Решение простейших тригонометрических неравенств

- Решение неравенств, содержащих тригонометрические функции обычно сводится к решению простейших неравенств вида:

  sin(t)<(≤;>;≥)a;

  cos(t)<(≤;>;≥)a;

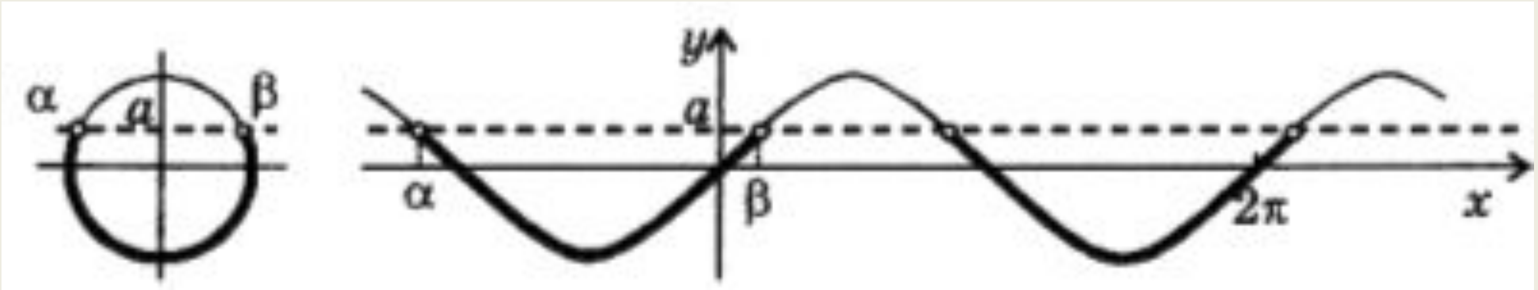
  tg(t)<(≤;>;≥)a;

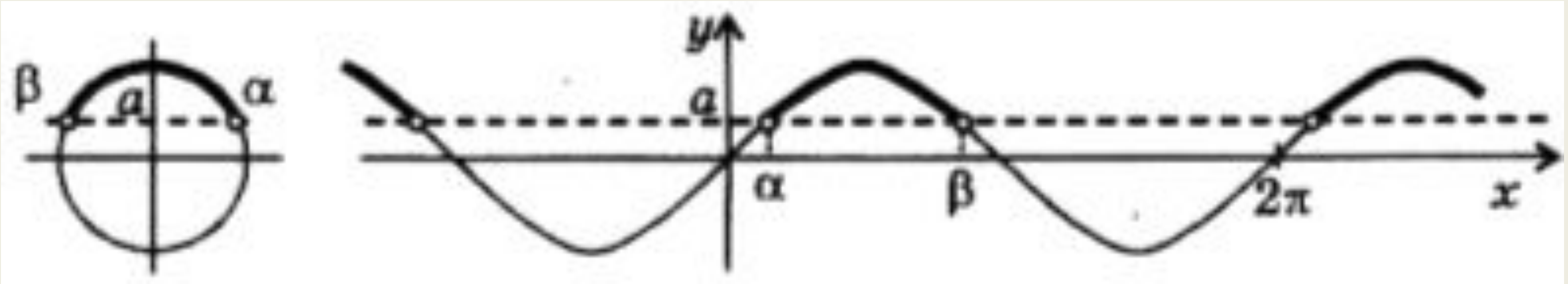
  ctg(t)<(≤;>;≥)a;

  Способы решения этих неравенств совершенно очевидным образом вытекают из представления тригонометрических функций на единичном круге.

Вид неравенства	Множество решений неравенства
$\sin x > a$ ($\|a\|<1$)	**$x\ (\arcsin a + 2\pi n,\ \pi - \arcsin a + 2\pi n),\ nZ$**
$\sin x < a$ ($\|a\|<1$)	**$x\ (-\pi - \arcsin a + 2\pi n,\ \arcsin a + 2\pi n),\ nZ$**
$\cos x > a$ ($\|a\|<1$)	**$x\ (-\arccos a + 2\pi n,\ \arccos a + 2\pi n),\ nZ$**
$\cos x < a$ ($\|a\|<1$)	**$x\ (\arccos a + 2\pi n,\ 2\pi - \arccos a + 2\pi n),\ nZ$**
$\text{tg}\, x > a$	**$x\ (\text{arctg}\, a + \pi n,\ \pi/2 + \pi n),\ nZ$**
$\text{tg}\, x < a$	**$x\ (-\pi/2 + \pi n,\ \text{arctg}\, a + \pi n),\ nZ$**
$\text{ctg}\, x > a$	**$x\ (\pi n,\ \text{arcctg}\, a + \pi n),\ nZ$**
$\text{ctg}\, x < a$	**$x\ (\text{arcctg}\, a + \pi n,\ \pi + \pi n),\ nZ$**

$\geq$ $\leq$





$a=-1$

$\sin x < -1$ – решений нет

$\sin x \le -1 \Leftrightarrow x = -\pi/2 + 2\pi n$

$\sin x > -1 \Leftrightarrow x \ne -\pi/2 + 2\pi n$

$\sin x \ge -1 \Leftrightarrow x \in R$

$a < -1$

$\sin x < a\ (\le a)$ – решений нет

$\sin x > a\ (\ge a) \Leftrightarrow x \in R$

$a=1$

$\sin x < 1 \Leftrightarrow x \ne -\pi/2 + 2\pi n$

$\sin x \le 1 \Leftrightarrow x \in R$

$\sin x > 1$ – решений нет

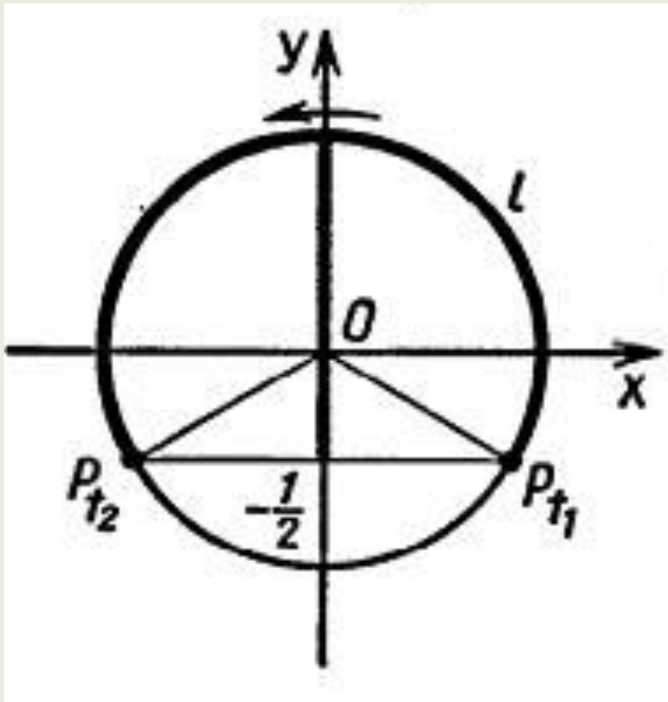
$\sin x \ge 1 \Leftrightarrow x = -\pi/2 + 2\pi n$

$a > 1$

$\sin x < a\ (\le a) \Leftrightarrow x \in R$

$\sin x > a\ (\ge a)$ – решений нет

Тригонометрическое неравенство sin(t)≥a.



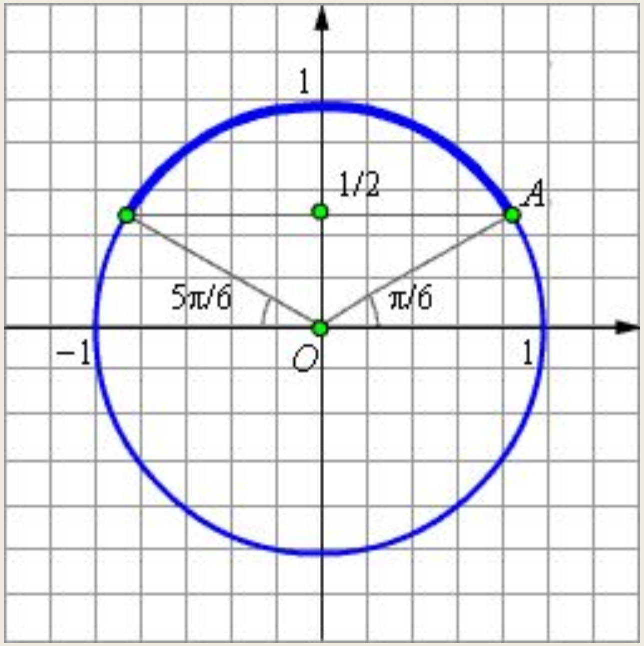
Все точки P_t единичной окружности при значениях t, удовлетворяющих данному неравенству, имеют ординату, большую или равную -1/2. Множество таких точек это дуга l, которая выделена жирным на рисунке ниже.

Найдем условие принадлежности точки P_t этой дуге. Точка P_t лежит на правой полуокружности, ордината P_t равна 1/2, и, следовательно, в качестве t_1 удобно взять значение t_1=arcsin(-1/2)=-π/6. Представим себе, что мы совершаем обход дуги l от точки P_{t1} к P_{t2} против часовой стрелки. Тогда $t_2 > t_1$, и, как легко понять, t_2=π-arcsin(-1/2)=7*π/6. Таким образом, получаем, что точка P_t принадлежит дуге l, если -π/6 ≤ t ≤ 7*π/6. Таким образом, решения неравенства, принадлежащие промежутку [-π/2 ; 3*π/2] длиной 2*π таковы: -π/6 ≤ t ≤ 7*π/6. Вследствие периодичности синуса остальные решения получаются добавлением к найденным чисел вида 2πn, где n - целое.

Таким образом, мы приходим к ответу:

-π/6+2πn≤t≤7π/6+2πn, n - целое.

Пример 1



Решите неравенство $\sin x \geq \frac{1}{2}.$

Нарисуем тригонометрическую окружность и отметим на ней точки, для которых ордината превосходит $\frac{1}{2}.$

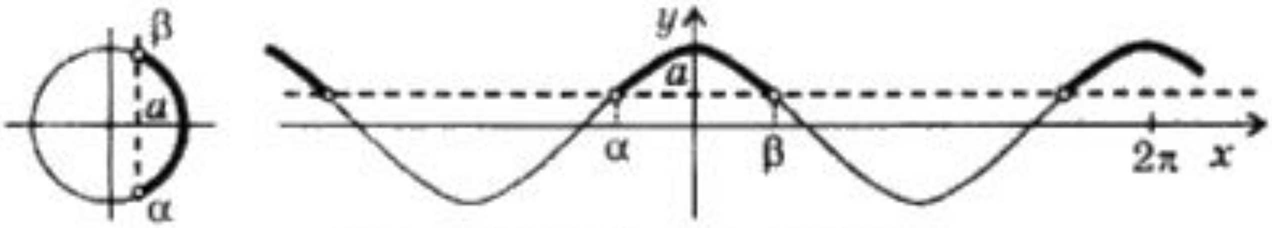
Для x $\in$ [0; 2π] решением данного неравенства

будут $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right].$ Ясно также, что если некоторое число x будет отличаться от какого-нибудь числа из указанного интервала на 2π n $n \in \mathbb{Z},$ то sin x также будет не меньше $\frac{1}{2}.$ Следовательно, к концам найденного отрезка решения нужно просто добавить 2π n , где Окончательно, получаем, что решениями исходного неравенства будут все $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right],$ где $n \in \mathbb{Z},$

Ответ. $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right],$ где $n \in \mathbb{Z},$

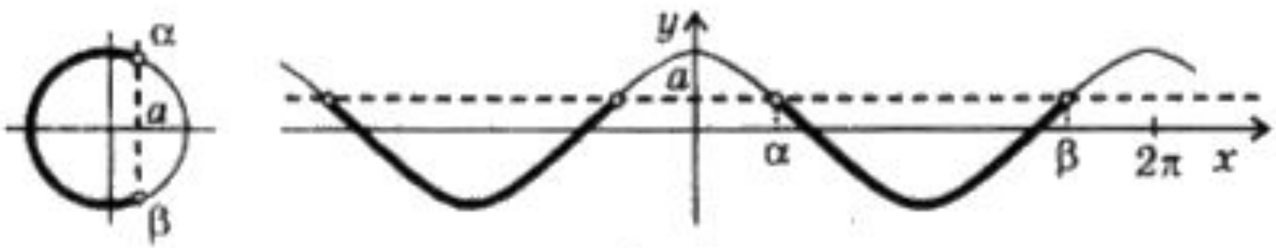
$$|a| < 1$$

$$\cos x > a \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n,$$
$$n \in Z$$



$\alpha = -\arccos a; \quad \beta = \arccos a$

$$\cos x < a \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n,$$
$$n \in Z$$



$\alpha = \arccos a; \quad \beta = 2\pi - \arccos a$

$a=-1$

$\cos x < -1$ – решений нет
$\cos x \le -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n$
$\cos x > -1 \Leftrightarrow x \ne \pi + 2\pi n$
$\cos x \ge -1 \Leftrightarrow x \in R$

$a=1$

$\cos x < 1 \Leftrightarrow x \ne 2\pi n$
$\cos x \le 1 \Leftrightarrow x \in R$
$\cos x > 1$ – решений нет
$\cos x \ge 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n$

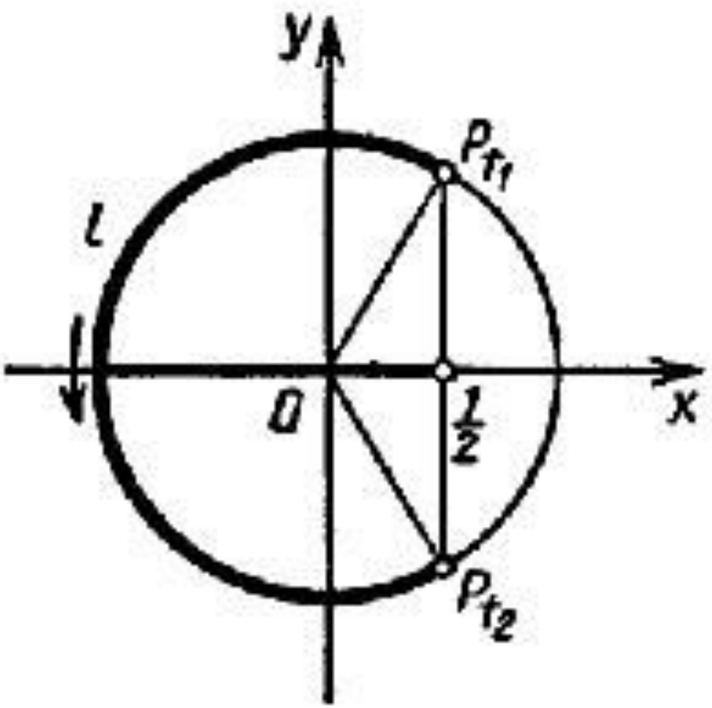
$a < -1$

$\cos x < a$ $(\le a)$ – решений нет
$\cos x > a$ $(\ge a) \Leftrightarrow x \in R$

$a > 1$

$\cos x < a$ $(\le a) \Leftrightarrow x \in R$
$\cos x > a$ $(\ge a)$ – решений нет

Тригонометрическое неравенство cos(t)<a



Рассмотрим решение простейших тригонометрических неравенств с косинусом на примере решения неравенства $\cos(t)<1/2$.

Множество точек единичной окружности, абсциссы которых меньше 1/2 левее прямой $x=1/2$. Значит, множкество всех таких точек есть дуга l, выделенная на рисунке ниже жирным, прияем ее концы P_{t1} и P_{t2} не входят в это множкество. Необходимо найти точки t_1 и t_2. Точка P_{t1} расположена на верхней полуокружности, абсцисса P_{t1} равна 1/2, следовательно $t_1=\arccos(1/2)=5*\pi/3$. При переходе от точки P_{t1} к P_{t2} по дуге l выполняем обход против движения часовой стрелки, тогда $t_2>t_1$ и $t_2=2\pi-\arccos(1/2)=5\pi/3$. Точка принадлежит выделенной дуге l (исключая ее концы) при условии, что $\pi/3<t<5\pi/3$. Решения неравенства, принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$ длиной 2π, таковы: $\pi/3<t<5\pi/3$. Вследствие периодичности косинуса остальные решения получаются добавлением к найденным чисел вида $2\pi n$, где n - целое.

Таким образом, мы приходим к окончательному ответу:

$\pi/3+2\pi n<t<5\pi/3+2\pi n$, n - целое.

$\operatorname{tg} x > a$

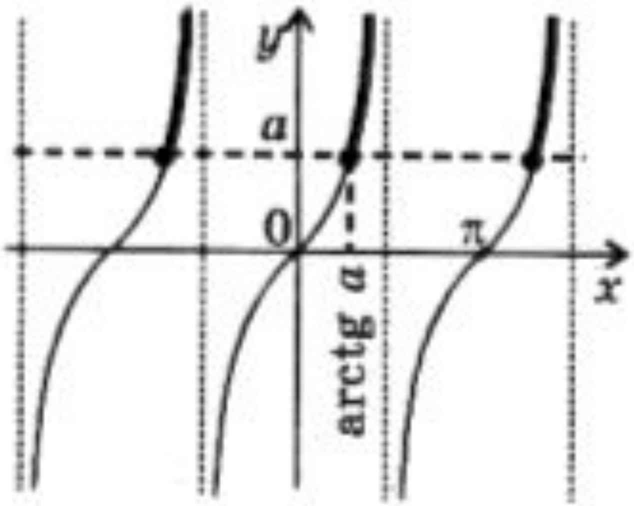
$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \pi/2 + \pi n,$

$n \in Z$

$\operatorname{tg} x \geq a$

$\operatorname{arctg} a + \pi n \leq x < \pi/2 + \pi n,$

$n \in Z$



$\operatorname{tg} x < a$

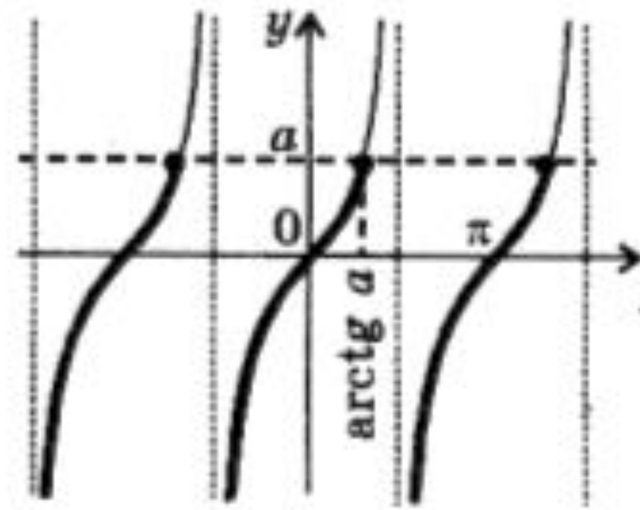
$-\pi/2 + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n,$

$n \in Z$

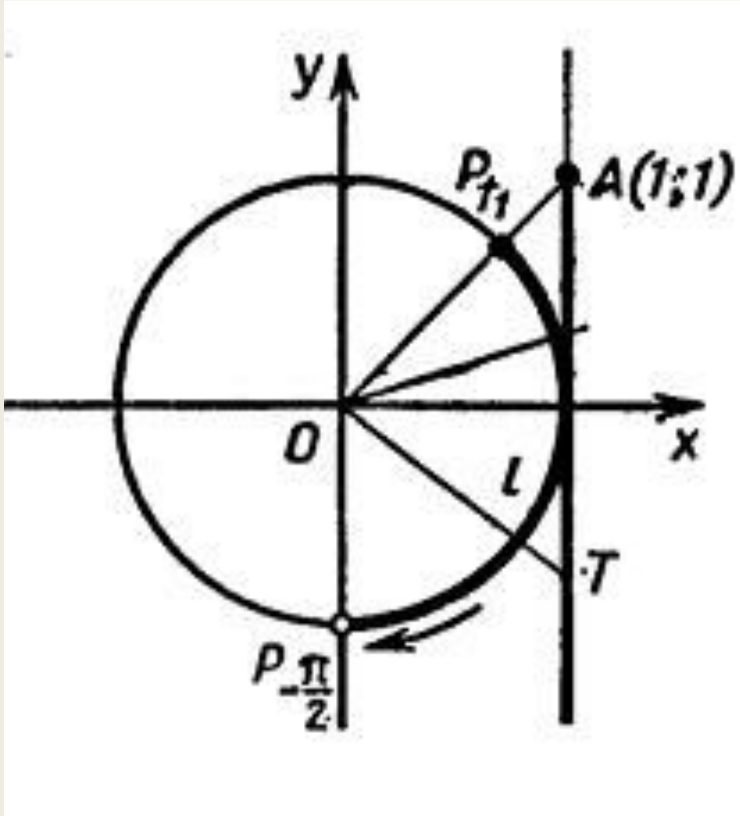
$\operatorname{tg} x \leq a$

$-\pi/2 + \pi n < x \leq \operatorname{arctg} a + \pi n,$

$n \in Z$



Тригонометрическое неравенство tg(t)≤a



Рассмотрим способ решения тригонометрического неравенства с тангенсом на примере неравенства tg(t)≤1.

период тангенса равен π Найдем сначала все решения данного неравенства, принадлежащие промежутку (-π/2; π/2), а затем воспользуемся периодичностью тангенса. Для выделения всех точек P_t правой полуокружности, значения t которых удовлетворяют данному неравенству, обратимся к линии тангенсов. Если t является решением неравенства, то ордината точки T - луч AT (см. рисунок ниже). Множество точек P_t, соответствующих точкам этого луча, - дуга l, выделенная на рисунке жирным. Следует отметить, что точка P_{t1} принадлежит рассматриваемому множеству, а P_{t2} нет.

Найдем условие, при котором точка P_t принадлежит дуге l. t_1 принадлежит интервалу (-π/2 ; π/2), и tf(t)=1, следовательно t_1=arctg(1)=π/4. Значит t должно удовлетворять условию -π/2<t≤π/4. Все решения данного неравенства, принадлежащие промежутку (-π/2 ; π/2), таковы: (-π/2 ; π/4].

учитывая периодичность тангенса, приходим к окончательному ответу:

-π/2+πn<t≤π/4+πn, n - целое.

Сабитова Файруза Рифовна
преподаватель математики
ГАОУ СПО «Сармановский аграрный колледж»