

# **Признаки равенства треугольников**

1. Треугольник и его элементы
2. Задачи по теме «Первый признак равенства треугольников»
3. Задачи по теме «Второй признак равенства треугольников»
4. Задачи по теме «Третий признак равенства треугольников»
5. **Справочный материал (формулировка теоремы и ее доказательство):**
  - а) Первый признак равенства треугольников
  - б) Второй признак равенства треугольников
  - в) Третий признак равенства треугольников



# Треугольник



Рис. 1

**Назовите:**

1) сторону, лежащую против угла  $N$

:

2) сторону, лежащую против угла

$NDL$ :



3) угол, лежащий против стороны



$DN$ :

4) угол, лежащий против стороны



# Первый признак равенства треугольников

Задача. Заполните пропуски.

Докажите, что  $\triangle OLF = \triangle OMN$

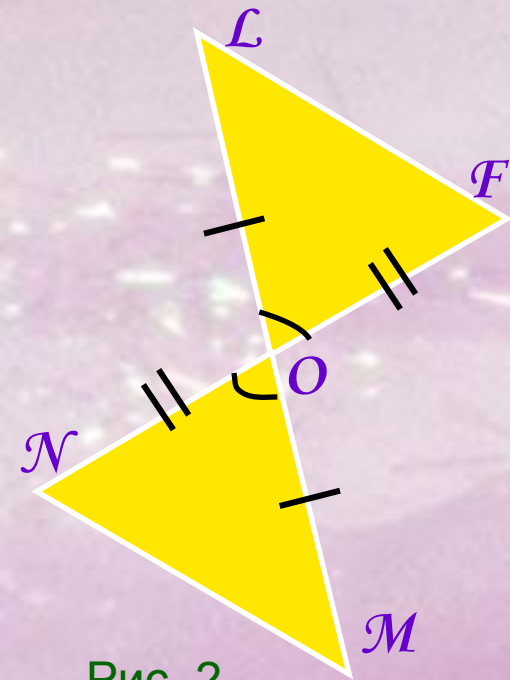


Рис. 2

Решение:

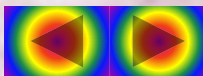
1) Рассмотрим  $\triangle OLF$  и  $\triangle OMN$  :

а)  $OL = OM$  - по условию,

б)  $OF = ON$  - по условию,

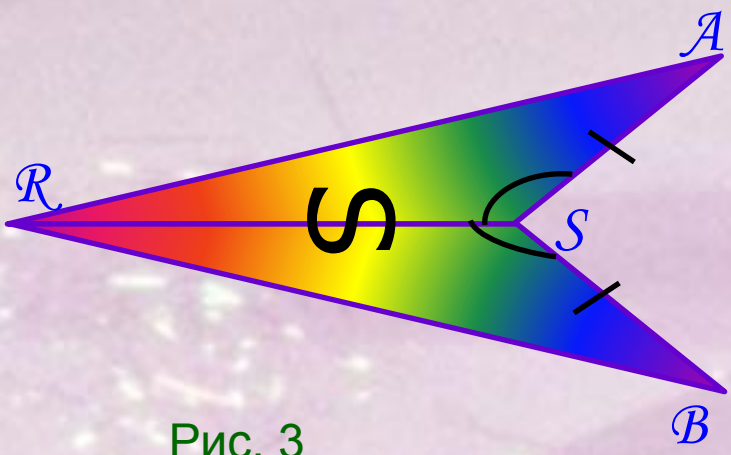
в)  $\angle LOF = \angle MON$  - как вертикальные углы.

Следовательно  $\triangle OLF = \triangle OMN$  - по двум сторонам и углу между ними.





# Задача. Заполните пропуски.



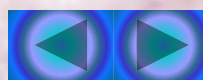
Докажите, что  $\triangle ARS = \triangle BRS$

Решение:

1) Рассмотрим  $\triangle ARS$  и  $\triangle$

- а) Сторона  $AS = BS$  - по условию.
- б) Сторона  $RS = RS$  - общая сторона.
- в)  $\angle ASR = \angle BSR$  - по условию.
- г) Следовательно,  $\triangle ARS = \triangle BRS$  - по двум сторонам и углу.

2) Т. к.  $\triangle ASR = \triangle BSR$ , то соответственные стороны и углы равны,  $BR = AR = 18$  см,  $\angle BRS = \angle ARS = 15^\circ$



# Второй признак равенства треугольников

## Задача.

Докажите, что  $\triangle AXO = \triangle BZO$

Решение:

1) Рассмотрим  $\triangle BZO$  и  $\triangle$

У них: а) Сторона  $AO = BO$  - по условию;

б)  $\angle AOX = \angle BOZ$  - по условию;

в)  $\angle AOX = \angle BOZ$  - как вертикальные.

Следовательно  $\triangle AXO = \triangle BZO$  - по стороне и двум прилежащим к ней углам.

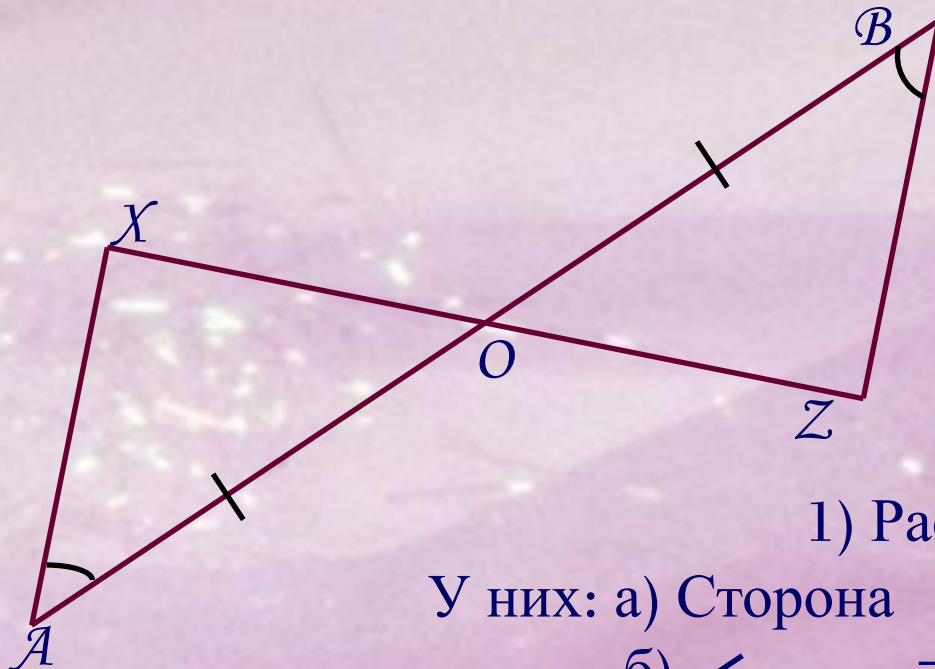


Рис. 4



# Задача.

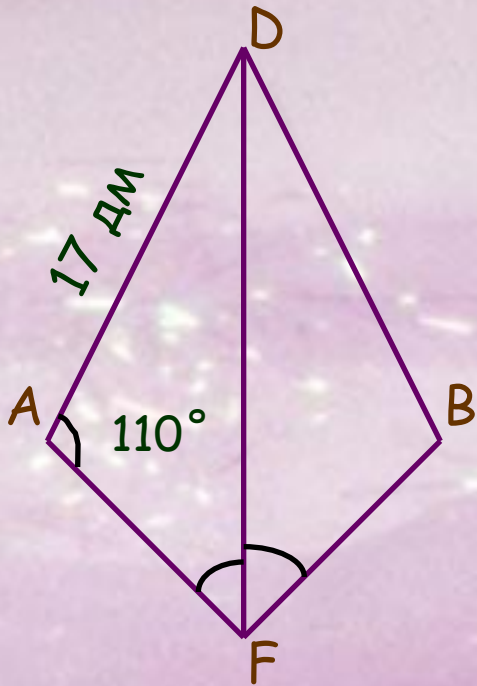


Рис. 5

На рисунке 5 луч DF биссектриса угла ADF

а) Докажите, что  $\triangle ADF = \triangle BDF$ ;

б) Найдите сторону BD и  $\angle DBF$ .

Решение:

а) Рассмотрим  $\triangle ADF$  и  $\triangle BDF$ .

У них: 1)  $DF = DF$  - общая сторона;

2)  $\angle ADF = \angle BDF$  - по условию;

3)  $\angle AFD = \angle BFD$ , так как DF –

биссектриса  $\angle ADB$ .

Следовательно,  $\triangle ADF = \triangle BDF$  по  $\text{д.п.з.}$  и  $\text{д.п.у.}$  прилежащим к ней.

б) Из равенства треугольников следует равенство соответствующих сторон и углов, то есть сторона  $DB = AD = 17$  дм,  $\angle B = \angle A = 110^\circ$ .





# Третий признак равенства треугольников

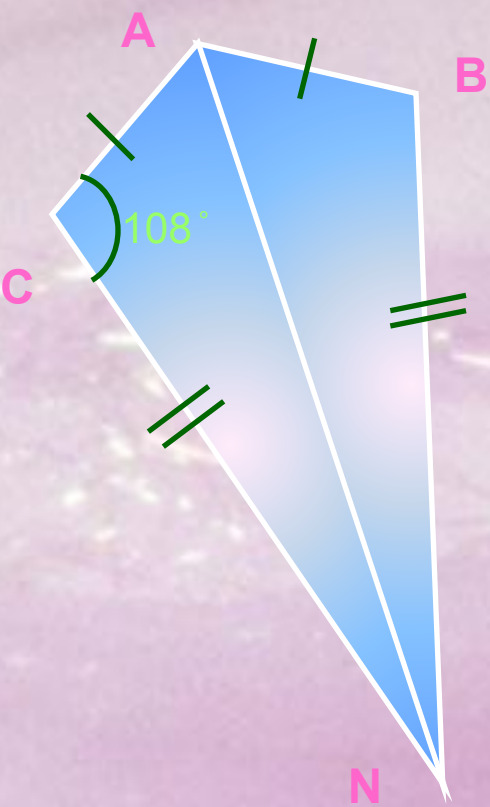


Рис. 6

- а) Докажите, что  $\triangle CAN = \triangle BAN$
- б) Найдите  $\angle ABN$ .

## Решение:

а) Рассмотрим  $\triangle CAN$  и  $\triangle BAN$ .

У них: 1)  $AC = BN$  - по условию;

2)  $CN = AN$  - по условию;

3)  $AN = AN$  – общая сторона.

Значит,  $\triangle CAN = \triangle BAN$  - по трем признакам.

б) Из равенства треугольников  $CAN$  и  $BAN$  следует равенство соответствующих углов, то есть  $\angle ABN = \angle ACN = 108^\circ$ .



# Теорема

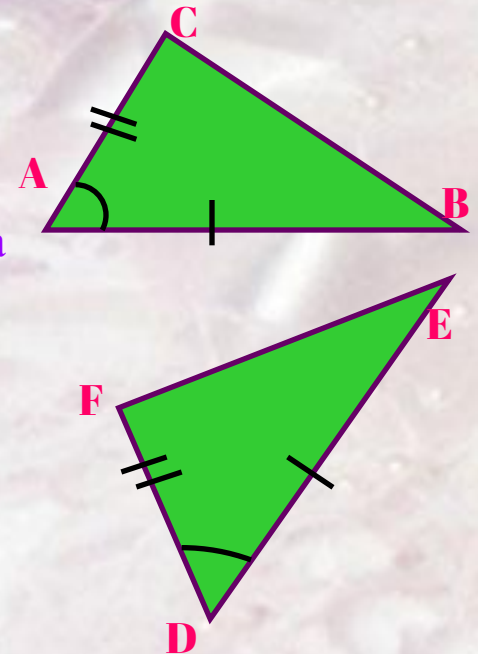


Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

## Доказательство

Рассмотрим треугольники  $ABC$  и  $DEF$ , у которых  $AB=DE$ ,  $AC=DF$ , углы  $A$  и  $D$  равны (рис. 7). Докажем, что  $ABC = DEF$   $\triangle$   $\triangle$

Так как  $\angle A = \angle D$ , то треугольник  $ABC$  можно наложить на треугольник  $DEF$  так, что вершина  $A$  совместится с вершиной  $D$ , а стороны  $AB$  и  $AC$  наложатся соответственно на лучи  $DE$  и  $DF$ . Поскольку  $AB=DE$ ,  $AC=DF$ , то сторона  $AB$  совместится со стороной  $DE$ , а сторона  $AC$  – со стороной  $DF$ ; в частности, совместятся точки  $B$  и  $E$ ,  $C$  и  $F$ . Следовательно, совместятся стороны  $BC$  и  $EF$ . Итак, треугольники  $ABC$  и  $DEF$  полностью совместятся, значит, они равны.



Теорема доказана.

Рис. 7





# Теорема

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

## Доказательство

Рассмотрим треугольники  $ABC$  и  $DEF$ , у которых  $AB = DE$ ,  $A = D$ ,  $\angle B = \angle E$  (рис. 8). Докажем, что  $ABC = DEF$ . ▲ ▲

Наложим треугольник  $ABC$  на треугольник  $DEF$  так, чтобы вершина  $A$  совместилась с вершиной  $D$ , сторона  $AB$  – с равной ей стороной  $DE$ , а вершины  $C$  и  $F$  оказались по одну сторону от прямой  $DE$ .

Так как  $A = D$  и  $B = E$ , то сторона  $AC$  наложится на луч  $DF$ , а сторона  $BC$  – на луч  $EF$ . Поэтому вершина  $C$  – общая точка сторон  $AC$  и  $BC$  – окажется лежащей как на луче  $DF$ , так и на луче  $EF$  и, следовательно, совместится с общей точкой этих лучей – вершиной  $F$ . Значит, совместятся стороны  $AC$  и  $DF$ ,  $BC$  и  $EF$ .

Итак, треугольники  $ABC$  и  $DEF$  полностью совместятся, поэтому они равны.

Теорема доказана.

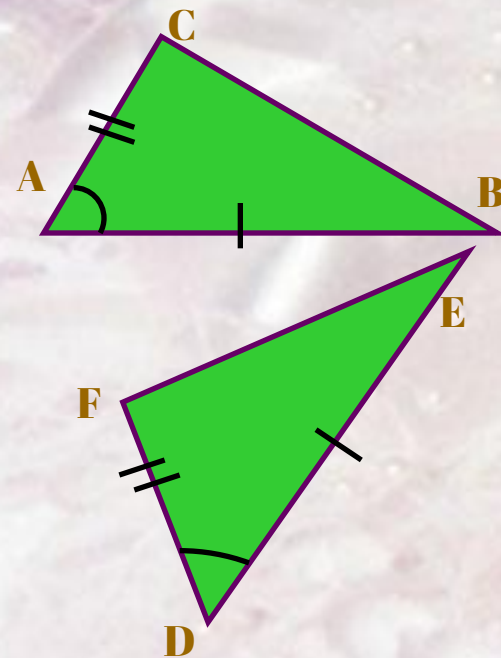


Рис. 8



# Теорема

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

## Доказательство

Рассмотрим треугольники  $ABC$  и  $DEF$ , у которых  $AB = DE$ ,  $BC = EF$ ,  $CA = FD$  (рис. 9). Докажем, что  $\triangle ABC = \triangle DEF$ . Приложим треугольник  $ABC$  к треугольнику  $DEF$  так, чтобы вершина  $A$  совместилась с вершиной  $D$ , вершина  $B$  – с вершиной  $E$ , а вершины  $C$  и  $F$  оказались по разные стороны от прямой  $DE$  (рис. 10).

Возможны три случая: луч  $FC$  проходит внутри угла  $DFE$  (рис. 10, а); луч  $FC$  совпадает с одной из сторон этого угла (рис. 10, б); луч  $FC$  проходит вне угла  $DFE$  (рис. 10, в). Рассмотрим первый случай (остальные случаи можете рассмотреть самостоятельно).

Так как по условию теоремы стороны  $AC$  и  $DF$ ,  $BC$  и  $EF$  равны, то треугольники  $DFC$  и  $EFC$  – равнобедренные (см. рис. 10, а). По теореме о свойстве углов равнобедренного треугольника  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 3 = \angle 4$ , поэтому  $\angle DCE = \angle DFE$ . Итак,  $AC = DF$ ,  $BC = EF$ ,  $\angle C = \angle F$ .

Следовательно, треугольники  $ABC$  и  $DEF$  равны по первому признаку равенства треугольников. Теорема доказана.

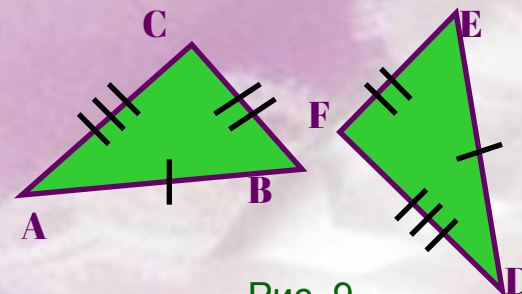


Рис. 9

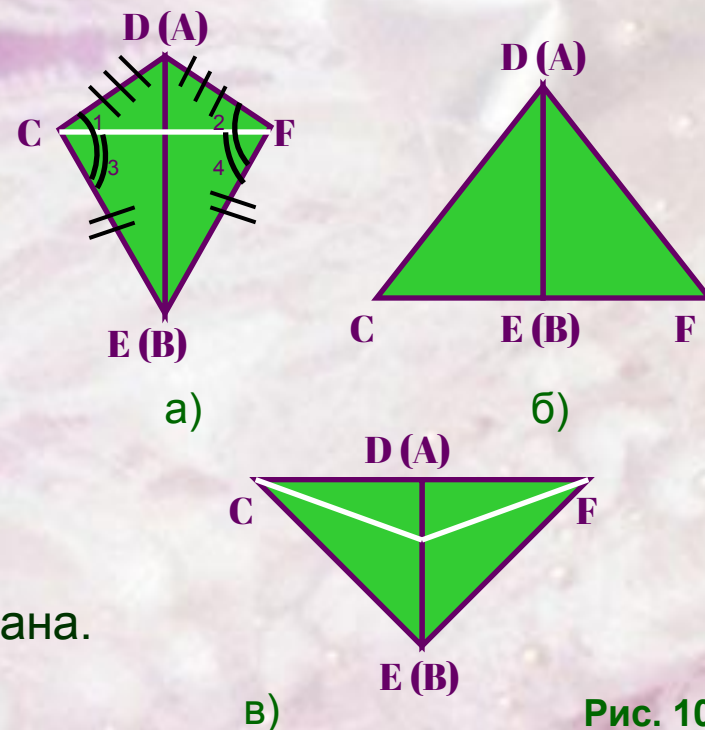


Рис. 10

