Тройной интеграл

Лекция 9

Трехмерная область

Пусть в пространстве задана некоторая область *V*, ограниченная замкнутой поверхностью *G*. Пусть в области *V* и на её границе определена некоторая непрерывная функция $u=f(x,y,z)$, где (x,y,z) – прямоугольные декартовы координаты точки области. Например, если $f(x,y,z)\geq 0$, то эту функцию можно считать плотностью распределения некоторого вещества в области *V*.

Составление интегральных сумм

Разобьём эту область *V* произвольным образом на элементарные ячейки Δv_i с объёмами Δv_i (*i*=1, 2, …, *n*). В каждой такой ячейке выберем произвольную точку *Mi*, вычислим значения функции в этих точках и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i .$$

Определение

Назовём диаметром области максимальное расстояние между двумя точками области, лежащими на границе. Устремим максимальный диаметр ячеек к нулю и перейдём к пределу в интегральных суммах .

Определение

Если существует конечный предел интегральных сумм при условии, что максимальный диаметр ячеек стремится к нулю, не зависящий ни от разбиения области V на элементарные ячейки, ни от выбора точек *Mi*, то этот предел называется тройным интегралом по области *V* от функции *f(x,y,z)* и обозначается $\iiint\limits_{v} f(x,y,z)dv.$

Правильная трехмерная область

Пусть пространственная область V, ограниченная замкнутой поверхностью G, удовлетворяет условиям:

1) всякая прямая, параллельная оси Oz, проведённая через внутреннюю точку области V, пересекает поверхность G в двух точках;

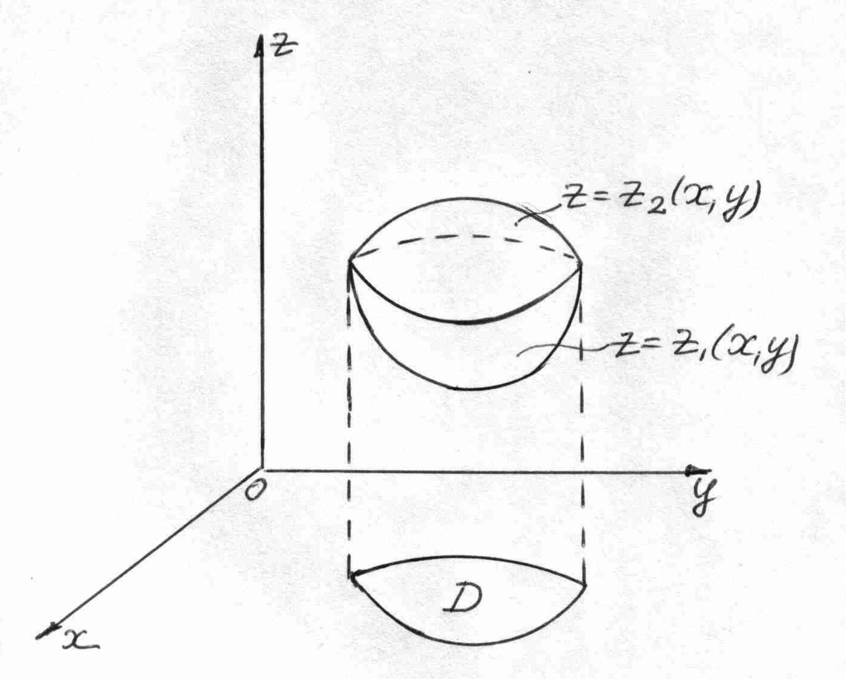
2) вся область V проектируется на плоскость Oxy в правильную область D.

Тогда область V мы будем называть правильной трёхмерной областью.

Вычисление тройного интеграла

Если область имеет вид как на рисунке, то тройной интеграл по такой области вычисляют по формуле

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz$$



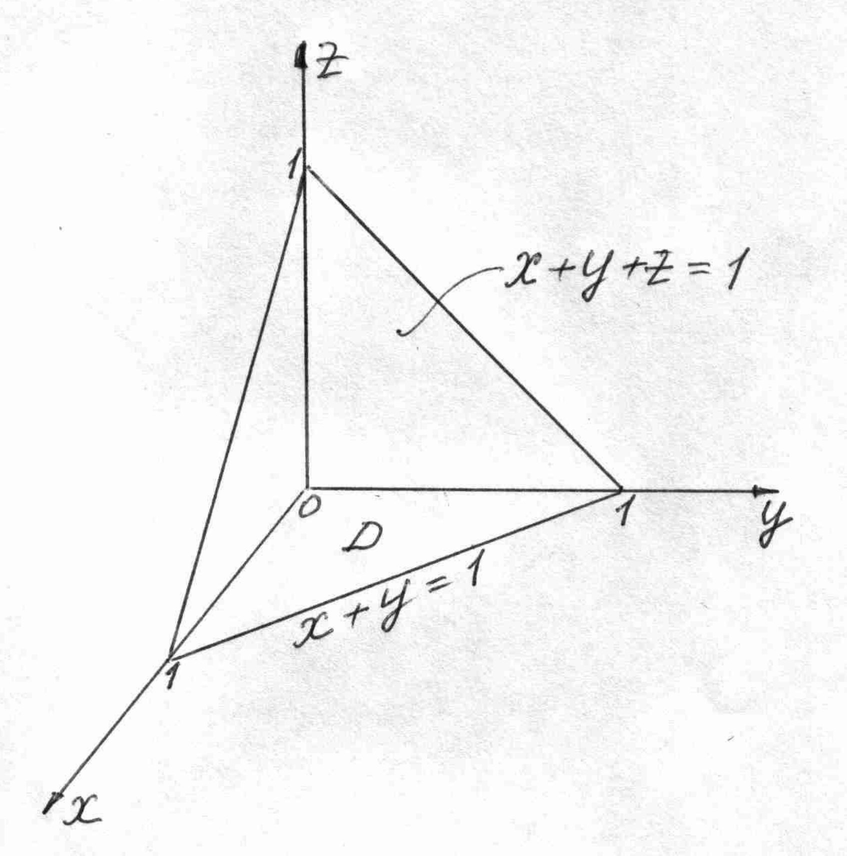
Вычисление тройного интеграла

Пример 1.
Вычислить $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$,

где *V* ограничена плоскостями

$x+y+z=1,$

x=0, y=0, z=0.



Решение.

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{d(x+y+z+1)}{(1+x+y+z)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\Bigg|_0^{1-x-y} dxdy = -\frac{1}{2}\iint\limits_D \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\right) dxdy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\right) dy = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{y}{4} + \frac{1}{1+x+y}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1-x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right)dx=$$

$$\left(=\frac{1}{8}\cdot\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\ln(1+x)\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах

При переходе от декартовых координат к цилиндрическим по формулам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$ тройной интеграл по области V преобразуется к виду

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rd\varphi drdz,$$

где $rd\varphi drdz$ - это элемент объёма dv в цилиндрических координатах.

Объем тела

В декартовых координатах объем тела равен

$$V = \iiint\limits_V dxdydz$$

Объем тела

Общая формула для вычисления объема (независимо от системы координат) имеет вид

$$V = \iiint\limits_{V} dv$$

Объем тела

Объём пространственной области *V* в цилиндрических координатах

$$V = \iiint\limits_V r\,d\varphi\,dr\,dz$$

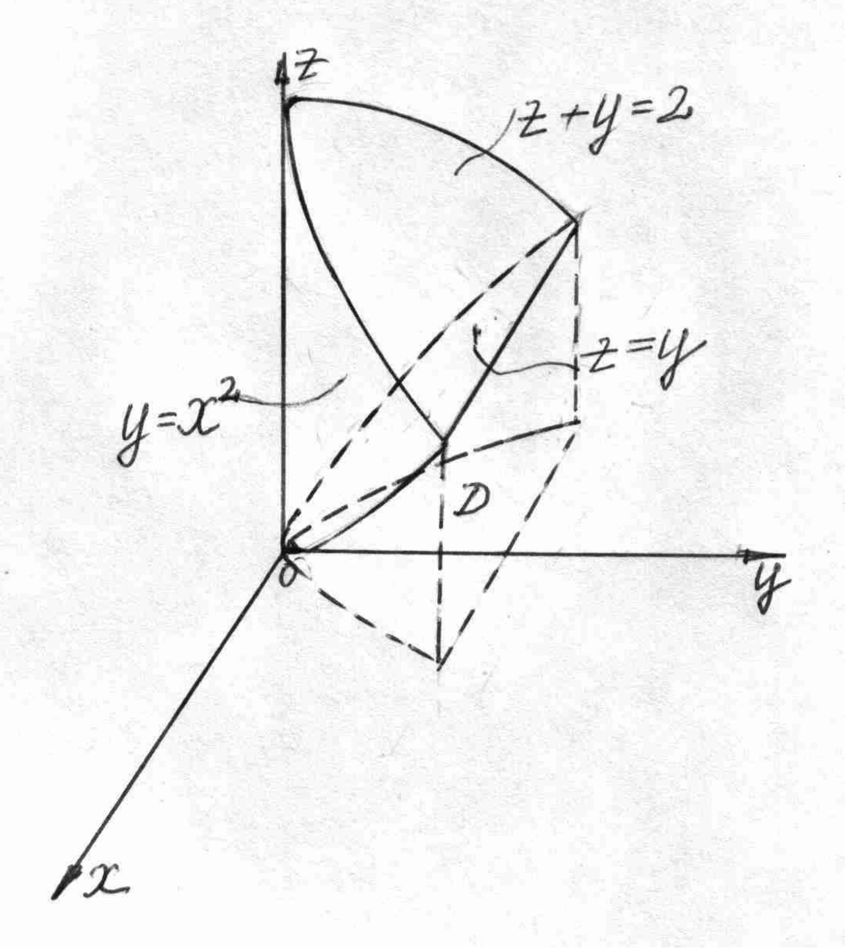
Найти объем тела

Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$y = x^2,$$

$$z = y,$$

$$z + y = 2.$$



Решение

Найдём линию пересечения плоскостей, ограничивающих тело сверху и снизу. Очевидно, это *y*=1.

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_y^{2-y}dz=\iint\limits_D z\Big|_y^{2-y}dxdy=\iint\limits_D(2-2y)dxdy=$$

$$=2\int\limits_0^1(1-y)dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dx=2\int\limits_0^1(1-y)\cdot x\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dy=2\int\limits_0^1(1-y)\cdot2\sqrt{y}dy=$$

$$= 4\int_0^1 \left(\sqrt{y} - \sqrt{y^3}\right) dy = 4\left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{16}{15}.$$

Найти объем тела

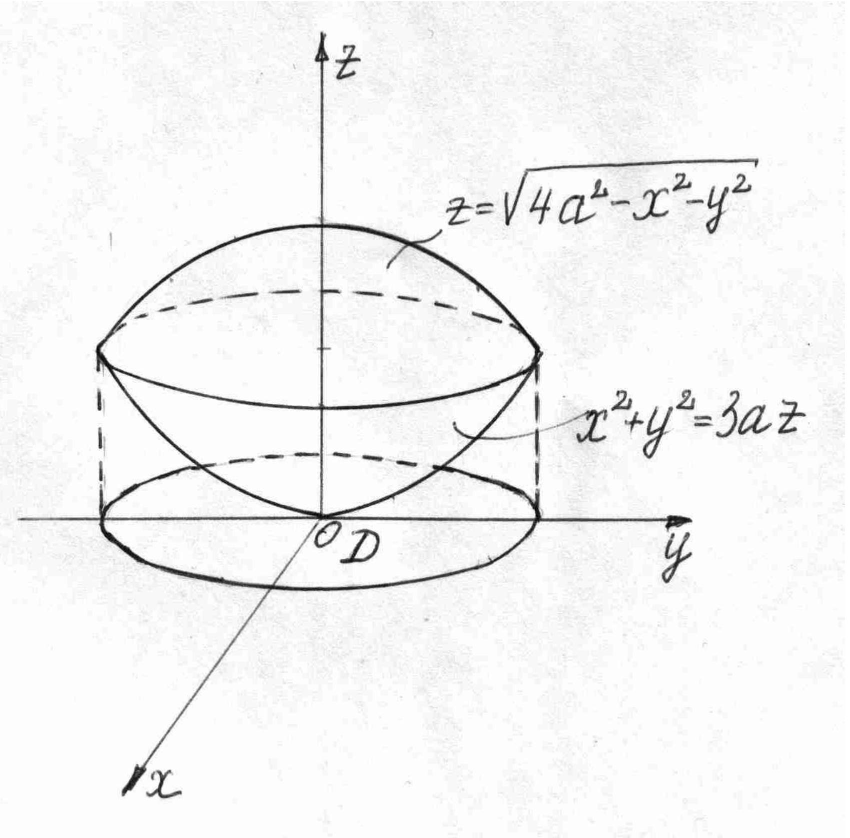
Вычислить объём тела, ограниченного сферой

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$

и параболоидом

$$x^2 + y^2 = 3az$$

(внутри параболоида).



Решение

Вычислим объём тела, переходя к цилиндрическим координатам. Для этого запишем уравнения поверхностей в цилиндрических координатах:

$r^2 + z^2 = 4a^2,\ 3az = r^2$. Очевидно, поверхности пересекаются при $z = a$.

Вычислим теперь объём тела.

Подставляя z= a в одно из уравнений системы, получим $r = a\sqrt{3}$.

$$V = \iiint\limits_V r\,d\varphi\,dr\,dz = \iint\limits_D r\,d\varphi\,dr \int\limits_{\frac{r^2}{3a}}^{\sqrt{4a^2-r^2}} dz = \iint\limits_D z\Big|_{\frac{r^2}{3a}}^{\sqrt{4a^2-r^2}} r\,d\varphi\,dr =$$

$$= \iint\limits_D \left(\sqrt{4a^2-r^2}-\frac{r^2}{3a}\right) r\,d\varphi\,dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{3}} \left(r\sqrt{4a^2-r^2}-\frac{r^2}{3a}\right) dr =$$

$$=2\pi\left(-\frac{1}{2}\int_0^{a\sqrt{3}}\sqrt{4a^2-r^2}\,d\left(4a^2-r^2\right)-\int_0^{a\sqrt{3}}\frac{r^3}{3a}dr\right)=$$

$$=\left(-\frac{2\pi}{3}\cdot\left(4a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2\pi\ \ r^4}{3\cdot 4a}\right)\Bigg|_0^{a\sqrt{3}}=-\frac{2\pi}{3}\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2\pi}{3}\left(4a^2\right)^{\frac{3}{2}}-$$

$$-\frac{\left(a\sqrt{3}\right)^4\cdot 2\pi}{3\cdot 4a}=\frac{16\pi}{3}a^3-\frac{2\pi}{3}a^3-\frac{3\pi}{2}a^3=\frac{19}{6}\pi a^3.$$