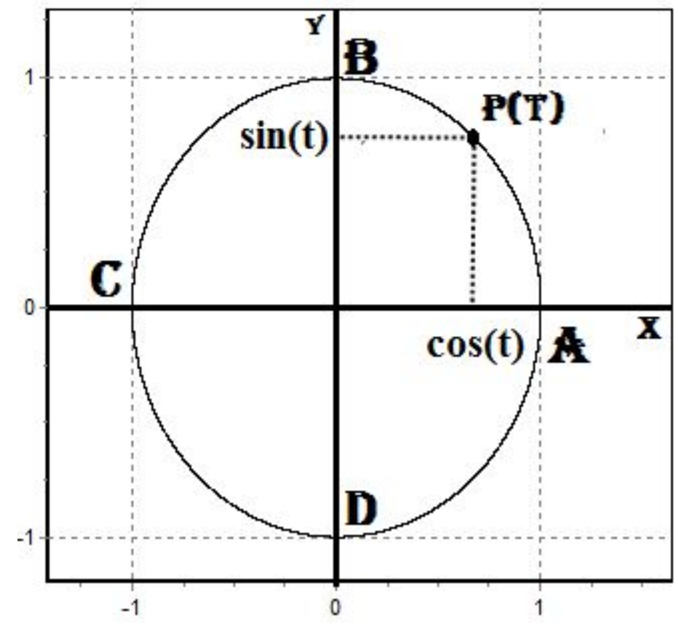
Занимательная математика

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 10 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ: ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА.



Тригонометрическая функция числового аргумента.

ЧТО БУДЕМ ИЗУЧАТЬ:

Определение.

Основные формулы.

Тригонометрические тождества.

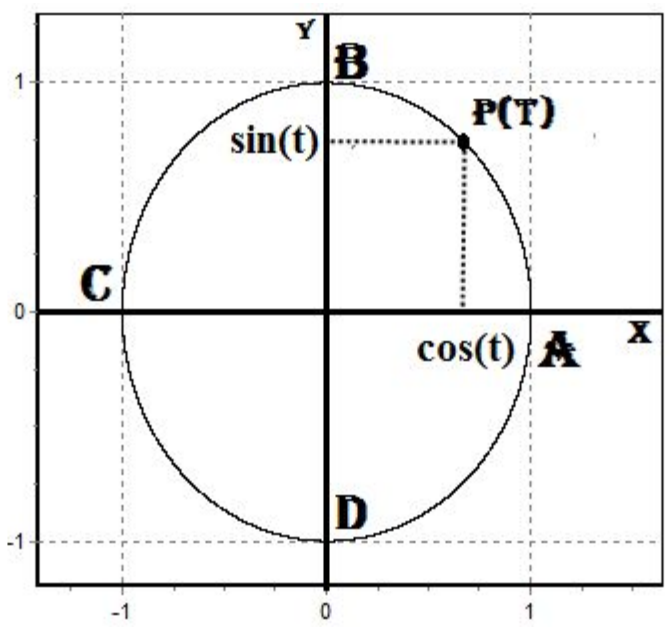
Примеры задач.

Тригонометрическая функция числового аргумента.

Определение.

Ребята, мы знаем что такое ***синус, косинус, тангенс и котангенс***. Давайте посмотрим, можно ли через значения одних тригонометрических функций найти значения других тригонометрических функций. Определим ***тригонометрическую функцию числового элемента*** как:

$$y = \sin(t),\ y = \cos(t),\ y = tg(t),\ y = ctg(t)$$



Тригонометрическая функция числового аргумента.

Основные формулы.

Вспомним основные формулы:

$$\sin^2(t)+\cos^2(t)=1$$

Кстати, как называется эта формула?

$$\mathrm{tg}(t)=\frac{\sin(t)}{\cos(t)} \text{ при } t\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$\mathrm{ctg}(t)=\frac{\cos(t)}{\sin(t)} \text{ при } t\neq\pi k$$

Давайте выведем новые формулы

Тригонометрическая функция числового аргумента.

Тригонометрические тождества.

Мы знаем основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2(t)+\cos^2(t)=1$$

Ребята, давайте обе части тождества разделим на $\cos^2(t)$ ***, получим:***

$$\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}+\frac{\cos^2(t)}{\cos^2(t)}=\frac{1}{\cos^2(t)}$$

преобразуем его: $\left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2(t)}$

Тогда у нас получается тождество:

$$tg^2(t)+1=\frac{1}{\cos^2(t)} \quad \text{при} \quad t\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$$

Тригонометрическая функция числового аргумента.

Тригонометрические тождества.

Теперь давайте разделим основное тригонометрическое тождество на $sin^2(t)$ ***:***

$$\frac{sin^2(t)}{sin^2(t)} + \frac{cos^2(t)}{sin^2(t)} = \frac{1}{sin^2(t)}$$

Давайте так же преобразуем его

$$1 + \left(\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\right)^2 = \frac{1}{sin^2(t)}$$

И у нас получается новое тождество, которое стоит запомнить:

$$ctg^2(t) + 1 = \frac{1}{sin^2(t)} \quad \text{при} \quad t \neq \pi k$$

Тригонометрическая функция числового аргумента.

Тригонометрические тождества.

Нам удалось получить две новых формулы:

$$tg^2(t) + 1 = \frac{1}{cos^2(t)} \qquad ctg^2(t) + 1 = \frac{1}{sin^2(t)}$$

$$\mathrm{tg(t)} = \frac{1}{\mathrm{ctg(t)}} \qquad \mathrm{ctg(t)} = \frac{1}{\mathrm{tg(t)}}$$

Запомните их!

Полученные нами формулы используются когда по какому то известному значению тригонометрической функции требуется вычислить значение другой.

Тригонометрическая функция числового аргумента.

Пример

cos(t) = 5/7, найти sin(t); tg(t); ctg(t) для всех t

Решение:

$$\sin^2(t)+\cos^2(t)=1 \quad \textit{тогда} \quad \sin^2(t)=1-\cos^2(t)$$

$$\sin^2(t)=1-\left(\frac{5}{7}\right)^2=1-\frac{25}{49}=\frac{49-25}{49}=\frac{24}{49}$$

$$\sin(t)=\pm\frac{\sqrt{24}}{7}=\pm\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$\mathrm{tg}(t)=\pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)}-1}=\pm\sqrt{\frac{1}{\frac{25}{49}}-1}=\pm\sqrt{\frac{49}{25}-1}=\pm\sqrt{\frac{24}{25}}=\pm\frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$\mathrm{ctg}(t)=\pm\sqrt{\frac{1}{\sin^2(t)}-1}=\pm\sqrt{\frac{1}{\frac{24}{49}}-1}=\pm\sqrt{\frac{49}{24}-1}=\pm\sqrt{\frac{25}{24}}=\pm\frac{5}{\sqrt{24}}$$

Тригонометрическая функция числового аргумента.

Пример

tg(t) = 5/12, найти sin(t); cos(t); ctg(t) при всех 0<t< π/2

Решение:

$$tg^2(t) + 1 = \frac{1}{cos^2(t)}$$ *тогда* $$\frac{1}{cos^2(t)} = 1 + \frac{25}{144} = \frac{169}{144}$$

получаем: $cos^2(t) = \frac{144}{169}$ отсюда cos(t)= $\pm\frac{12}{13}$, но 0<t< π/2, косинус в первой четверти положительный тогда, cos(t)= $\frac{12}{13}$

$$sin(t) = tg(t) \times cos(t) = \frac{5}{12} \times \frac{12}{13} = \frac{5}{13}$$

$$\text{ctg(t)} = \frac{1}{\text{tg(t)}} = \frac{12}{5}$$

Тригонометрическая функция числового аргумента.

Задачи для самостоятельного решения.

1) $tg(t) = -3/4$, найти $sin(t)$; $cos(t)$; $ctg(t)$ при всех $\pi/2 < t < \pi$

2) $ctg(t) = 3/4$, найти $sin(t)$; $cos(t)$; $tg(t)$ при всех $\pi < t < 3\pi/2$

3) $sin(t) = 5/7$, найти $cos(t)$; $tg(t)$; $ctg(t)$ для всех t

4) $cos(t) = 12/13$, найти $sin(t)$; $tg(t)$; $ctg(t)$ для всех t