Признаки равенства треугольников

1. Треугольник и его элементы
2. Задачи по теме «Первый признак равенства треугольников»
3. Задачи по теме «Второй признак равенства треугольников»
4. Задачи по теме «Третий признак равенства треугольников»
5. Справочный материал (формулировка теоремы и ее доказательство):

   а) Первый признак равенства треугольников

   б) Второй признак равенства треугольников

   в) Третий признак равенства треугольников

Треугольник

Рис. 1

Назовите:

1) сторону, лежащую против угла *N*:
2) сторону, лежащую против угла *NDL*:
3) угол, лежащий против стороны *DN*:
4) угол, лежащий против стороны

Первый признак равенства треугольников

Задача. Заполните пропуски.

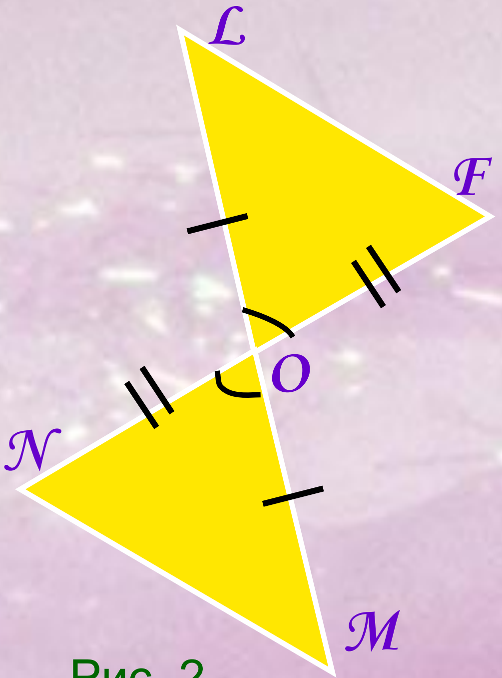

Рис. 2

Докажите, что ▲OLF = ▲OMN

Решение:

1) Рассмотрим ▲OLF и ▲   :

а) OL =   - по условию,

б) OF =   - по условию,

в) ∠LOF = ∠   - как вертикальные углы.

Следовательно ▲OLF = ▲   - по двум сторонам и углу между ними.

Задача. Заполните пропуски.

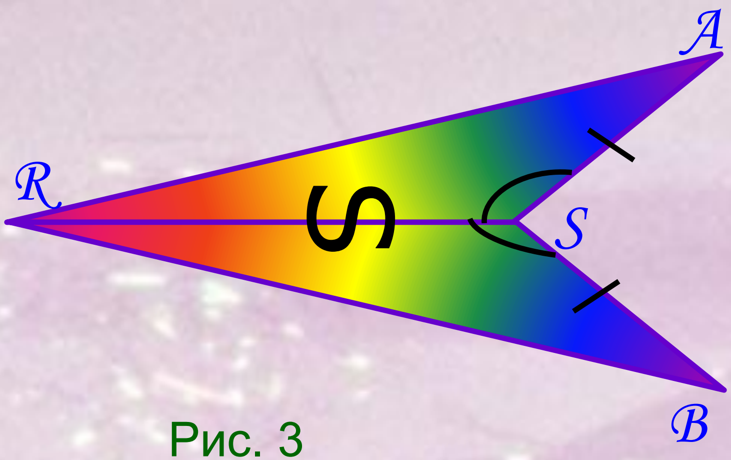

Рис. 3

Докажите, что △ARS = △BRS

Решение:

1) Рассмотрим △ARS и △

а) Сторона = - по условию.

б) Сторона = - общая сторона.

в) ∠ = ∠ - по условию.

г) Следовательно, △ARS = △ - по двум

и углу .

2) Т. к. △ ASR= △ BSR, то соответственные стороны и углы равны,

BR = AR = 18 см, ∠BRS = ∠ARS = 15°

Второй признак равенства треугольников

Задача.

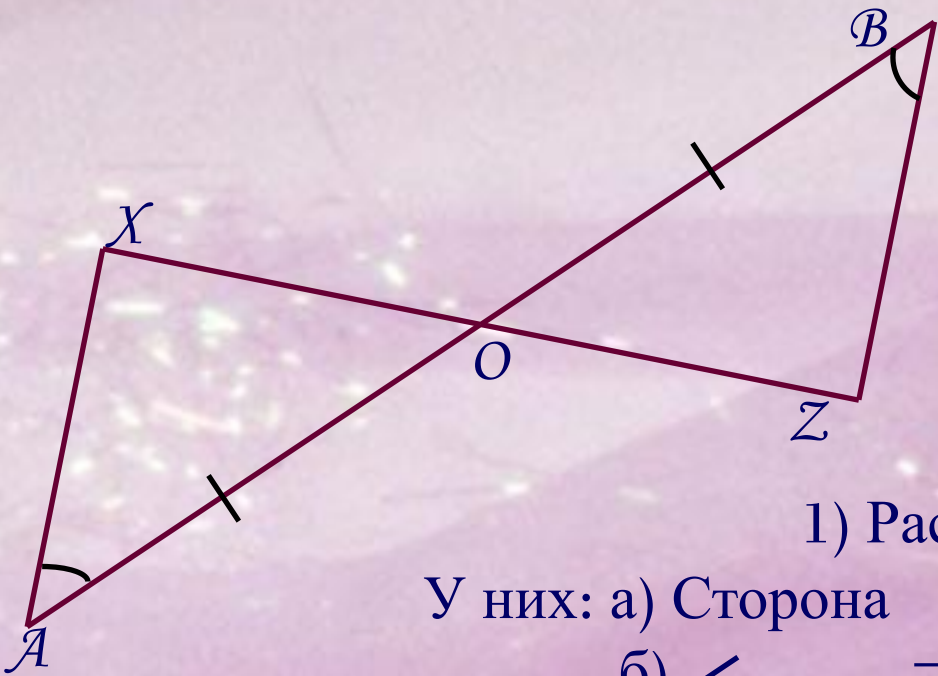

Рис. 4

Докажите, что ▲AXO = ▲BZO

Решение:

1) Рассмотрим ▲BZO и ▲

У них: а) Сторона = - по условию;

б) ∠ =∠ - по условию;

в) ∠ =∠ - как вертикальные.

Следовательно ▲AXO = ▲ - по стороне и двум прилежащим к ней .

Задача.

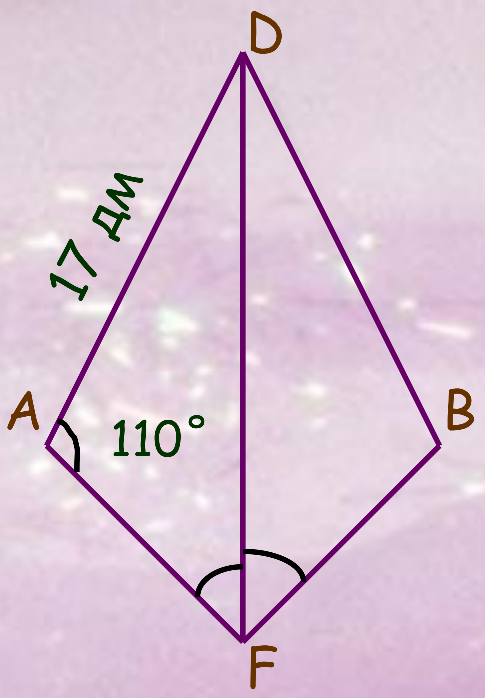

Рис. 5

На рисунке 5 луч DF биссектриса угла ADF

а) Докажите, что ▲ADF = ▲BDF;

б) Найдите сторону BD и ∠DBF.

Решение:

а) Рассмотрим ▲ADF и ▲ .

У них: 1) = - общая сторона;

2) ∠ = ∠ - по условию;

3) ∠ = ∠ , так как DF – биссектриса ∠ADB.

Следовательно, ▲ADF = ▲ по и прилежащим к ней .

б) Из равенства треугольников следует равенство соответствующих сторон и углов, то есть сторона DB = = дм, B = ∠ = ∠ . °

Третий признак равенства треугольников

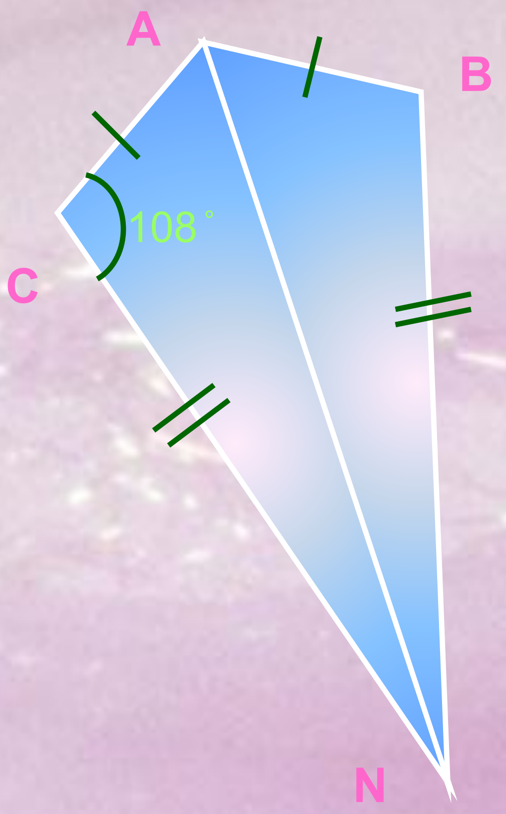

Рис. 6

а) Докажите, что ▲CAN =▲BAN

б) Найдите ∠ ABN.

Решение:

а) Рассмотрим ▲ и ▲BAN.

У них: 1) AC = - по условию;

2) CN = - по условию;

3) AN = AN – общая сторона.

Значит, ▲CAN = ▲ - по трем .

б) Из равенства треугольников CAN и BAN следует равенство соответствующих углов, то есть ∠ABN = ∠ = °.

Теорема

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники **ABC** и **DEF,** у которых **AB=DE, AC=DF,** углы **A** и **D** равны (рис. **7**)**.** Докажем, что ▲**ABC = ▲DEF.**

Так как ∠**A =** ∠**D,** то треугольник **ABC** можно наложить на треугольник **DEF** так, что вершина **A** совместится с вершиной **D,** а стороны **AB** и **AC** наложатся соответственно на лучи **DE** и **DF.** Поскольку **AB=DE, AC=DF,** то сторона **AB** совместится со стороной **DE,** а сторона **AC** – со стороной **DF;** в частности, совместятся точки **B** и **E, C** и **F.** Следовательно, совместятся стороны **BC** и **EF.** Итак, треугольники **ABC** и **DEF** полностью совместятся, значит, они равны.

Теорема доказана.

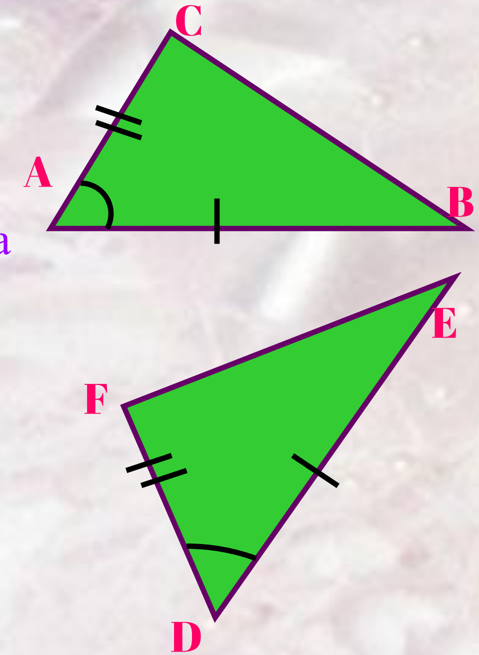

Рис. 7

Теорема

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники **ABC** и **DEF**, у которых **AB = DE**, **∠A = ∠D**, **∠B = ∠E** (рис. **8**). Докажем, что **△ABC = △DEF.**

Наложим треугольник **ABC** на треугольник **DEF** так, чтобы вершина **A** совместилась с вершиной **D**, сторона **AB** – с равной ей стороной **DE**, а вершины **C** и **F** оказались по одну сторону от прямой **DE**.

Так как **∠A = ∠D** и **∠B = ∠E**, то сторона **AC** наложится на луч **DF**, а сторона **BC** – на луч **EF**. Поэтому вершина **C** – общая точка сторон **AC** и **BC** – окажется лежащей как на луче **DF**, так и на луче **EF** и, следовательно, совместится с общей точкой этих лучей – вершиной **F**. Значит, совместятся стороны **AC** и **DF**, **BC** и **EF**.

Итак, треугольники **ABC** и **DEF** полностью совместятся, поэтому они равны.

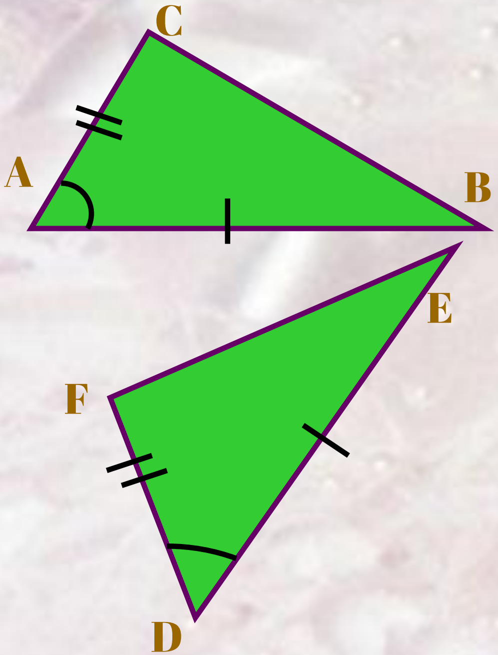

Рис. 8

Теорема доказана.

Теорема

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и DEF, у которых AB = DE, BC = EF, CA = FD (рис. 9). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle DEF$. Приложим треугольник ABC к треугольнику DEF так, чтобы вершина A совместилась с вершиной D, вершина B – с вершиной E, а вершины C и F оказались по разные стороны от прямой DE (рис. 10).

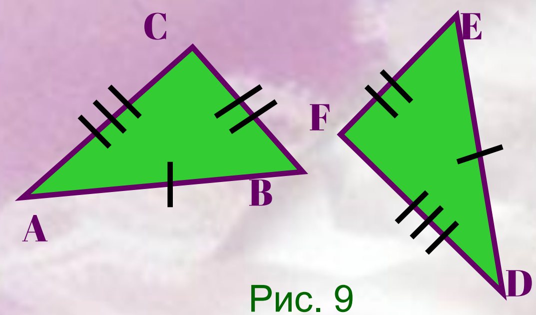

Рис. 9

Возможны три случая: луч FC проходит внутри угла DFE (рис. 10, а); луч FC совпадает с одной из сторон этого угла (рис. 10, б); луч FC проходит вне угла DFE (рис. 10, в). Рассмотрим первый случай (остальные случаи можете рассмотреть самостоятельно).

Так как по условию теоремы стороны AC и DF, BC и EF равны, то треугольники DFC и EFC – равнобедренные (см. рис. 10, а). По теореме о свойстве углов равнобедренного треугольника $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, поэтому $\angle DCE = \angle DFE$. Итак, AC = DF, BC = EF, $\angle C = \angle F$.

Следовательно, треугольники ABC и DEF равны по первому признаку равенства треугольников. Теорема доказана.

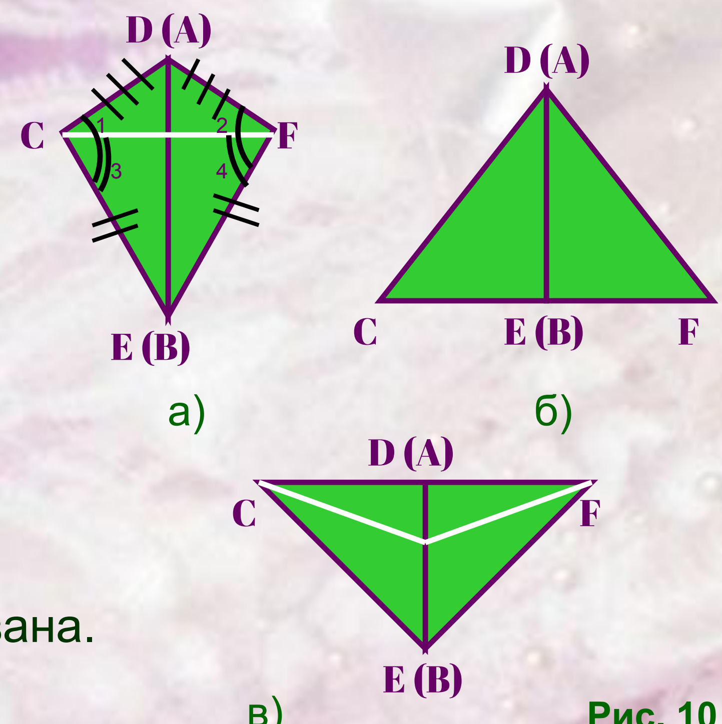

Рис. 10