без изменения, изменяются только ограничения.

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$(a)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_{ij} & i=\overline{1,m} \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_{ij} & j=\overline{1,n} \\ x_{ij} \ge 0 & \end{cases}$$

$$(б)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_{ij} & i=\overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_{ij} & j=\overline{1,n} \\ x_{ij} \ge 0 & \end{cases}$$

Открытая модель задачи решается приведением к закрытой:

а)Вводится фиктивный потребитель B_{n+1} **потребности которого**

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

б)Вводится фиктивный поставщик A_{n+1} **запасы которого**

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

ВГУЭС

Стоимость перевозки единицы груза в этих случаях полагают равными нулю, т.к. груз в обоих случаях не перевозится.

Вопросы:

1) Чем различаются открытая и закрытая модели транспортной задачи?
2) В чем заключается метод потенциалов решения транспортной задачи?