Лекция 5. **Транспортные задачи и задачи о назначениях**

Содержание лекции:

1. Формулировка транспортной задачи
2. Метод потенциалов
3. Особенности решения открытой транспортной задачи
4. Задача о назначениях

Литература

- Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / Под ред. *В.В. Федосеева*. — 2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. — раздел 3.2.
- *Фомин Г.П.* Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учебник. – 2-е изд. М.: Финансы и статистика, 2005. — раздел 2.2.6.
- *Вентцель Е.С.* Исследование операций: Задачи, принципы, методология. М.: Высшая школа, 2001.

5.1. Формулировка транспортной задачи

- Дано:
  - Множество I, включающее m пунктов отправления груза, имеющегося в количествах a_i (i=1…m)
  - Множество J, включающее n пунктов потребления, в каждом из которых имеется спрос на данный груз в количестве b_j (j=1…n)
  - Затраты c_{ij} на перевозку единицы груза между пунктами i и j
- Найти:
  - План перевозок $\mathbf{X} = (x_{ij})$, согласно которому груз из пунктов отправления перевозится в пункты потребления *с минимальными издержками*, а спрос удовлетворяется полностью

Обычно предполагается, что общий размер запасов груза равен спросу (*закрытая* транспортная задача).

При этом условии задача всегда имеет оптимальное решение.

5.1. Математическая запись

Целевая функция:

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Условия удовлетворения спроса:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1 \ldots n$$

Условия полного вывоза груза:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1 \ldots m$$

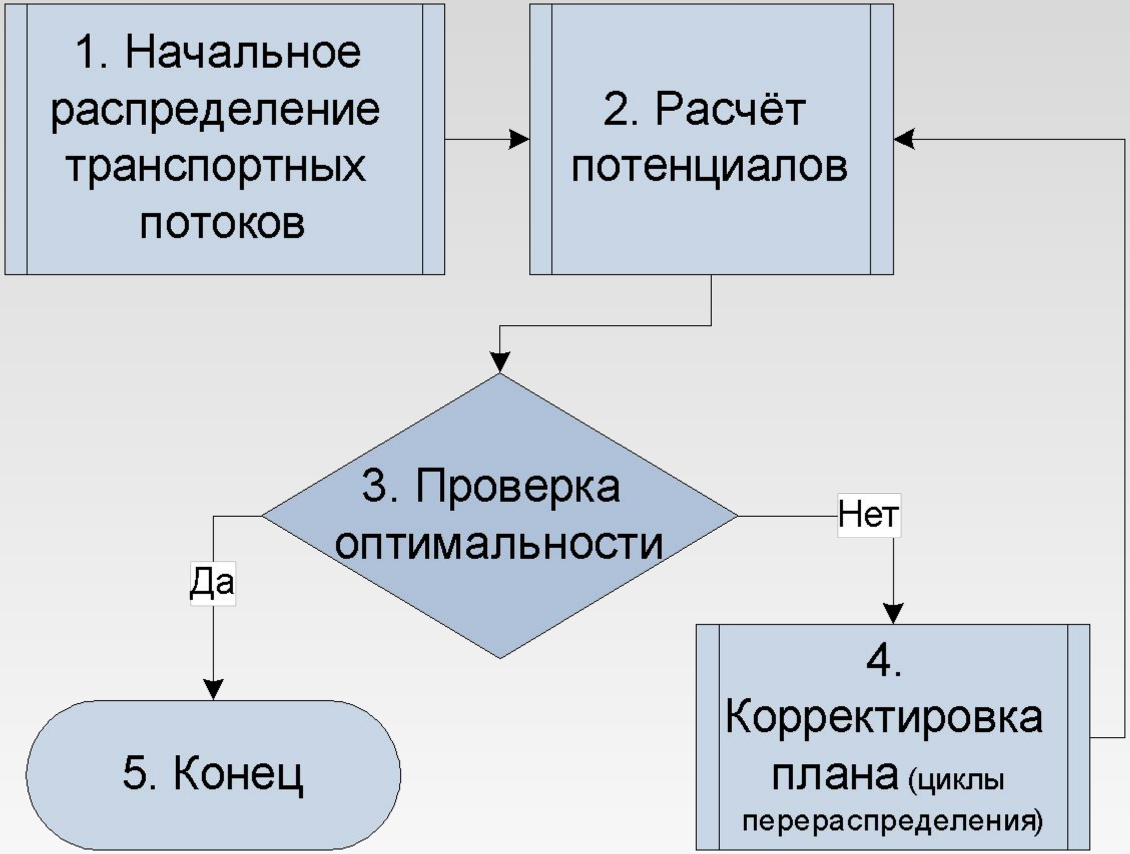
Условия неотрицательности:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1 \ldots m, \; j = 1 \ldots n$$

5.1

- Получившаяся задача имеет форму задачи линейного программирования
- Её можно решить симплексным методом
- Однако есть более эффективные способы её решения

5.2. Метод потенциалов



5.2.1. Начальное распределение транспортных потоков

- Теоретическая основа
  - Ранг матрицы ограничений транспортной задачи равен $n+m-1$
  - ⇒ В оптимальном плане все переменные, кроме $n+m-1$, будут свободными
    - Следовательно, равными нулю
- Метод северо-западного угла
  - Не использует данных о затратах
  - Обычно приводит к распределению, требующему много корректировок
    - Зато самый простой ☺

5.2.1

Ещё не вывезенный остаток

Ещё не удовлетворённый спрос

1. i=1, j=1
2. $x_{ij} = \min(a'_i, b'_j)$
3. Если $x_{ij} = a'_i$, то i □ i+1; иначе j □ j+1
4. Если $i>m$, то процесс завершён; иначе переход к 2.

i = 3 j = 3

	Потребители			
	За-пас	~~1~~	~~2~~	3
Потребности		60	40	20
~~Поставщик 1~~	30	30		
~~Поставщик 2~~	40	30 √	10 √	
Поставщик 3	50		30 √	20 √

Начальное распределение получено!

5.2.2. Расчёт потенциалов

- Теоретическая основа
  - Потенциалы приписываются поставщикам (u_i) и потребителям (v_j).
  - Уравнение потенциалов

$$c_{ij} = v_j - u_i$$

⇒ Расчёт потенциалов:

- подобрать такие v_j и u_i, чтобы уравнение потенциалов выполнялось для всех ***базисных*** клеток (перевозок)

5.2.2

1. $i = 1$; $u_i = 0$
2. В строке i находим множество столбцов J' с ненулевыми перевозками и нерассчитанными потенциалами
3. Для всех $j \in J'$ выполняем v_j □ $u_i + c_{ij}$
    4. В столбце j находим множество строк I' с ненулевыми перевозками и нерассчитанными потенциалами.
    5. Для всех $i \in I'$ выполняем u_i □ $v_j - c_{ij}$
        6. Выполняем (2)

- Процесс закончен, когда I' или J' оказывается пустым

	Потребители				
	За-пас	1	2	3	u_i
Потребности		60	40	20	
Поставщик 1	30	30 √ 6	9	7	0
Поставщик 2	40	30 √ 8	10 √ 8	5	-2
Поставщик 3	50	4	30 √ 6	20 √ 12	0
v_j		6	6	12	

Расчёт потенциалов завершён!

5.2.3. Проверка оптимальности

- Теоретическая основа
  - По используемым перевозкам c_{ij} разница в «ценах» (потенциалах) у потребителя *j* и у поставщика *i* равна стоимости перевозки
    - это следует из способа расчёта потенциалов
  - Неиспользуемая перевозка c_{ij} выгодна, если разница в «ценах» (потенциалах) у потребителя *j* и у поставщика *i* больше стоимости перевозки

⇒ Условие оптимальности
  - Разница в потенциалах потребителя и поставщика *по всем неиспользуемым перевозкам* не больше стоимости перевозки

5.2.3

- Условие оптимальности
  - Разница в потенциалах потребителя и поставщика *по всем неиспользуемым перевозкам* не больше стоимости перевозки
- В нашем примере выполняется не по всем неисп. перевозкам
  - Выполняется только для 1 □ 2.
  - Значит, требуется переход к п.4. – корректировка плана

	Потребители				
	За-пас	1	2	3	u_i
Потребности		60	40	20	
Поставщик 1	30	**30** 6	-3 9	5 7	0
Поставщик 2	40	**30** 8	**10** 8	9 5	-2
Поставщик 3	50	2 4	**30** 6	**20** 12	0
v_j		6	6	12	

5.2.4. Корректировка плана

1. Выбираем клетку
   - с превышением разности потенциалов потребителя и поставщика над стоимостью транспортировки
   - как правило, с наибольшим
2. Строим ***контур*** (см. схему), начиная с данной клетки
3. Помечаем вершины контура знаками + и –
   - начинаем со знака + в выбранной свободной клетке
4. Находим наименьшую из величин в клетках со знаком –
5. Вычитаем её из всех клеток «–» и прибавляем ко всем клеткам «+»
6. Одну из клеток, в которых оказался нуль, объявляем свободной.

- Переходим к проверке критерия оптимальности

5.2.4

100	500	600	500	300	400	200	250	350	400
200			200					+	
300			300			0			
400	200					200			
500	300		+	200					
600		100		100					400
700		500					200		
800					400		50	350	

Тупик

ОСОБЕННОСТИ

5.2.4

1. Контур можно построить всегда, но не всегда удаётся угадать правильный путь
   - В больших задачах отыскание циклов вручную может оказаться проблематичным
     - Для компьютерных программ это не составляет проблемы
2. Контур может оказаться вырожденным
   - Так случается, если наименьшим значением в клетке со знаком – оказывается нуль
     - Пересчёт по такому циклу не улучшает план, вследствие чего метод может зациклиться
   - в этом случае выбирают другую свободную клетку в качестве начальной
3. Если после пересчёта получились нули в нескольких клетках, в качестве свободной можно выбрать любую из них
   - Остальные считаются базисными с нулевым объёмом перевозки

5.3. Особенности решения открытой транспортной задачи

- Транспортная задача называется *открытой*, если не выполняется условие равенства запасов спросу
- Если спрос больше запасов, вводят *фиктивного поставщика*, располагающего недостающим количеством груза
  - Стоимость «перевозки груза» от фиктивного поставщика принимается равным потерям, возникающих из-за неудовлетворённого спроса
  - «Перевозки» от фиктивного поставщика интерпретируются как величины неудовлетворённого спроса соответствующих потребителей
- Если имеется избыточный запас у поставщиков, вводят *фиктивного потребителя*, потребляющего избыток
  - Стоимость перевозки груза фиктивному потребителю принимается равной потерям при хранении либо нулю
  - «Перевозки» фиктивному потребителю

5.4. Задача о назначениях

Дано:

- n работников
- n работ
- добавленная стоимость, создаваемая работником i на работе j

Найти:

- оптимальное назначение работников на работы, максимизирующее добавленную стоимость

5.4

- Переформулируется в транспортную задачу по следующему правилу:
  - имеется *n* поставщиков, располагающих единичными ресурсами
    - ⇒ *работники*
  - имеется *n* потребителей с единичным спросом
    - ⇒ *работы*
  - стоимость перевозок равна добавленной стоимости, взятой со знаком «минус»
    - это делается для того, чтобы добавленная стоимость *максимизировалась*
- Решается методом потенциалов, как обычно
- «Перевозки единичного объёма груза» интерпретируются как назначение работника *i* на работу *j*
  - Все базисные переменные в этом случае могут принимать только единичные значения