

Тригонометрические уравнения и неравенства

Обобщающий урок

A decorative graphic featuring a blue textured background with various mathematical symbols and shapes. It includes a green circle, a yellow triangle, a blue rectangle, and several blue lines. The text 'Алгебра-10' is overlaid on this graphic.

Алгебра-10

Шабанова Галина Николаевна,
учитель математики
МОУ «Егорьевская СОШ»
Егорьевский район
Алтайский край

Как работать

Сегодня весь урок ты будешь работать самостоятельно. Ты сможешь обобщить и систематизировать знания по решению тригонометрических уравнений и неравенств. В ходе урока ты сможешь проверить степень своей готовности к предстоящей контрольной работе. К концу урока постарайся зафиксировать свои ошибки (сколько, какие). В дальнейшем вместе с учителем ты сможешь разобрать эти ошибки.

Удачи!

План урока

- Устная разминка
- Решение уравнений базового уровня
- Решение неравенств
- Решение уравнений повышенного уровня
- Дополнительное задание
- Подведение итогов

Вспомни формулы

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a \text{ для любого } a \in [-1,1]$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a \text{ для любого } a \in [0,1]$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a \text{ для любого } a$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a \text{ для любого } a$$

Устная разминка

Вычисли и запиши в столбик
ответы в тетради:

1. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$

4. $\operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$

5. $\arcsin \left(-\frac{1}{2} \right)$

6. $\arccos (-1)$

7. $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

Проверь ответы:

1) $\frac{\pi}{3}$

2) $\frac{\pi}{4}$

3) $\frac{\pi}{3}$

4) $-\frac{\pi}{6}$

5) $-\frac{\pi}{6}$

6) π

7) $\frac{5\pi}{6}$

Вспомни и запиши формулы для решения уравнений

1. $\cos x = a, |a| \leq 1$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k$$

2. $\sin x = a, |a| \leq 1$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$$

3. $\operatorname{tg} x = a$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$$

4. $\operatorname{ctg} x = a$

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$$

Реши уравнения базового уровня

Проверь ответы:

1) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$

2) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

4) $\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 5 = 0$

5) $(2\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$

1) $x = \pm\pi/6 + 2\pi k.$

2) $x = (-1)^n \cdot (-\pi/6) + \pi n/2.$

3) $x = \frac{11\pi}{12} + 2\pi k, x = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi k.$

4) $x = \pi/4 + \pi n, x = \operatorname{arctg} 5 + \pi k.$

5) $x = (-1)^n \cdot \pi/6 + \pi n, x = 2\pi k.$

Если неверно



К
слайду 9

Если верно



К слайду
10

Решение некоторых уравнений базового уровня

$$3) 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1,$$
$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1/2,$$
$$x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos(-1/2) + 2\pi k,$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,$$

$$x = \frac{11\pi}{12} + 2\pi k, \quad x = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi k$$

$$4) \operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 5 = 0$$

Обозначим $\operatorname{tg} x = a$. тогда

$$a^2 - 6a + 5 = 0$$

Отсюда $a_1 = 5$, $a_2 = 1$,

$$\operatorname{tg} x = 5 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = 1$$

$$\underline{x = \operatorname{arctg} 5 + \pi k,}$$

$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi k,$$

$$\underline{x = \frac{\pi}{4} + \pi k}$$

$$5) (2\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$$

Подсказка:

произведение равно 0, если...

Решение неравенств

Реши неравенства:

1) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\sin x \geq 0$

3) $\cos x < -1/2$

4) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Проверь ответы:

1) $-\pi/6 + 2\pi k < x < \pi/6 + 2\pi k$

2) $2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k$

3) $2\pi/3 + 2\pi k < x < 4\pi/3 + 2\pi k$

4) $\pi/4 + 2\pi k < x < 3\pi/4 + 2\pi k$

Если неверно



К
слайду
слайду

11

Если верно



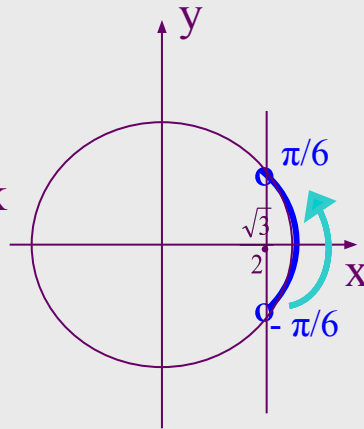
К слайду
К слайду

12

Проверь решения неравенств

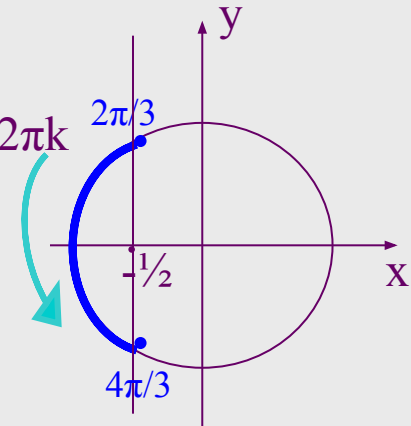
1) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\pi/6 + 2\pi k < x < \pi/6 + 2\pi k$



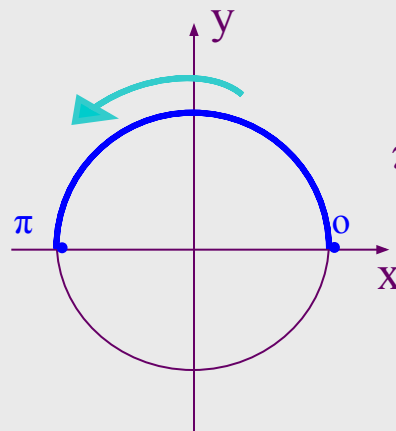
3) $\cos x < -1/2$

$2\pi/3 + 2\pi k < x < 4\pi/3 + 2\pi k$



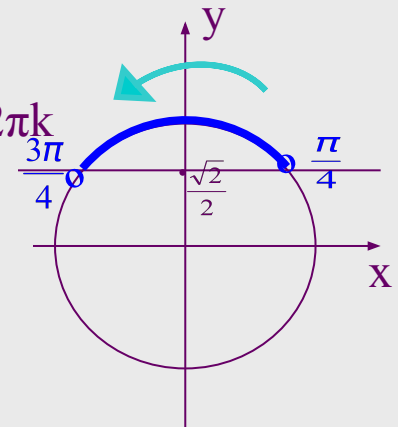
2) $\sin x \geq 0$

$2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k$



4) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\pi/4 + 2\pi k < x < 3\pi/4 + 2\pi k$



Реши уравнения повышенного уровня

1. $\sin 5x = \cos 5x$

2. $\sin^2 x + \cos(\pi/2 - x)\sin(\pi/2 - x) - 2\cos^2 x = 0$

3. $\operatorname{tg}(2\pi + x) + 2\operatorname{tg}(\pi/2 + x) = -1$

Проверь ответы:

1. $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$

2. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$

3. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$

Если неверно

К

↓
слайду 1

К

слайду 1

3

Если верно

К слайду

↓
К

слайду

14

Решение уравнений повышенного уровня

1. $\sin 5x = \cos 5x$ (однородное 1-й степени)

Разделим обе части на $\cos 5x$. Получим:

$$\operatorname{tg} 5x = 1,$$

$$5x = \operatorname{arctg} 1 + \pi k,$$

$$5x = \pi/4 + \pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$$

3. $\operatorname{tg}(2\pi+x) + 2\operatorname{tg}(\pi/2+x) = -1,$

$$\operatorname{tg} x - 2/\operatorname{tg} x = -1.$$

Умножим обе части на $\operatorname{tg} x$,
при условии $\operatorname{tg} x \neq 0$. Получим:

$$\operatorname{tg}^2 x - 2 = -\operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0, \text{ отсюда:}$$

$$\operatorname{tg} x = 1, \operatorname{tg} x = -2.$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$$

2. $\sin^2 x + \cos(\pi/2-x)\sin(\pi/2-x) - 2\cos^2 x = 0$

(однородное 2-й степени).

Упростим левую часть по формулам приведения:

$$\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0.$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0, \text{ отсюда:}$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \text{ и } \operatorname{tg} x = -2$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$$

Дополнительно

1. Реши уравнение: $2\sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=\sqrt{3}$
и найди:

- а) наименьший положительный корень;
- б) корни, принадлежащие промежутку $[0,\pi]$

2. Реши уравнение: $\sin^2 2x - 3 = 2\sin 2x \cos 2x$

Подведение итогов

Итак, мы закончили изучение очень важной темы «Тригонометрические уравнения и неравенства». К этой теме мы вернёмся при изучении следующей главы «Преобразование тригонометрических выражений».

Сегодня на уроке повторили общие формулы решений простейших тригонометрических уравнений, а также частные формулы.

На уроке также были рассмотрены основные виды и способы решения тригонометрических уравнений:

- разложение на множители;
- замена переменной;
- однородные тригонометрические уравнения 1-й и 2-й степени.

Если было что-то непонятно, обратись к учителю.

Источники информации

А.Г. Мордкович. Алгебра и начала анализа. 10 класс. Задачник.