

Тригонометрические уравнения

Методы решений

История тригонометрии

- Тригонометрия – слово греческое и в буквальном переводе означает измерение треугольников (trigwnon - треугольник, а metrew- измеряю)
- Возникновение тригонометрии связано с землемерием, астрономией и строительным делом
- Название науки возникло сравнительно недавно, многие относимые сейчас к тригонометрии понятия и факты были известны ещё две тысячи лет назад
- Впервые способы решения треугольников были найдены древнегреческими астрономами Гиппархом (2 в. до н. э.) и Клавдием Птолемеем (2 в. н. э.)
- Значительный вклад в развитие тригонометрии внесли:
 - ~Аль-Батани
 - ~Абу-ль-Вафа
 - ~Мухамед-бен Мухамед
 - ~Насиреддин Туси Мухамед

Тригонометрические уравнения

- Тригонометрические уравнения - это равенство тригонометрических выражений, содержащих неизвестное(переменную) под знаком тригонометрических функций
- Решить тригонометрическое уравнение, значит, найти все его корни

Уравнения вида \sin

$$x=a$$



- Уравнение $\sin x=a$ имеет решение при a принадлежащем $[-1; 1]$
- Общая формула для решения подобных уравнений:
$$x=(-1)^n \arcsin a + \pi n$$
, где n принадлежит Z и $\arcsin a$ принадлежит $[-\pi/2; \pi/2]$
- Примеры:
 $\sin 2x=0,5$
 $\sin x=-0,3$

Уравнения вида \cos

$$x=a$$



- Уравнение $\cos x = a$ имеет решение при a принадлежащем $[-1; 1]$
- Общая формула для решения подобных уравнений:
 $x = + / - \arccos a + 2\pi n$, где n принадлежит Z и $\arccos a$ принадлежит $[0; \pi]$
- Полезно знать, что $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$
- Примеры
 $\cos 4x = -1$
 $\cos 0,5x = 0$

Уравнения вида $\operatorname{tg} x = a$



- Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решение при всех значениях a
- Общая формула для решения подобных уравнений:
 $x = \operatorname{arctg} a + \Pi n$, где n принадлежит Z
- Полезно помнить, что $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$
- Примеры
 $\operatorname{tg} 7x = 25$
 $\operatorname{tg} x = 0,7$

Уравнения вида ctg

$$x = a$$



- Уравнение $ctg x = a$ имеет решение при всех значениях a
- Общая формула для решения подобных уравнений:
 $x = \text{arcctg } a + \Pi n$, где n принадлежит Z и $\text{arcctg } a$ принадлежит $[0; \Pi]$

Полезно помнить, что $\text{arcctg}(-a) = -\text{arcctg } a$

- Примеры
 $ctg 9x = -0,1$
 $ctg 0,6x = 127$

Метод подстановки

- Уравнения вида $a \sin^2 x + b \sin^4 x + c = 0$, $a \cos^3 x + b \cos x + c = 0$,
 $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg}^4 x + c = 0$, $a \operatorname{ctg}^2 x + b \operatorname{ctg}^4 x + c = 0$ сводятся к одной и той же функции относительно одного и того же выражения, входящего только под знак функции

То есть при замене $\sin x = q$, $\cos x = w$, $\operatorname{tg} x = e$, $\operatorname{ctg} x = r$ получаются алгебраические уравнения:

Уравнения вида $a q^2 + b q^4 + c = 0$, $a w^3 + b w + c = 0$,
 $a e^2 + b e^4 + c = 0$, $a r^2 + b r + c = 0$

После нахождения корней уравнений необходимо вернуться к $\sin x = q$, $\cos x = w$, $\operatorname{tg} x = e$, $\operatorname{ctg} x = r$

не забыв что $\sin x = a$, $\cos x = a$, при a принадлежащем $[-1; 1]$

Однородные уравнения

- Уравнения вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$, $a \sin^2 x + b \cos^2 x + c = 0$ и т.д. называются однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$
- Делением на $\cos^2 x$, где $*$ -степень уравнения, уравнение приводится к алгебраическому относительно функции $\operatorname{tg} x$
- Рассмотрим уравнение $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ и разделим его на $\cos^2 x$, получим: $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$ при $a \neq 0$ оба уравнения равносильны, т.к. $\cos x \neq 0$, если же $\cos x = 0$, то из первого уравнения видно, что $\sin x = 0$, что невозможно т.к. теряет смысл основное тригонометрическое тождество.