

Тригонометрия

Автор:

учитель математики

Комлякова Ксения Геннадьевна

ГБОУ Гимназия №105,

г. Санкт-Петербург



«Приобретать знания – храбрость,
приумножать их – мудрость, а умело
применять – великое искусство»

(восточная мудрость)

I. Простейшие тригонометрические уравнения.

$$\cos x = \alpha$$

Если $|\alpha| \leq 1$, то

$$x = \pm \arccos \alpha + 2\pi n, n \in Z.$$

$$\sin x = \alpha$$

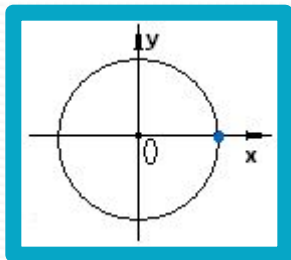
Если $|\alpha| \leq 1$, то

$$x = (-1)^n \arcsin \alpha + \pi n, n \in Z$$

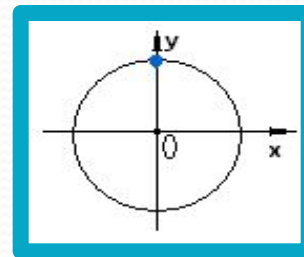
Если $|\alpha| > 1$, то решений нет

Особые случаи:

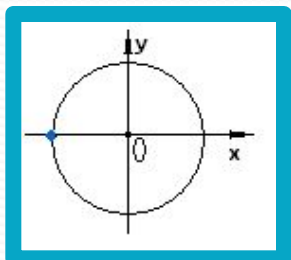
$$\cos x = 1; x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$



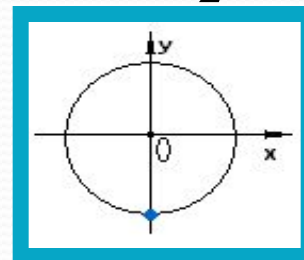
$$\sin x = 1; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$



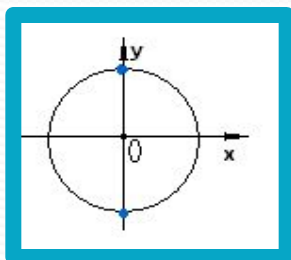
$$\cos x = -1; x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$



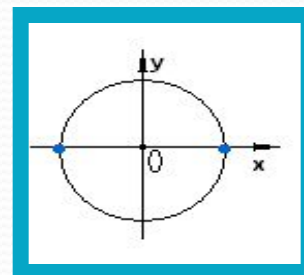
$$\sin x = -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$



$$\cos x = 0; x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



$$\sin x = 0; x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



Уравнения вида

$$\operatorname{tg} x = a$$

$$x = \operatorname{arctg} \alpha + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Нужно помнить, что при $a \in \mathbb{R}$:

$$0 < \operatorname{arctg} \alpha < \pi; \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} \alpha) = \alpha;$$

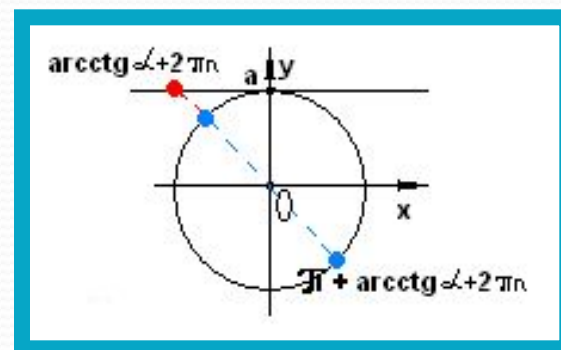
$$\operatorname{arctg}(-\alpha) = \pi - \operatorname{arctg} \alpha;$$

$$\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a.$$

$$\operatorname{ctg} x = a$$

$$x = \operatorname{arctg} \alpha + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arctg}(-\alpha) = -\operatorname{arctg} \alpha.$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \alpha) = \alpha;$$

Укажите общую формулу, по которой находятся все корни уравнения

1 вариант

	1	2
	$\cos x = -1/2$	$\sin x = -1/2$
А	$x = \pm \arccos(-1/2) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = (-1/2)^n + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Б	$x = \pm \arccos 1/2 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$	$x = \pm \arcsin(-1/2) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
В	Корней нет	$x = (-1)^{n+1} \arcsin 1/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Г	$x = \pm 2\pi/3 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$	Корней нет
Д	$x = \pi - \arccos(-1/2) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = -\pi/6 + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$

2 вариант

	1	2
	$\cos x = -1/3$	$\sin x = -1/4$
А	$x = \pi - \arccos 1/3 + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$	$x = (-1)^{n+1} \arcsin 1/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Б	$x = \pm \arccos 1/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = -\arcsin(-1/4) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
В	$x = \pm \arccos(-1/3) + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$	$x = (-1)^n \arcsin(-1/4) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Г	$x = \pm 2\pi/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = (-1/4)^n + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Д	$x = -\arccos(-1/3) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = -\pi/4 + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$

Типы тригонометрических уравнений

Простейшие тригонометрические уравнения	1) $\sqrt{2} \cos x + 1 = 0$ 2) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$
Уравнения, приводимые к квадратным	3) $5 \cos^2 x + 6 \sin x - 6 = 0$
Однородные тригонометрические уравнения	4) $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$ 5) $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{3} \cos \frac{x}{2}$

Примеры решения тригонометрических уравнений

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$y = \sin x$$


$$2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$


$$\sin 2x + \sin x = 0$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$2 \sin x \cos x + \sin x = 0$$

$$\sin x (2 \cos x + 1) = 0$$


$$4 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x = 1$$

$$\operatorname{ctg} x = 1 / \operatorname{tg} x$$


$$\sin^2 x - 6\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 0$$

$$:\cos^2 x$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 6 \operatorname{tg} x + 5 = 0$$

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3}$$

Один из способов решения такого уравнения состоит в том, что левую часть уравнения можно преобразовать по формуле:

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi), \text{ где}$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$



- $2\cos 3x + 4 \sin(x/2) = 7$

- Укажите число корней уравнения на промежутке $[0; 2\pi]$:

- $\sin x = \frac{1}{3}$

Для решения задач повышенной сложности в алгебре используются нестандартные методы решения.

Один из таких методов – метод МАЖОРАНТ.

Уметь решать задачи методом мажорант важно для более глубинного познания математики.

Очень удобно применять метод МАЖОРАНТ при решении нестандартных уравнений, в левой и правой частях которых, находятся функции, имеющие различную природу.

Метод МАЖОРАНТ часто называют методом математической оценки или методом «mini-max»

Термин «*мажоранта*» происходит от французского слова «*majorante*», от «*majorer*» — объявлять большим.

Мажорантой функции $f(x)$ на множестве P называется такое **число** M , что либо $f(x) \leq M$ для всех $x \in P$, либо $f(x) \geq M$ для всех $x \in P$.

Многие известные нам функции имеют мажоранты.

Функции, имеющие мажоранты

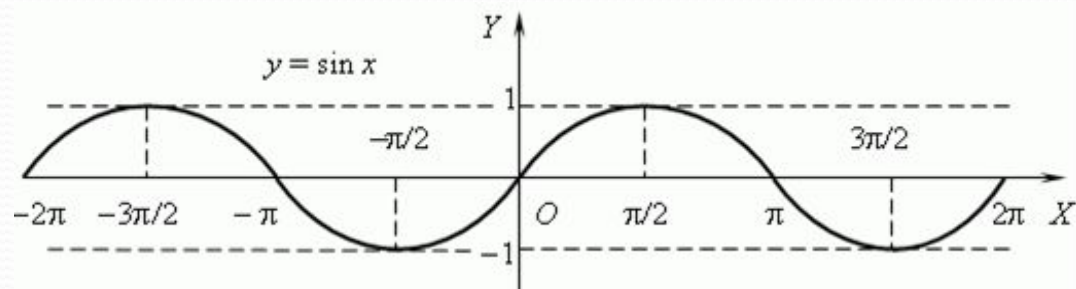
тригонометрические функции

Пример 1:

$$f(x) = \sin x.$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

$$M = -1, M = 1$$

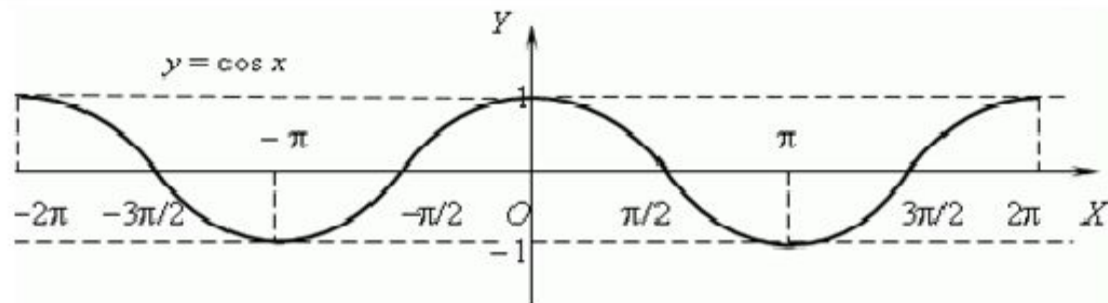


Пример 2:

$$f(x) = \cos x$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1.$$

$$M = -1, M = 1$$

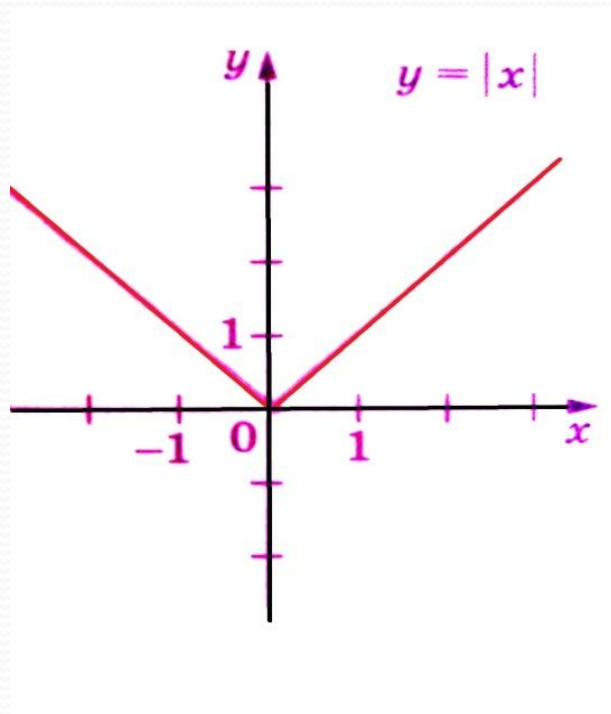


Функции, имеющие мажоранты

пример 4: $f(x) = |x|$

по определению $|x| \geq 0$

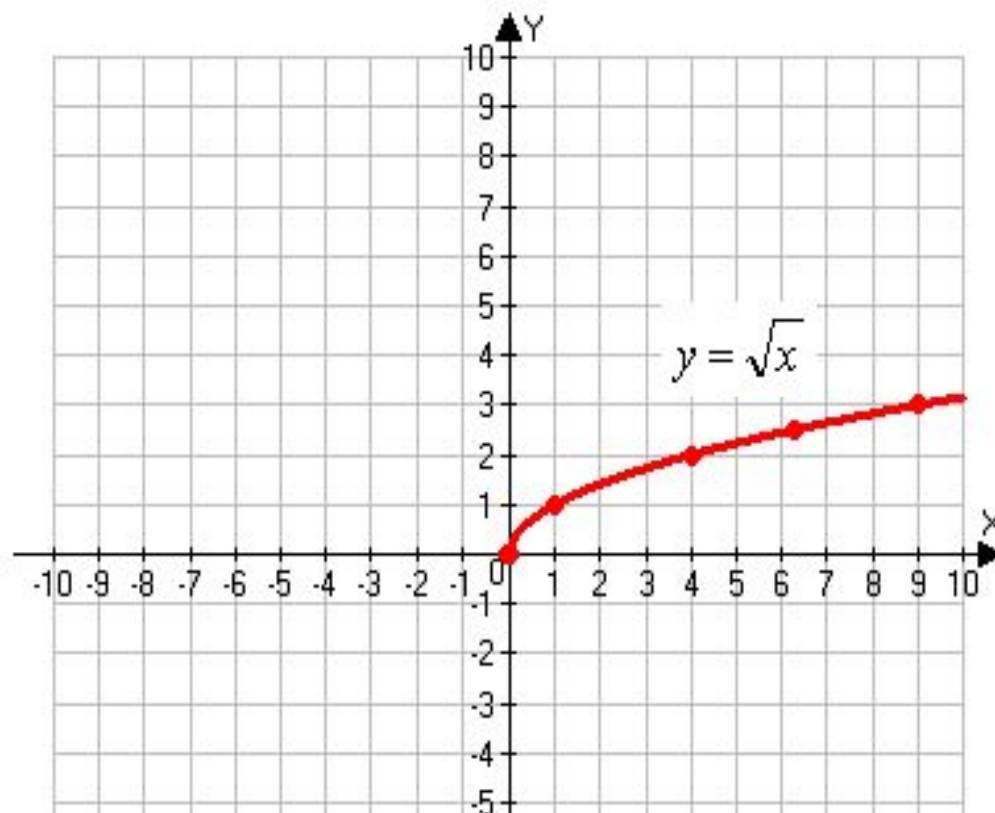
$M = 0$



Функции имеющие мажоранты

Пример 5. $y = \sqrt{f(x)} \geq 0$

$M=0$



2. Метод мажорант

Пусть мы имеем уравнение $f(x) = g(x)$

и существует такое число M , что для любого x из области определения функций $f(x)$ и $g(x)$

Имеем: $f(x) \leq M$ и $g(x) \geq M$ (или наоборот)

Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$$

$$\sqrt{16 - (4x + 5)^2} = 4 + \cos^2 \frac{2\pi x}{5}$$

Оценим левую и правую части уравнения:

$$(4x + 5)^2 \geq 0$$

$$0 \leq \cos^2 \frac{2\pi x}{5} \leq 1$$

$$-(4x + 5)^2 \leq 0$$

$$4 \leq 4 + \cos^2 \frac{2\pi x}{5} \leq 5$$

$$16 - (4x + 5)^2 \leq 16$$

$$\sqrt{16 - (4x + 5)^2} \leq 4$$

Равенство будет выполняться, если обе части = 4.

$$\begin{cases} \sqrt{16 - (4x + 5)^2} = 4 \\ 4 + \cos^2 \frac{2\pi x}{5} = 4 \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$\sqrt{16 - (4x + 5)^2} = 4$$

$$16 - (4x + 5)^2 = 16$$

$$-(4x + 5)^2 = 0$$

$$4x + 5 = 0$$

$$x = -\frac{5}{4}$$

Проверим, является ли найденное число корнем второго уравнения системы:

$$4 + \cos^2 \frac{2\pi \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)}{5} = 4$$

$$4 + \cos^2 \left(\frac{-5 \cdot \pi}{2 \cdot 5} \right) = 4$$

$$4 + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 4$$

$$4 + 0 = 4$$

$$4 = 4 \quad - \text{верно}$$

Ответ:

$$x = -\frac{5}{4}$$



**«*Уравнение* — это золотой ключ,
открывающий все математические
сезамы»**

(С. Коваль)