

# Треугольники



Дале  
е

Автор преподаватель математики  
Мурысина Т. М.

# Интерактивное табло

Домашнее задание

Теория

Практика

Проект

Проблема

Лабораторно-практическая работа

Итоги

## Первый признак равенства треугольников

Теорема

Структура теоремы

Доказательство

Свойство и признак

Задачи

**СЮРПРИЗ**

**3**

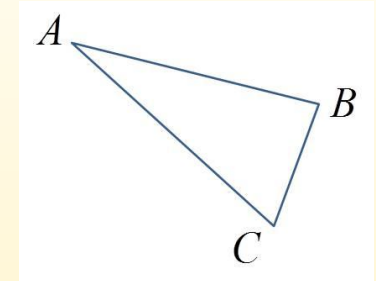
Итоги  
урока

## Контроль учителя

1) «Простой вопрос»: из каких простых геометрических фигур состоит треугольник?



рисунок



2) «Слепой вопрос» (ученик стоит спиной к доске). На рисунке изображены 3 точки, соединенные отрезками. Верно ли, что на доске изображен треугольник?



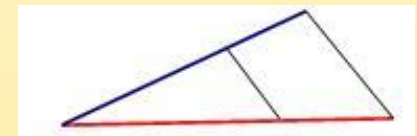
рисунок



3) «Найди ошибку»: в треугольниках против равных углов лежат равные стороны.



рисунок

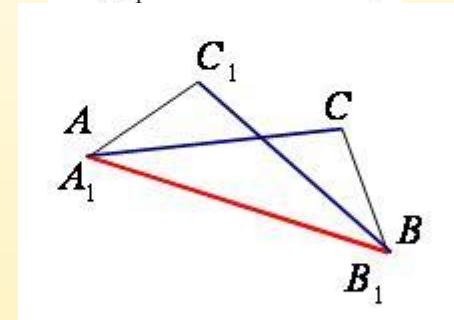
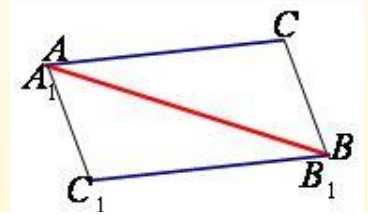


табло

Дале  
е

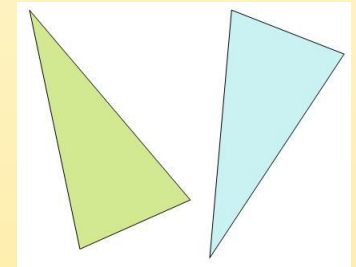
## Контроль учителя

4) «Сложный вопрос» при наложении двух равных треугольников совместились две пары вершин и стороны заключенные между ними, верно ли, что обязательно совместятся все остальные элементы треугольников?



рисунок

5) «Сделай вывод». Какой вывод можно сделать из предложения – два треугольника равны?



рисунок

Назад

Д

табло

**Задание. Взаимопроверка по образцу.** Проверяем задания № 52 из рабочей тетради по эталону на доске. Стоимость правильного решения – 1 балл.

**52**

При наложении треугольника  $ABC$  на треугольник  $MKN$  сторона  $AB$  совместилась со стороной  $MK$ , сторона  $AC$  — со стороной  $MN$ .

Совместилась ли сторона  $BC$  со стороной  $KN$ ? Объясните ответ.

Решение. Так как стороны  $AB$  и  $AC$  совместились со сторонами  $MK$  и  $MN$ , то точки  $B$  и  $C$  совместились соответственно с точками  $K$  и  $N$ . Следовательно, концы отрезков  $BC$  и  $KN$  совместились, а значит, отрезки  $BC$  и  $KN$  равны.

Ответ. Да

**Задание. Взаимопроверка по образцу.** Проверяем задания № 53 из рабочей тетради по эталону на доске. Стоимость правильного решения – 1 балл.

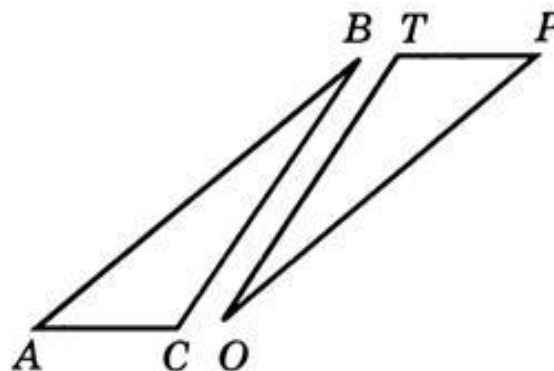
**53**

На рисунке изображены равные треугольники  $ABC$  и  $POT$ .

а) Укажите соответственно равные элементы этих треугольников.

б) Измерьте стороны и углы треугольника  $ABC$  и запишите результат измерений.

в) Не измеряя, найдите длины сторон и градусные меры углов треугольника  $POT$ .



Ответ на задание а)  $AC = PT, CB = TO, BA = OP; \angle A = \angle P, \angle C = \angle T, \angle B = \angle O$ .

Ответ на задание б)  $AB = 35 \text{ мм. } AC = 13 \text{ мм. } BC = 26 \text{ мм. } \angle A = 37^\circ, \angle B = 18^\circ, \angle C = 125^\circ$

Ответ на задание в)  $TP = 13 \text{ мм. } TO = 26 \text{ мм. } PO = 35 \text{ мм. } \angle P = 37^\circ, \angle O = 18^\circ, \angle T = 125^\circ$

проект

# Треугольники вокруг нас.

Музыка

География

Одежда

История

Строительство

Астрономия

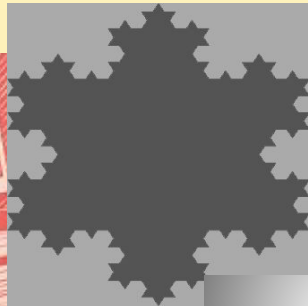
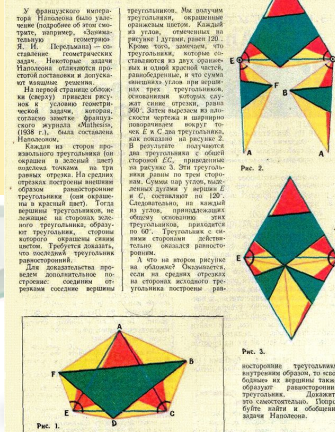
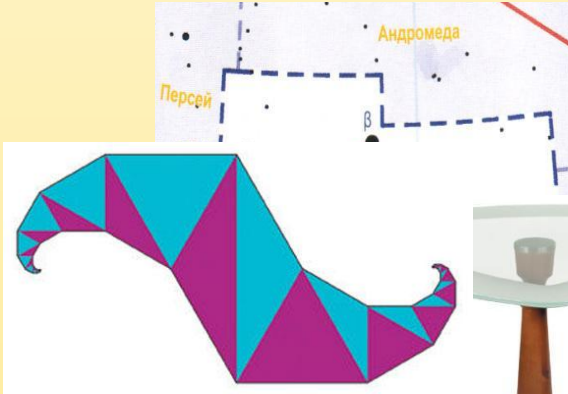
Физика

Искусство

Развлечения

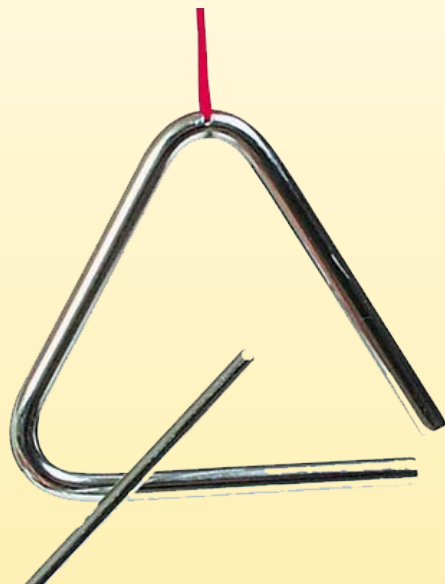
## Нереальные объекты

## Снежинка Коха



табло

Музыка



*Треугольник, самозвучащий ударный музыкальный инструмент* — стальной прут, согнутый в виде треугольника, по которому ударяют палочкой.  
Применяется в оркестрах и инструментальных ансамблях.



проект

Треугольники вокруг нас.

## География



*Бермудский треугольник* — район в Атлантическом океане, в котором происходят якобы таинственные исчезновения морских и воздушных судов. Район ограничен линиями от Флориды к Бермудским островам, далее к Пуэрто-Рико и назад к Флориде через Багамы.

Прое  
КТ

табло

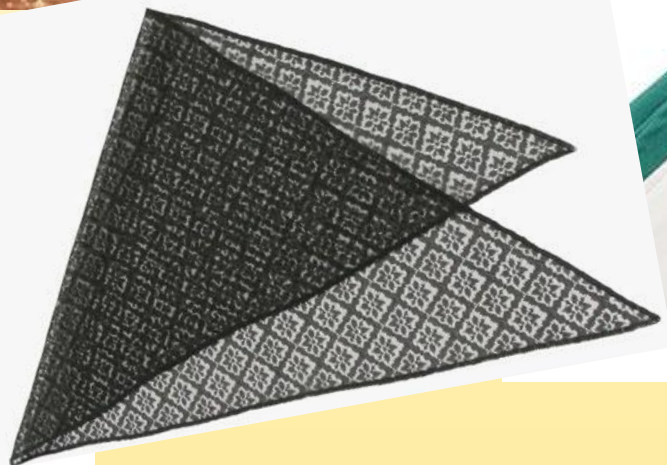
проект

# Треугольники вокруг нас.



## Одежда

*Треугольники в одежде:  
различные головные уборы  
– треуголки, колпаки,  
косынки.*



Прое  
КТ

табло

проект

# Треугольники вокруг нас.

История

*Солдатский треугольник* – письмо без марки и конверта, отправленное солдатом с фронта или солдату на фронт, складывался из страницы школьной тетрадки. Первым делом подписывался адрес, а обратная сторона служила для пометок почтовыми работниками, или для записи, что герой погиб и письмо возвращалось адресату.



Прое  
КТ

табло

Дале  
е

# Треугольники вокруг нас.

проект

## История



### ЗАДАЧА НАПОЛЕОНА

У французского императора Наполеона было увлечение (подробнее об этом см. в статье, например, «Энциклопедия математической геометрии» Я. И. Перельмана) — составление геометрических задач. Некоторые задачи Наполеона отличаются простой постановкой и допускают изящные решения.

На первой странице обложки (сверху) приведен рисунок к условно геометрической задаче, которая, согласно заметке французского журнала «Математика» (1938 г.), была составлена Наполеоном.

Каждая из сторон произвольного треугольника (он окрашен в зеленый цвет) посечена точкой, но три равных отрезка. На средних отрезках построены внешним образом равнобедренные треугольники (они окрашены в красный цвет). Тогда вершины этих треугольников, лежащие на сторонах зеленого треугольника, образуют треугольник, стороны которого окрашены синим цветом. Требуется доказать, что последний треугольник равнобедренный.

Для доказательства проведем дополнительное построение: соединим отрезками соседние вершины

треугольников. Мы получим треугольники, окрашенные одинаковым цветом. Каждый из углов, отмеченных на рисунке 1 дугами, равен  $120^\circ$ . Кроме того, заметим, что треугольники, которые составляются из двух окрашенных и одной красной частей, равнобедренные, и что сумма внешних углов при вершинах трех треугольников, основаниями которых служат синие отрезки, равна  $360^\circ$ . Делая вырезку из плоскости чертежа и ширинно поворачивая вокруг точек  $E$  и  $C$  два треугольника, как показано на рисунке 2. В результате получаются два треугольника с общей стороной  $EC$ , приведенные на рисунке 3. Эти треугольники равны по трем сторонам. Сумма двух углов, отмеченных дугами у вершин  $E$  и  $C$ , составляет  $120^\circ$ . Следовательно, на каждой из углов, принадлежащих общей стороне этих треугольников, приходится по  $60^\circ$ . Треугольник с одинаковыми сторонами и углами действительно оказался равнобедренным.

А что во втором рисунке на обложке? Окажется, если на средних отрезках на сторонах исходного треугольника построены рав-

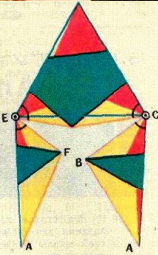


Рис. 2.

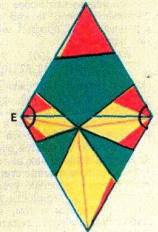


Рис. 3.

носторонние треугольники внутренним образом, то свободные их вершины также образуют равнобедренный треугольник. Докажите это самостоятельно. Попробуйте найти и обобщение задачи Наполеона.

В. Н. Березин

Задача Наполеона звучит так:  
«Если на каждой стороне произвольного треугольника построить по равнобедренному треугольнику, то треугольник с вершинами в центрах равнобедренных треугольников — тоже равнобедренный».

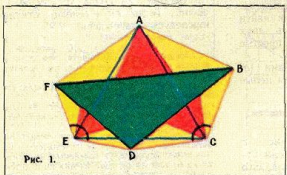


Рис. 1.

Прое  
КТ

табло

проект

# Треугольники вокруг нас.

## Строительство



*Треугольники* встречаются *в конструкции железнодорожных мостов*. Треугольники делают надежными *конструкции высоковольтных линий электропередач*. Для составления *красивых паркетов* чаще всего использовали треугольники.



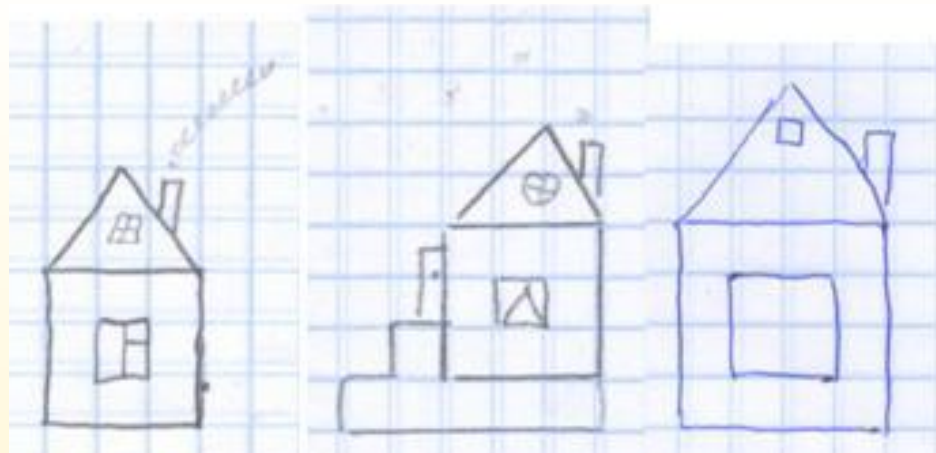
Три металлические или деревянные планки закрепленные в их концах так, чтобы получился контур треугольника изменить нельзя. Это объясняется *свойством жесткости*, если заданы стороны треугольника, то форма его уже не изменится. Это свойство широко применяется на практике, в частности в строительстве.



табло

Дале  
е

**СЮРПРИЗ**



**табло**

Дале  
е

# Пробле ма

# Строительство

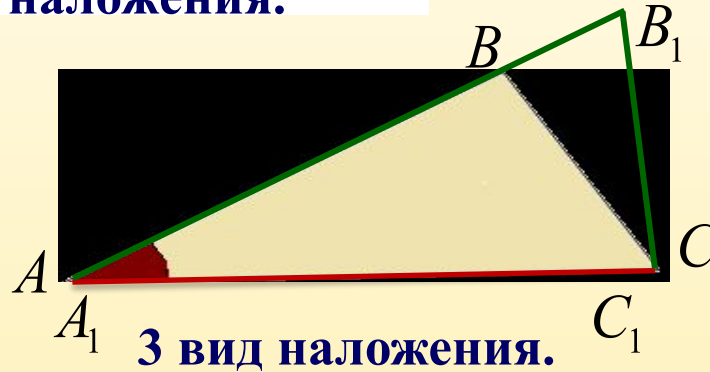
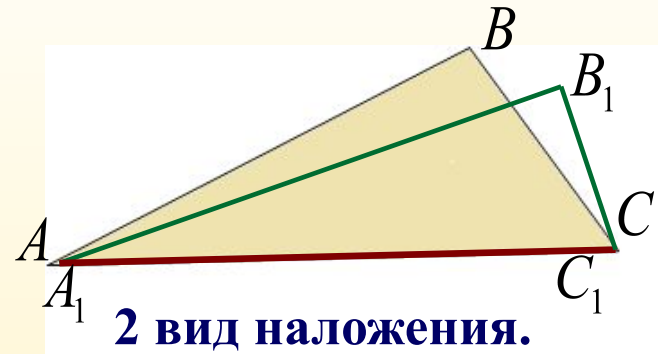
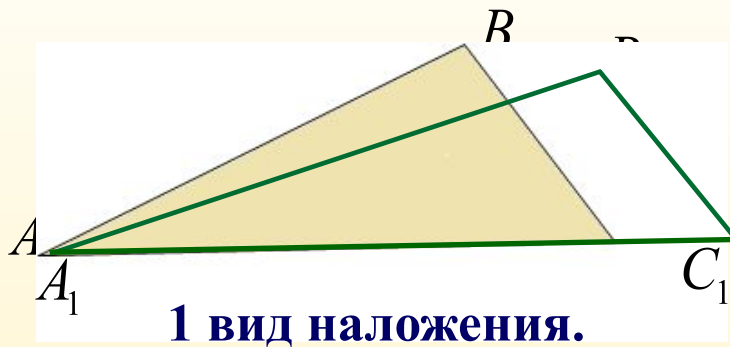
В строительстве не всегда можно наложить одну треугольную конструкцию на другую из-за их массивности.



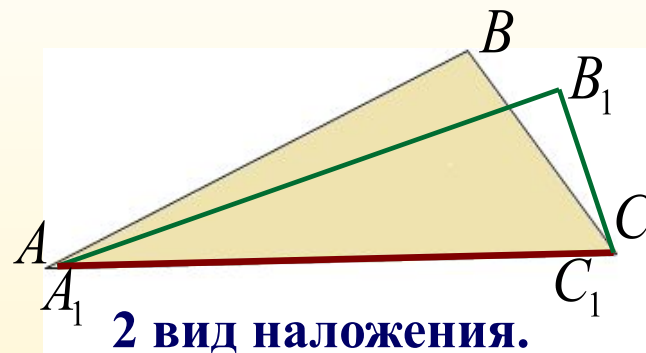
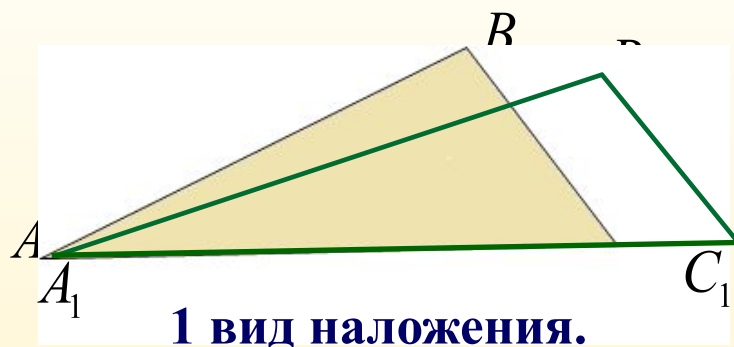
**Проблема на математическом языке:**  
не всегда можно установить равенство треугольников путем наложения.

**Гипотеза:**  
существуют другие способы установления равенства треугольников.





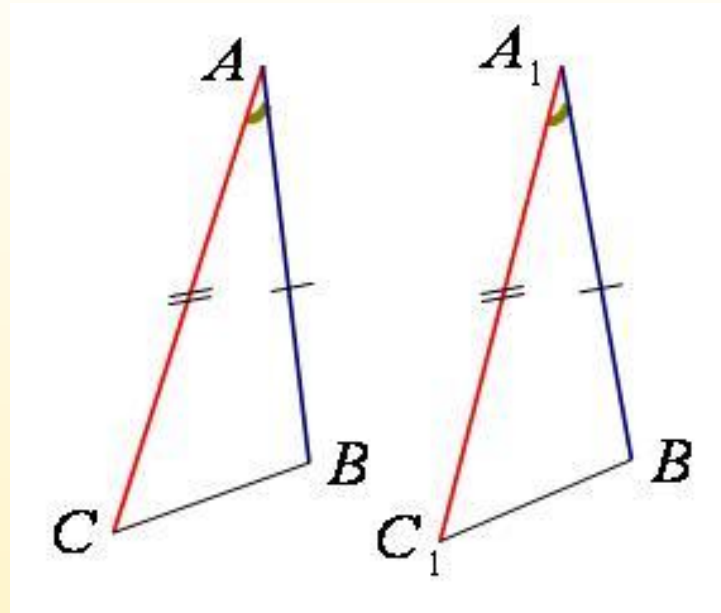




**ВЫВОД:** Практическим путем мы подтвердили нашу гипотезу, что существует возможность установления равенства двух треугольников, не производя фактического наложения одного из них на другой, а сравнивая только некоторые элементы треугольников – две стороны и угол между ними одного треугольника и соответственные им две стороны и угол между ними другого треугольника.

# Первый признак равенства треугольников.

Теоре  
ма



Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, **то такие треугольники равны.**

табло

Дале  
е

# Первый признак равенства треугольников.

Теоре  
ма

Структура

Если ученик не сделал домашнее задание, то учитель его не похвалит.

**УСЛОВИЕ:** ученик не сделал домашнее задание.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ:** учитель его не похвалит.

ЕСЛИ  $\frac{\text{"УСЛОВИЕ"}}{\text{ДАНО}}$ , ТО  $\frac{\text{"ЗАКЛЮЧЕНИЕ"}}{\text{ДОКАЗАТЬ}}$ .

Задание (1 балл).

По заданной схеме переформулируйте предложения:

- 1) Вертикальные углы равны.
- 2) Две прямые перпендикулярные к третьей, не пересекаются.

табло

Дале  
е

# Первый признак равенства треугольников.

Теоре  
ма

Структура

ЕСЛИ  $\frac{\text{"УСЛОВИЕ"}}{\text{ДАНО}}$ , ТО  $\frac{\text{"ЗАКЛЮЧЕНИЕ"}}{\text{ДОКАЗАТЬ}}$ .

Биссектрисы смежных углов образуют угол, равный  $90^\circ$ .

Треугольники, у которых соответственно равны две стороны и угол между ними - равны.



**Неожиданное задание:**

*Выделите в утверждениях подлежащее и сказуемое.*

табло

Дале  
е

# Первый признак равенства треугольников.

Теоре  
ма

Структура

ЕСЛИ  $\frac{\text{"УСЛОВИЕ"}}{\text{ДАНО}}$ , ТО  $\frac{\text{"ЗАКЛЮЧЕНИЕ"}}{\text{ДОКАЗАТЬ}}$ .

Биссектрисы смежных углов образуют угол, равный  $90^\square$ .

Треугольники, у которых соответственно равны две  
стороны и угол между ними - равны.



Сделайте вывод (2 балла).

табло

Выв  
од

# Первый признак равенства треугольников.

Теоре  
ма

Структура

ЕСЛИ  $\frac{\text{"УСЛОВИЕ"}}{\text{ДАНО}}$ , ТО  $\frac{\text{"ЗАКЛЮЧЕНИЕ"}}{\text{ДОКАЗАТЬ}}$ .

Биссектрисы смежных углов образуют угол, равный  $90^\square$ .

Треугольники, у которых соответственно равны две стороны и угол между ними - равны.



**Вывод:** подлежащее и его группа — условие, сказуемое и его группа — заключение.

табло

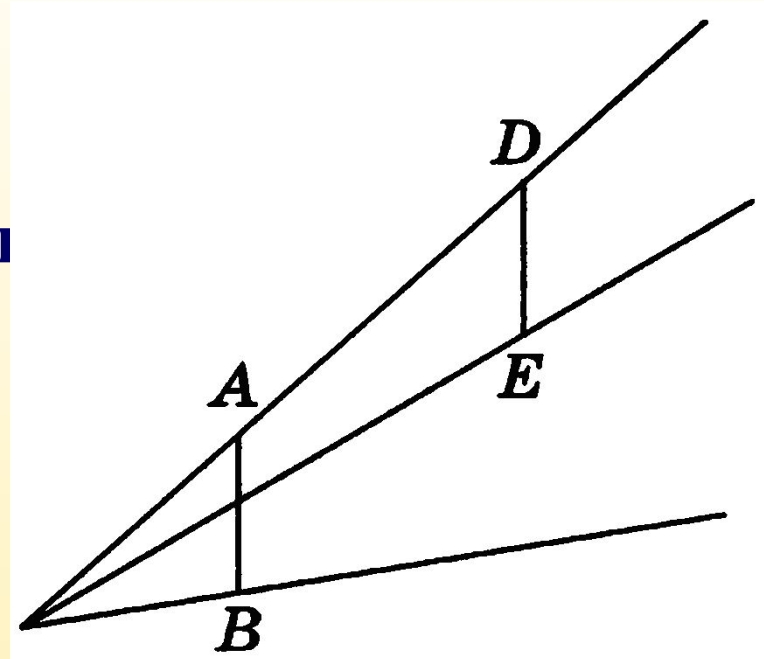
Дале  
е

# Первый признак равенства треугольников.

Теоре  
ма

Вопрос: нужно ли доказывать теорему?

Задание: по рисунку сравни  
отрезки  $AB$  и  $DE$ .



табло

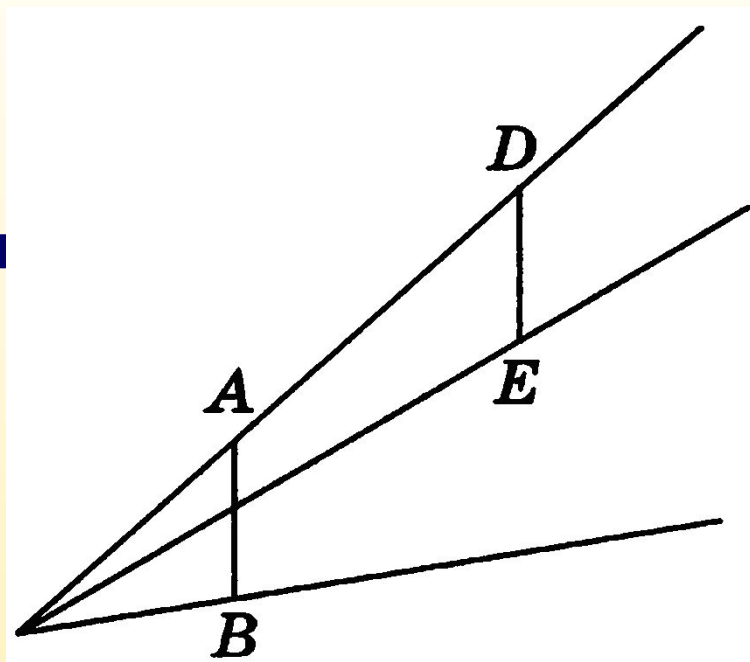
Решение

# Первый признак равенства треугольников.

Теоре  
ма

Вопрос: нужно ли доказывать теорему?

Задание: по рисунку сравни  
отрезки  $AB$  и  $DE$ .



**РЕШЕНИЕ.**

На рисунке длина отрезка  $AB$  кажется больше  
длины отрезка  $DE$ , а на самом деле  $AB = DE$ .

Зрительная иллюзия.



табло

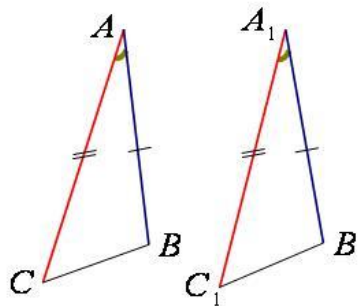
Дале  
е



# Первый признак равенства треугольников.

## Теорема

## Доказательство



**Дано:**  $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1, \angle A = \angle A_1, AB = A_1B_1, AC = A_1C_1$

**Доказать:**  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  **Доказательство.**

**Действие.** Наложим  $\triangle ABC$  на  $\triangle A_1B_1C_1$  так, чтобы совместились вершины равных углов  $\angle A$  и  $\angle A_1$ .

Шаги доказательства (результат действия).	Обоснование шагов доказательства (почему?)
1) Стороны $AB$ и $AC$ наложились соответственно на лучи $A_1B_1$ и $A_1C_1$ .	$\angle A = \angle A_1$
2) Стороны $AB$ и $AC$ соответственно совместились со сторонами $A_1B_1$ и $A_1C_1$ .	$AB = A_1B_1,$ $AC = A_1C_1$
3) В частности, совместятся точки $B$ и $B_1$ , $C$ и $C_1$ .	$AB = A_1B_1,$ $AC = A_1C_1$
4) $\triangle ABC$ полностью совместился с $\triangle A_1B_1C_1$	Совместились соответственно равные элементы.
5) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ . Что и требовалось доказать.	По определению равных фигур.

табло

Дале  
е

# Первый признак равенства треугольников.

Теоре  
ма

Свойство и признак

**Свойства** хорошей погоды:

Если *погода хорошая*, то *поют птицы*.

Если *погода хорошая*, то *светит солнце*.

условие

заключение

**Признаки** хорошей погоды:

Если *поют птицы*, то *погода хорошая*.

Если *светит солнце*, то *погода хорошая*.

условие

заключение

**Сделайте вывод (1 балл).**

табло

# Первый признак равенства треугольников.

## Задачи

**Задание 1.** На рисунке изображены наиболее типичные случаи применения первого признака равенства треугольников. Обоснуйте их равенство.

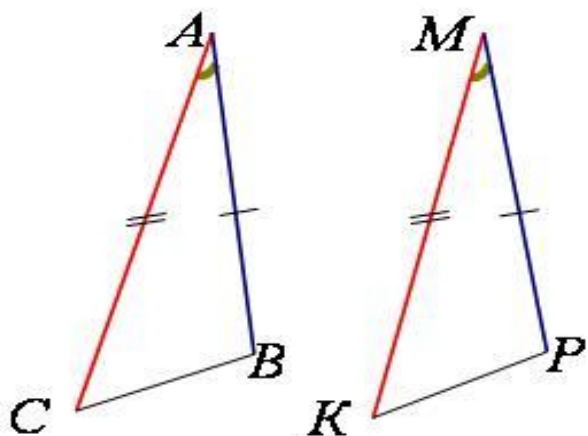


Рисунок 1

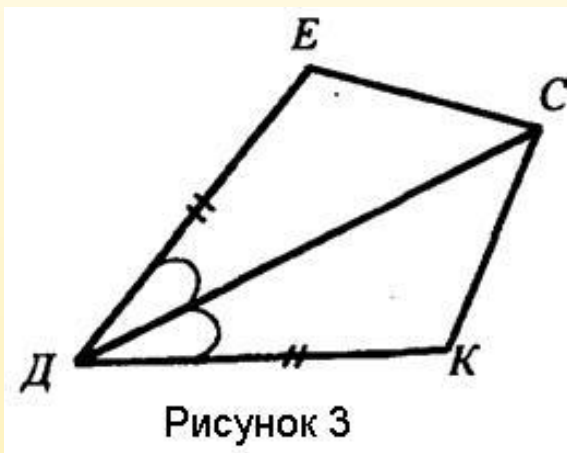


Рисунок 3

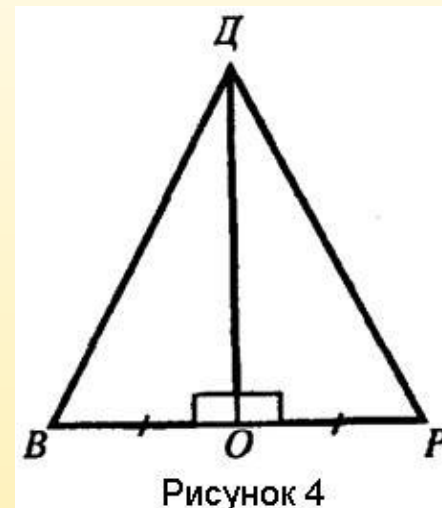


Рисунок 4

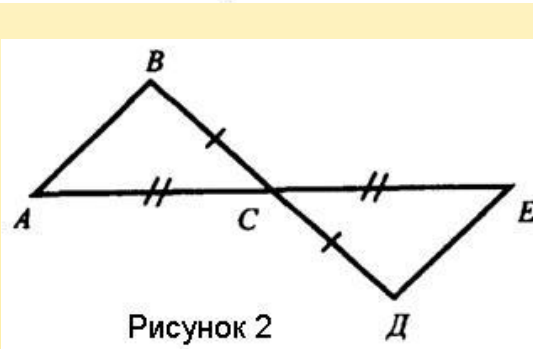


Рисунок 2

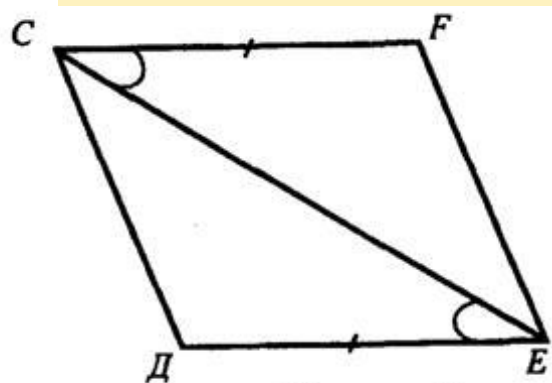


Рисунок 5

табло

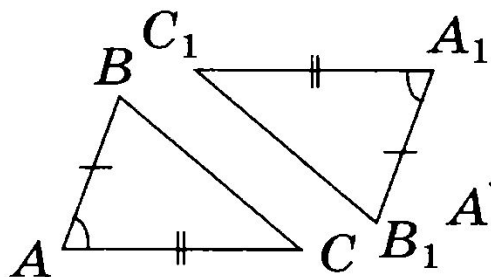
Дале  
е

# Первый признак равенства треугольников.

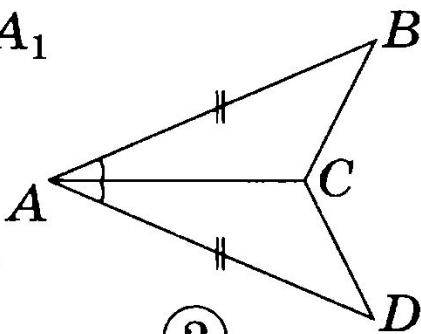
## Задачи

**Задание 2 (1 балл) Обсуждение в группах.**

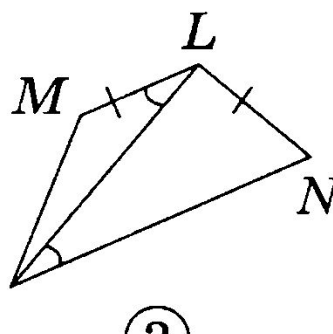
На доске изображены пары треугольников, используя обозначения равных элементов и известные свойства фигур, найдите на рисунках треугольники, равные по первому признаку равенства треугольников.



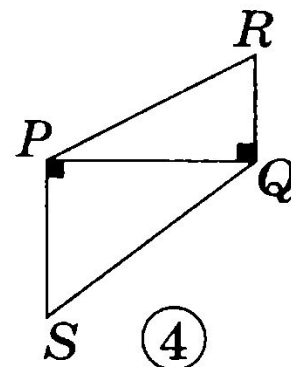
①



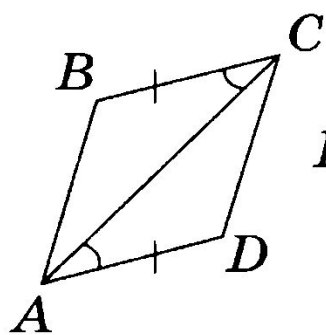
②



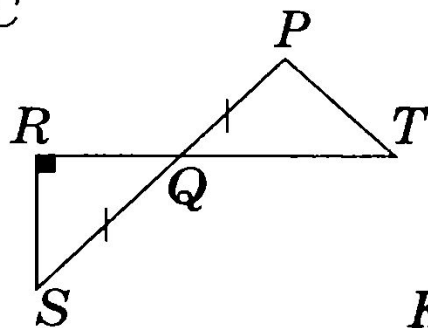
③



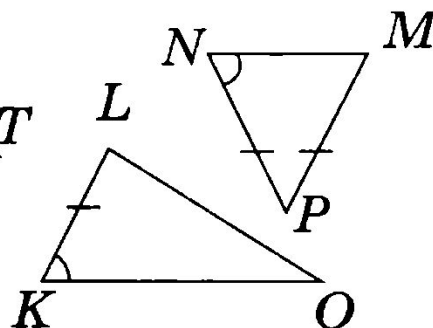
④



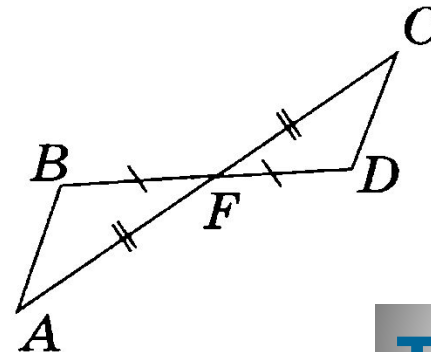
⑤



⑥



⑦



⑧

**Астрономия** – это наука о Вселенной, изучающая расположение, движение, строение, происхождение и развитие небесных тел. В частности она изучает Солнце и другие звезды, планеты Солнечной системы и их спутники, внесолнечные планеты, астероиды, кометы, метеориты и многое др. В современной астрономии участки на которые разделена небесная сфера называют созвездиями, еще с древних времен им давали характерные названия.



**Созвездие треугольник** — созвездие северного полушария неба, содержит 25 звезд видимых невооруженным глазом. С территории России лучше всего видно в конце лета, осенью и зимой.

**Задача:** построить столик с одной ножкой с крышкой в форме треугольника. Вот такой интересный дизайнерский ход. Заказчик наверно – математик. Чтобы крышка стола была устойчивой, находится точка, которая в геометрии и в физике называется *центром масс*.

Возьмем треугольник. Находим середину одной стороны, соединяем ее с противоположной вершиной, получаем отрезок, который вы скоро назовете *медианой* треугольника. Строим *точку пересечения медиан*. Эта точка и является *центром масс* данного треугольника.



проект

Искусство

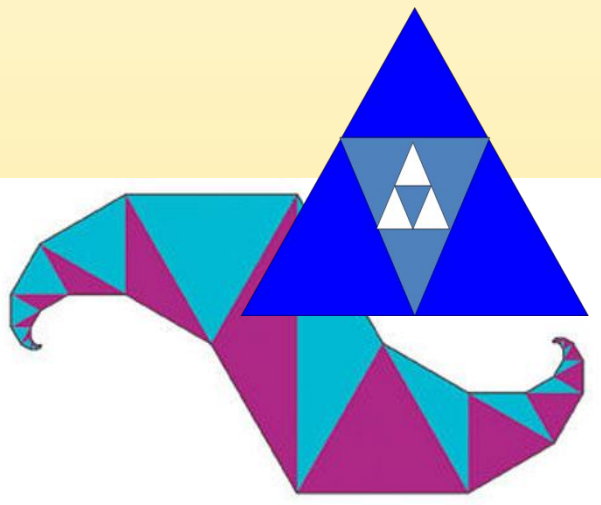
## Треугольники вокруг нас.

*Даниэль Эрдели*, венгерский художник и дизайнер, придумал **спидроны** в 1970-х годах. Началось всё с того, что он нарисовал фигуру в виде двух "завитков", собранных из треугольников.

**Спидрон** состоит из **равнобедренных и равносторонних треугольников**, расположенных определённым образом.

Он обнаружил интересное свойство, что в равносторонний треугольник можно вписать другой равносторонний треугольник, вершины которого лежат на серединах первого. Если вырезать фигуры из бумаги и сгибать их по граням, то они могут складываться наподобие мехов аккордеона.

В одном из голландских парков выставлена скульптура **спидрона**.



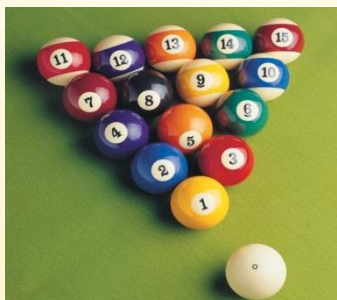
Прое  
КТ

табло

проект

Треугольники вокруг нас.

Развлечения



Начиная игру в бильярд, необходимо расположить шары в виде треугольника. Для этого используют специальную треугольную рамку. Расстановка кеглей в игре Боулинг тоже в виде равностороннего треугольника.

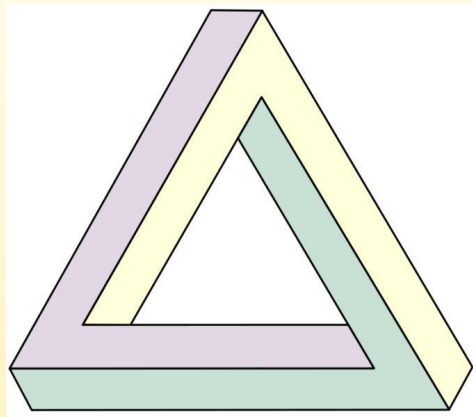


Прое  
КТ

табло



## Нереальные объекты



*Треугольник Пенроуза* -невозможный объект. Плоский рисунок может обманывать, изображая невозможное. Закройте одну из вершин этого треугольника, и станет ясно, что одна из его сторон направлена к нам, а другая от нас, в пространстве они не могут соединиться.

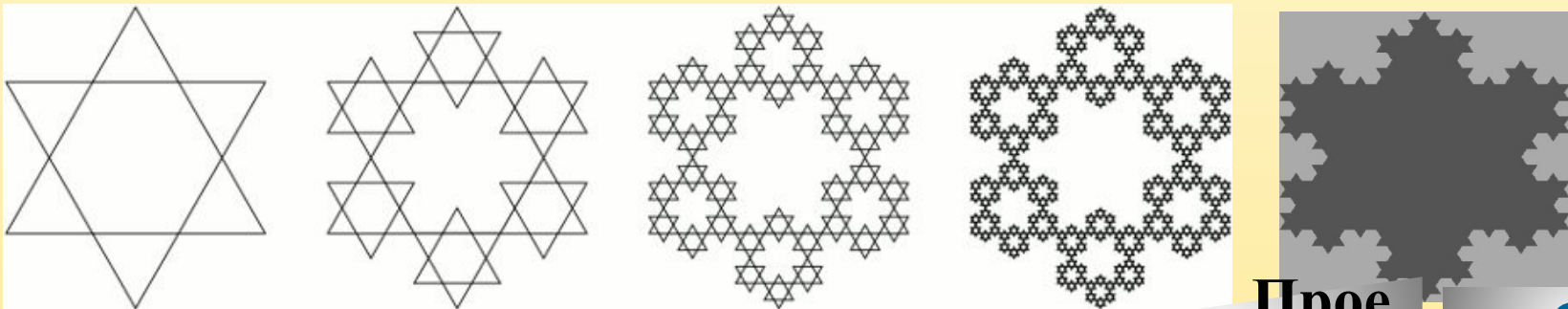


*13-метровая скульптура невозможного треугольника из алюминия была воздвигнута в 1999 году в городе Перт (Австралия).*

## Снежинка Коха

*Снежинка Коха* - это фигура, состоящая из **равносторонних треугольников**.

Снежинку назвали в честь учёного *Гельга Коха*, который её открыл. На картинках этапы построения из равносторонних треугольников и ее геометрический вид.



# ИТОГИ УРОКА

**Критерии оценки:** 15 и более баллов – «5»;  
10-14 баллов – «4»; 6-9 баллов – «3».

## Маркеры для оценки деятельности:

«+» – да или это уже известно;

«-» – нет или мне не все еще понятно;

«☺» – это интересно и неожиданно;

«?» – узнать подробнее.

**Домашнее задание**

# Домашнее задание.

## *Обязательная часть:*

1. Выучить формулировку и доказательство теоремы § 15.
2. В рабочей тетради выполнить № 54, 55.

## *Вариативная часть:*

1. Попробовать доказать теорему при другом расположении чертежа.
2. Подготовить отчеты по проекту, изучив следующие области: «астрономия» и «нереальные объекты».
3. **Подумать!** (Задача на смекалку). За 1 минуту начертить как можно больше равных треугольников.