Тригонометрические выражения и их преобразования.
9 -класс

МБОУ-ООШ № 25
Подготовила: учитель математики
Оганесян Валентина Ашотовна

Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Чтобы построить всю тригонометрию, законы которой были бы справедливы для любых углов (не только для острых, но и для тупых, положительных и отрицательных углов), необходимо рассмотреть так называемый **единичный круг**, то есть круг, радиус которого равен 1 (рис.3).

Проведём два диаметра: горизонтальный АА’
и вертикальный ВВ’.
Будем отсчитывать углы от точки А (начальная точка).
Отрицательные углы отсчитываются по часовой стрелке,
положительные – против.
Подвижный
радиус ОС образует угол с неподвижным радиусом ОА.
Он может быть расположен в 1-ой четверти (СОА),
во 2-ой четверти (DOA),
в 3-ей четверти (ЕОА) или в 4-ой четверти (FOA).
Считая ОА и ОВ положительными направлениями, а ОА’
и ОВ’ – отрицательными, мы определим
тригонометрические функции следующим образом.

Знаки синуса и косинуса в различных четвертях единичного круга.

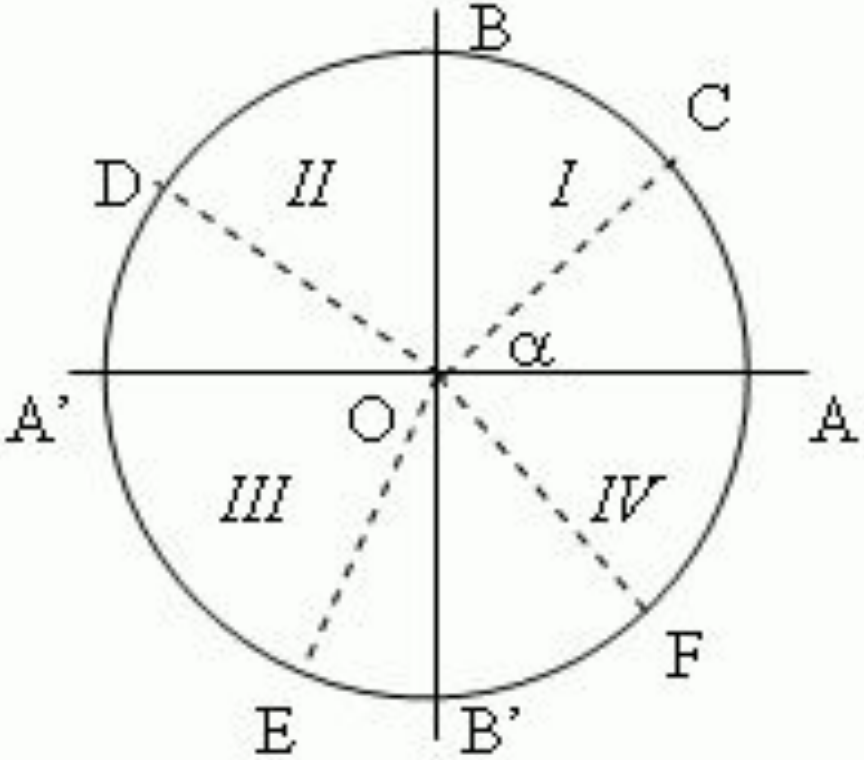

Рис. 3

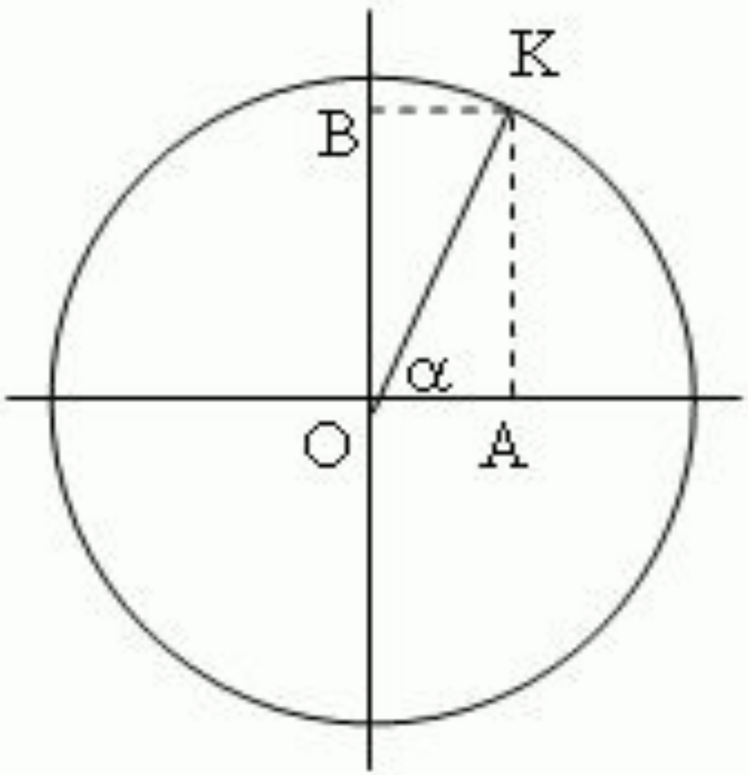

Рис. 4

Линия синуса угла (рис.4) - это вертикальный диаметр единичного круга, линия косинуса угла - горизонтальный диаметр единичного круга. Синус угла (рис.4) – это отрезок ОВ на линиисинуса, то есть проекция подвижного радиуса ОК на линию си нуса; косинус угла - отрезок ОАлинии косинуса, то есть проекция подвижного радиуса ОК на линию косинуса. Знаки синуса и косинуса в различных четвертях единичного круга показаны на рис.5 и рис.6.

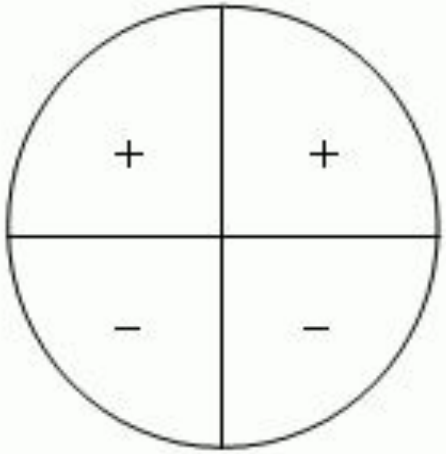

Рис. 5

Знаки синуса и косеканса
в различных четвертях

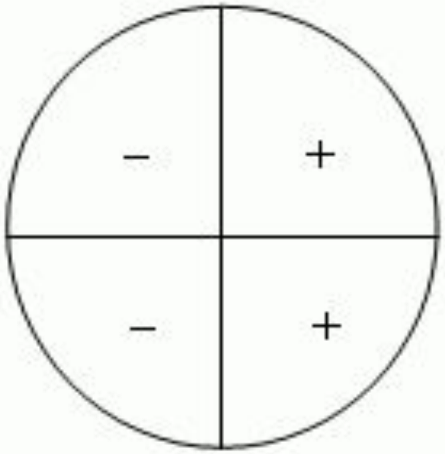

Рис. 6

Знаки косинуса и секанса
в различных четвертях

Знаки синуса и косинуса в различных четвертях единичного круга

Линия тангенса (рис.7) – это касательная к единичному кругу, проведенная через
точку А горизонтального диаметра.
Линия котангенса (рис.8) – это касательная к единичному кругу, проведенная через точку
В вертикального диаметра.
Тангенс – это отрезок линии тангенса между точкой касания А и точкой пересечения (D, E, и т.д., рис.7) линии тангенса и линии радиуса.
Котангенс – это отрезок линии котангенса между точкой касания В и точкой пересечения (P, Q, и т.д., рис.8) линии котангенса и линии радиуса.

Знаки тангенса и котангенса в различных четвертях единичного круга показаны на рис.9.

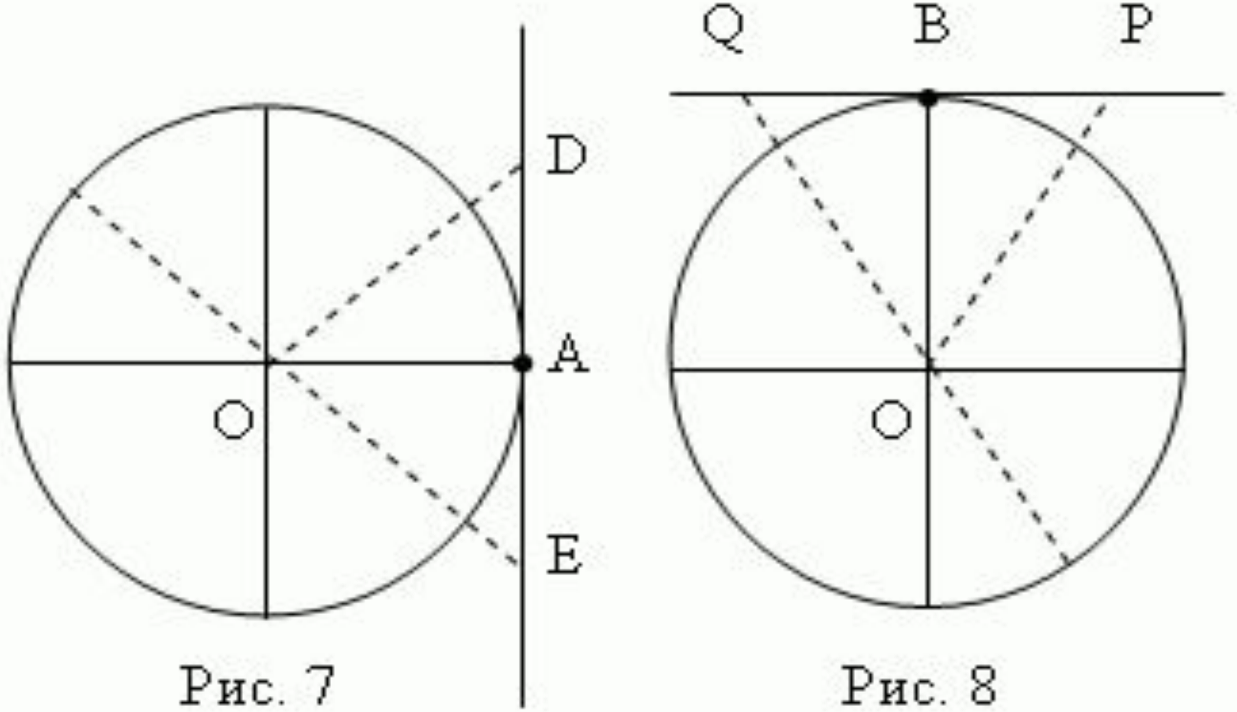

Рис. 7 Рис. 8 Рис. 9

Тригонометрические функции острого угла

- ***Тригонометрические функции*** острого угла есть отношения различных пар сторон прямоугольного треугольника (рис.2):

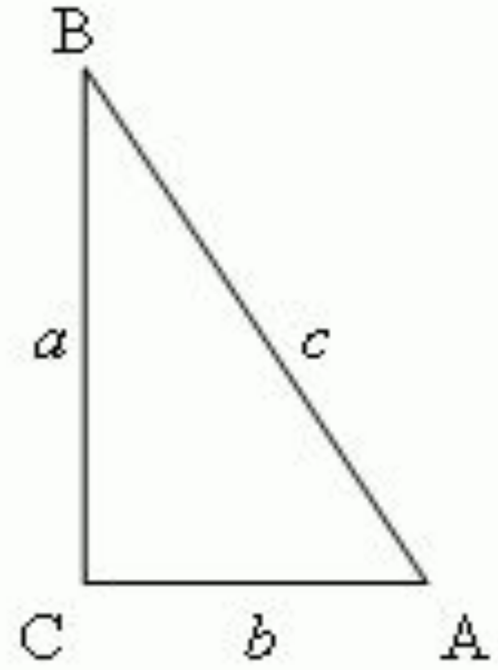

Рис. 2

Тригонометрические функции острого угла:

синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс.

- 1) Синус - отношение противолежащего катета к гипотенузе: sin A = a / c .
- 2) Косинус - отношение прилежащего катета к гипотенузе: cos A = b / c .
- 3) Тангенс - отношение противолежащего катета к прилежащему: tan A = a / b .
- 4) Котангенс - отношение прилежащего катета к противолежащему: cot A = b / a .
- 5) Секанс - отношение гипотенузы к прилежащему катету: sec A = c / b .
- 6) Косеканс - отношение гипотенузы к противолежащему катету: cosec A = c / a .

Прямоугольный треугольник ABC (рис.2) имеет катеты: a = 4, b = 3. Найти синус, косинус и тангенс угла A.

- Р е ш е н и е . Во-первых, найдём гипотенузу, используя теорему Пифагора:

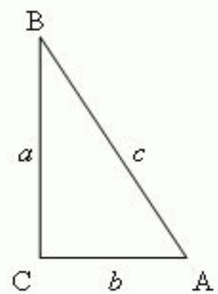

Рис. 2

c 2 … 2 откуда следует: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$

Согласно вышеприведенным формулам имеем:

- sin A = a / c = 4 / 5; cos A = b / c = 3 / 5; tan A = a / b = 4 / 3.

Для некоторых углов можно записать точные значения их тригонометрических функций.
Наиболее важные случаи приведены в таблице:

A	sin A	cos A	tan A	cot A	sec A	cosec A
0°	0	1	0	∞	1	∞
30 °	1 / 2	$\sqrt{3}$ / 2	1 / $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2 / $\sqrt{3}$	2
45°	$\sqrt{2}$ / 2	$\sqrt{2}$ / 2	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\sqrt{3}$ / 2	1 / 2	$\sqrt{3}$	1 / $\sqrt{3}$	2	2 / $\sqrt{3}$
90°	1	0	∞	0	∞	1

∞
€

Углы 0° и 90°, строго говоря,

- не являются острыми в прямоугольном треугольнике, однако при расширении понятия тригонометрических функций эти углы также рассматриваются.
- Символ   в таблице означает, что абсолютное значение функции неограниченно возрастает, если угол приближается к указанному значению.

Решение прямоугольных треугольников
По двум сторонам. По стороне и острому углу.

1. **По двум сторонам.** Если заданы две стороны прямоугольного треугольника, то третья сторона вычисляется по теореме Пифагора.
2. Острые углы могут быть определены по одной из трёх первых формул для тригонометрических функций в зависимости от того, какие стороны известны. Например, если заданы катеты a и b , то угол A определяется по формуле:

$$\tan A = a / b .$$

П р и м е р 1.Катет *a* = 0.324, гипотенуза *c* = 0.544. Найти второй катет *b* и углы A и B.

- Р е ш е н и е .Катет *b* равен:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{0.544^2 - 0.324^2} \approx 0.437.$$

Углы: $\sin A = a / c = 0.324 / 0.544 \approx 0.5956$, что соответствует $A \approx 36°.5546 \approx 36°33'17''$. Отсюда, $B = 90° - A \approx 53°26'43''$.

П р и м е р 2. Даны два катета: *a* = 7.2 см, *b* = 6.4 см. Найти гипотенузу и углы A и B.

- Р е ш е н и е .Гипотенуза *c* равна:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7.2^2 + 6.4^2} \approx 9.6 \text{ см.}$$

Углы: $\sin A = a / c = 7.2 / 9.6 \approx 0.75$, что соответствует $A \approx 48°.59 \approx 48°35'25''$. Отсюда, $B = 90° - A \approx 41°24'35''$.

По стороне и острому углу.

- . Если задан один острый угол А, то другой острый угол В находится из равенства:
- В = 90° - А. Стороны находятся по формулам тригонометрических функций, переписанных в виде:

$$a = c \sin A, \quad b = c \cos A, \quad a = b \tan A,$$

$$b = c \sin B, \quad a = c \cos B, \quad b = a \tan B.$$

- Остаётся выбрать те формулы, которые содержат заданную или уже найденную сторону.

П р и м е р . Дано: гипотенуза $c = 13.65$ м и острый угол $A = 54°17'$.

Найти другой острый угол B и катеты a и b .

Р е ш е н и е. Угол $B = 90° - A \approx 90° - 54°17' \approx 35°43'$.

Катеты: $a = c \sin A = 13.65 \cdot \sin 54°17' \approx 11.08$ м;

$b = c \cos A = 13.65 \cdot \cos 54°17' \approx 7.97$ м.

Радианное и градусное измерение углов

Градусная мера.

Здесь единицей измерения является *градус* (обозначение °) – это поворот луча на 1 / 360 часть одного полного оборота. Таким образом, полный оборот луча равен 360°. Один градус состоит из 60 *минут* (их обозначение ‘); одна минута – соответственно из 60 *секунд* (обозначаются “).

Радианная мера .

Как мы знаем из планиметрии длина дуги l, радиус r и соответствующий центральный угол a связаны соотношением:

$$a = l / r .$$

Эта формула лежит в основе определения радианной меры измерения углов. Так, если $l = r$, то a = 1, и мы говорим, что угол равен 1 радиану, что обозначается: a = 1 *рад*. Таким образом, мы имеем следующее определение радианной меры измерения:

-

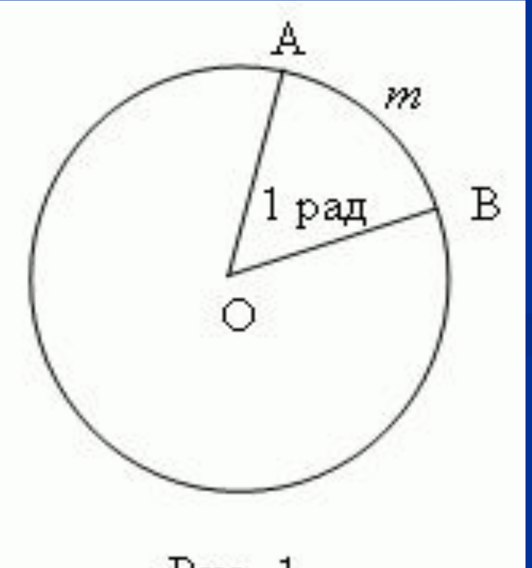

Рис. 1

Следуя этой формуле, длину окружности *C* и её радиус *r* можно выразить следующим образом:

$$2 = C / r .$$

- Так, полный оборот, равный 360° в градусном измерении, соответствует 2 в радианном измерении. Откуда мы получаем значение одного радиана, и обратно:

$$1 \text{ рад} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ,2958 \approx 57^\circ 17' 45'' .$$

Полезно помнить следующую сравнительную таблицу значений наиболее часто встречающихся углов в градусах и радианах:

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} \approx 0.017453 \text{ рад}.$$

Углы в градусах	360°	180°	90°	60°	45°	30°
Углы в радианах	2π	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла. Эти формулы являются основными тригонометрическими тождествами.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;　　$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$;

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$\sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1$;　　$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$;

$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$;　　$\operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$;

$\cos^2\alpha = 1 / (1 + \tan^2\alpha) = \cot^2\alpha / (1 + \cot^2\alpha)$;

$\sin^2\alpha = 1 / (1 + \cot^2\alpha) = \tan^2\alpha / (1 + \tan^2\alpha)$.

п-33. Формулы приведения

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

п-33. Формулы приведения

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta};$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta};$$

$$\cot(\alpha+\beta)=-\frac{1-\cot\alpha\cot\beta}{\cot\alpha+\cot\beta};$$

$$\cot(\alpha-\beta)=-\frac{1+\cot\alpha\cot\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}.$$

п-33. Формулы приведения

- Эти формулы позволяют:
- 1) найти численные значения тригонометрических функций углов, бо’льших 90°;
- 2) выполнить преобразования, приводящие к более простым выражениям;
- 3) избавиться от отрицательных углов и углов, бо’льших 360°.

	sin	cos	tan	cot
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$90^\circ-\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\cot\alpha$	$+\tan\alpha$
$90^\circ+\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$180^\circ-\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$180^\circ+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\tan\alpha$	$+\cot\alpha$
$270^\circ-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cot\alpha$	$+\tan\alpha$
$270^\circ+\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$360^\circ k-\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$360^\circ k+\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\tan\alpha$	$+\cot\alpha$

п 34. Формулы сложения и вычитания

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

п 34. Формулы сложения и вычитания

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta};$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta};$$

$$\cot(\alpha+\beta) = -\frac{1 - \cot\alpha\cot\beta}{\cot\alpha + \cot\beta};$$

$$\cot(\alpha-\beta) = -\frac{1 + \cot\alpha\cot\beta}{\cot\alpha - \cot\beta}.$$

Основные соотношения между элементами треугольника.

- Теорема косинусов. Теорема синусов. Теорема тангенсов.
- Формулы площади, формула Герона.
- Радиусы описанного и вписанного кругов

Обозначения: a, b, c – стороны;

A, B, C – углы; p = (a + b + c) / 2 - полупериметр; h –высота;

S – площадь; R – радиус описанного круга;

r – радиус вписанного круга.

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \quad \text{or} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Теорема тангенсов:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}} = \frac{\cot\frac{C}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}.$$

Формулы площади, формула Герона:

$$S = \frac{bc \cdot \sin A}{2} = \frac{b^2 \cdot \sin A \cdot \sin C}{2 \sin B} = \frac{h^2 \cdot \sin B}{2 \sin A \cdot \sin C};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{- формула Герона;}$$

$$S = r^2 \cdot \cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} \cdot \cot\frac{C}{2} = p^2 \cdot \tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2};$$

$$S = p(p-a) \cdot \tan\frac{A}{2};$$

Радиусы описанного и вписанного кругов:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{abc}{4S} = \frac{p}{4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}};$$

$$r = \frac{S}{p} = (p-a)\cdot\tan\frac{A}{2} = \frac{a\cdot\sin B/2\cdot\sin C/2}{\cos A/2} = 4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}.$$

Решение косоугольных треугольников.

- Заданы три стороны a, b, c. Найти углы A, B, C.
- По теореме косинусов находим один из углов:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

второй угол находим по теореме синусов:

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a};$$

третий угол находится по формуле:

$C = 180° – (A + B)$.

П р и м е р . **Заданы три стороны треугольника: *a* = 2, *b* = 3, *c* = 4. Найти его углы.**

$$\cos A = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8} \implies A \approx 28^\circ.955;$$

$$\sin A \approx 0.484, \text{ тогда } \sin B = \frac{3 \cdot 0.484}{2} = 0.726, \text{ и } B \approx 46^\circ.552;$$

$$C = 180^\circ - (28^\circ.955 + 46^\circ.552) = 104^\circ.493.$$

Дано: две стороны a и b и угол C между ними. Найти сторону c и углы A и B. По теореме косинусов находим сторону c :

- $c\,2 \;=\; a\,2 + \; b\,2 - 2\,ab \cdot \cos C$;
- а затем по теореме синусов – угол A :

$$\sin A = \frac{a \cdot \sin C}{c};$$

- здесь необходимо подчеркнуть, что A – острый угол, если $b\,/\,a > \cos C$, и тупой угол, если $b\,/\,a < \cos C$. Третий угол $B = 180°$ - $(\,A + C\,)$.

Заданы любые два угла и сторона.
Найти третий угол и две другие стороны.
Очевидно, что третий угол вычисляется по формуле:

$$A+B+C=180^\circ,$$

и тогда используя теорему синусов, мы найдём две другие

стороны.

- Даны две стороны a и b и угол B, противоположный одной из них. Найти сторону c и углы A и C.
- Сначала по теореме синусов найдём угол A:

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b}.$$

Здесь возможны следующие случаи:

- 1) $a > b$; $a \cdot \sin B > b$ – здесь решения нет;
- 2) $a > b$; $a \cdot \sin B = b$ – здесь одно решение, A – прямой угол;
- 3) $a > b$; $a \cdot \sin B < b < a$ – здесь два решения: A может быть либо острым, либо тупым углом;
- 4) $a \quad b$ – здесь одно решение, A – острый угол.

После нахождения угла A, найдём третий угол:

- $C = 180° - (A + B)$. Если A может иметь два значения, то и C может иметь два значения. Теперь по теореме синусов можно найти третью сторону:

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B}.$$

Если угол C имеет два значения,

то и сторона c имеет два значения, следовательно, заданным условиям удовлетворяют два различных треугольника.

Дано: $a = 5,\ b = 3,\ B = 30°.$

Найти сторону c и углы A и C.

Р е ш е н и е

- Здесь: $a > b$ и $a \sin B < b$. (Проверьте, пожалуйста!).
- Тогда согласно случаю 3 здесь возможны два решения:

$$\sin A = \frac{a \cdot \sin B}{b} = \frac{5 \cdot \sin 30^\circ}{3} = \frac{5 \cdot 0.5}{3} = \frac{5}{6},$$

откуда первое значение: $A \approx 56^\circ.443$, а второе: $A \approx 123^\circ.557$. Два соответствующих значения угла C : первое - $C \approx 93^\circ.557$ и второе - $C \approx 26^\circ.443$.

Сторона c вычисляется как:

1-е решение:

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} \approx \frac{3 \cdot \sin 93^\circ.557}{\sin 30^\circ} \approx \frac{3 \cdot 0.998}{0.5} \approx 5.988;$$

2-е решение:

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} \approx \frac{3 \cdot \sin 26^\circ.443}{\sin 30^\circ} \approx \frac{3 \cdot 0.445}{0.5} \approx 2.672.$$