

Тройной интеграл

Лекция 9

Трёхмерная область

Пусть в пространстве задана некоторая область V , ограниченная замкнутой поверхностью G . Пусть в области V и на её границе определена некоторая непрерывная функция $u=f(x,y,z)$, где (x,y,z) – прямоугольные декартовы координаты точки области. Например, если $f(x,y,z) \geq 0$, то эту функцию можно считать плотностью распределения некоторого вещества в области V .

Составление интегральных сумм

Разобьём эту область V произвольным образом на элементарные ячейки Δv_i с объёмами Δv_i ($i=1, 2, \dots, n$). В каждой такой ячейке выберем произвольную точку M_i , вычислим значения функции в этих точках и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta v_i.$$

Определение

Назовём диаметром области максимальное расстояние между двумя точками области, лежащими на границе. Устремим максимальный диаметр ячеек к нулю и перейдём к пределу в интегральных суммах .

Определение

Если существует конечный предел интегральных сумм при условии, что максимальный диаметр ячеек стремится к нулю, не зависящий ни от разбиения области V на элементарные ячейки, ни от выбора точек M_i , то этот предел называется тройным интегралом по области V от функции $f(x, y, z)$ и обозначается $\iiint_V f(x, y, z) dv$.

Правильная трехмерная область

Пусть пространственная область V , ограниченная замкнутой поверхностью G , удовлетворяет условиям:

1) всякая прямая, параллельная оси Oz , проведённая через внутреннюю точку области V , пересекает поверхность G в двух точках;

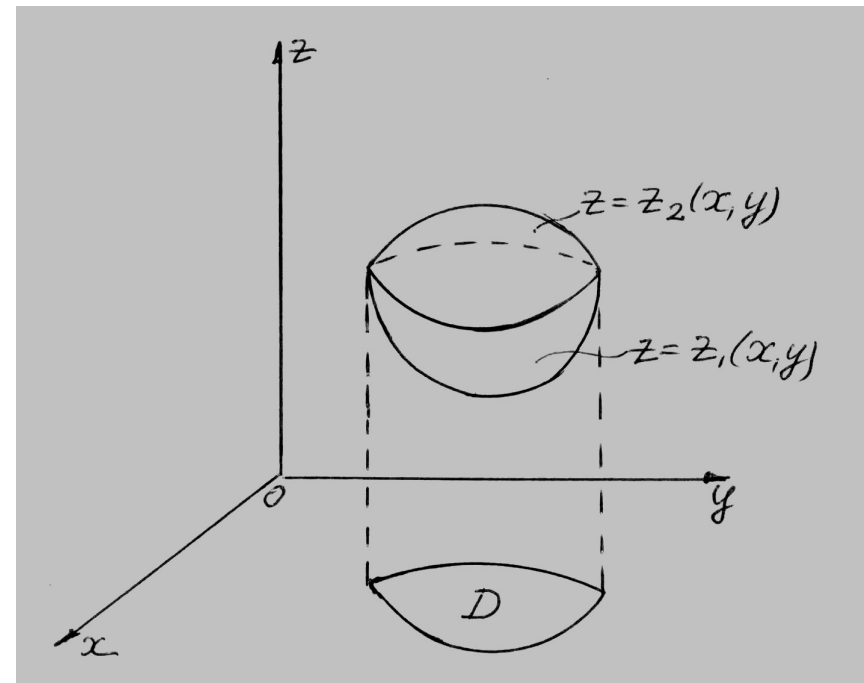
2) вся область V проектируется на плоскость Oxy в правильную область D .

Тогда область V мы будем называть правильной трёхмерной областью.

Вычисление тройного интеграла

Если область имеет вид как на рисунке, то тройной интеграл по такой области вычисляют по формуле

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

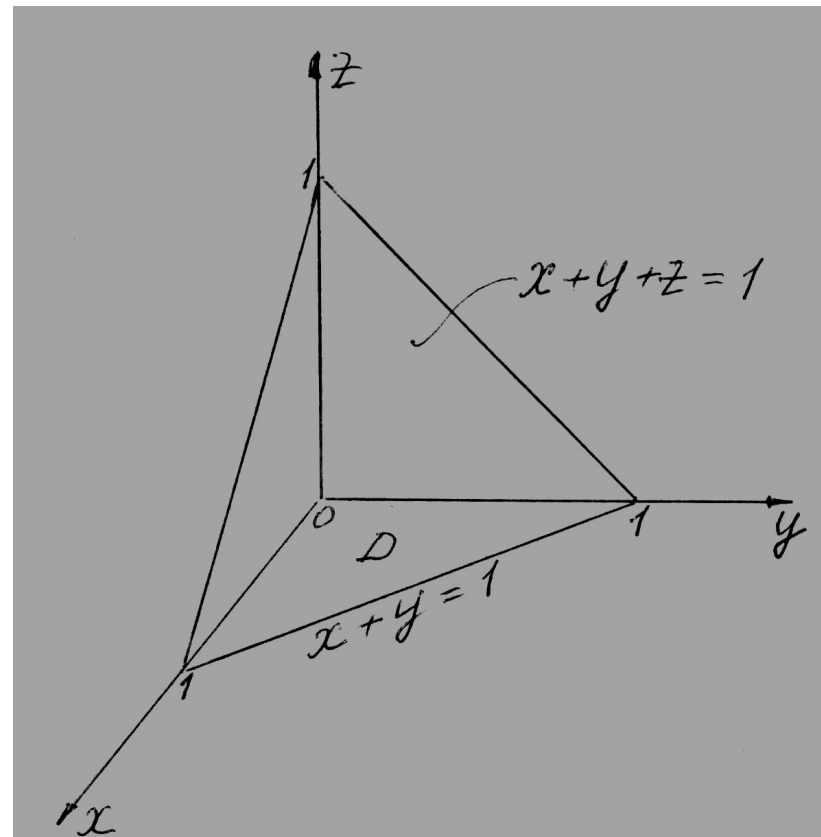


Вычисление тройного интеграла

Пример 1.
Вычислить $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$,

где V ограничена
плоскостями

$$x + y + z = 1,$$
$$x=0, y=0, z=0.$$



Решение.

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} = \iint_D dx dy \int_0^{1-x-y} \frac{d(x+y+z+1)}{(1+x+y+z)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2} \iint_D \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \Big|_0^{1-x-y} dx dy = -\frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right) dx dy =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right) dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{y}{4} + \frac{1}{1+x+y} \right) \Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) dx =$$

$$\left(= \frac{1}{8} \cdot \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \ln(1+x) \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}.$$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах

При переходе от декартовых координат к цилиндрическим по формулам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$ тройной интеграл по области V преобразуется к виду

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d\varphi dr dz,$$

где $r d\varphi dr dz$ - это элемент объёма dv в цилиндрических координатах.

Объем тела

В декартовых координатах объем тела равен

$$V = \iiint_V dx dy dz$$

Объем тела

Общая формула для вычисления объема (независимо от системы координат) имеет вид

$$V = \iiint_V dv$$

Объем тела

Объём пространственной области V в цилиндрических координатах

$$V = \iiint_V r d\varphi dr dz$$

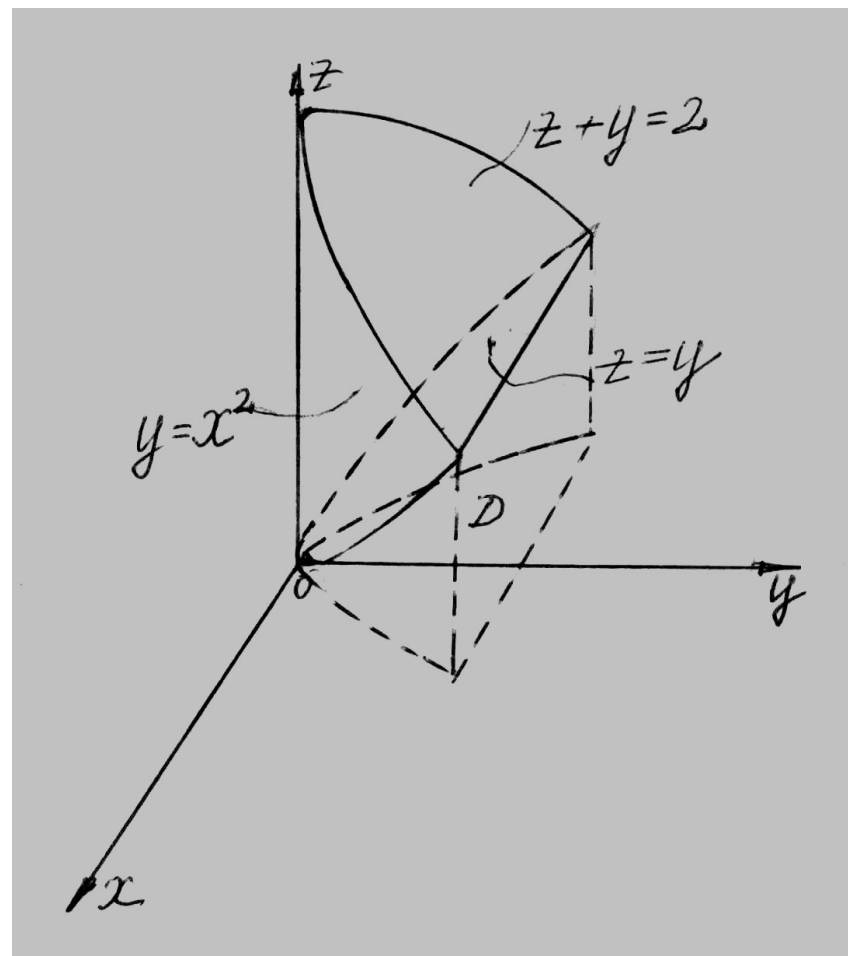
Найти объем тела

Вычислить объём
тела, ограниченного
поверхностями

$$y = x^2,$$

$$z = y,$$

$$z + y = 2.$$



Решение

Найдём линию пересечения плоскостей, ограничивающих тело сверху и снизу. Очевидно, это $y=1$.

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dx dy dz = \iint_D dx dy \int_y^{2-y} dz = \iint_D z \Big|_y^{2-y} dx dy = \iint_D (2 - 2y) dx dy = \\ &= 2 \int_0^1 (1 - y) dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx = 2 \int_0^1 (1 - y) \cdot x \Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy = 2 \int_0^1 (1 - y) \cdot 2\sqrt{y} dy = \end{aligned}$$

$$= 4 \int_0^1 (\sqrt{y} - \sqrt{y^3}) dy = 4 \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{16}{15}.$$

Найти объем тела

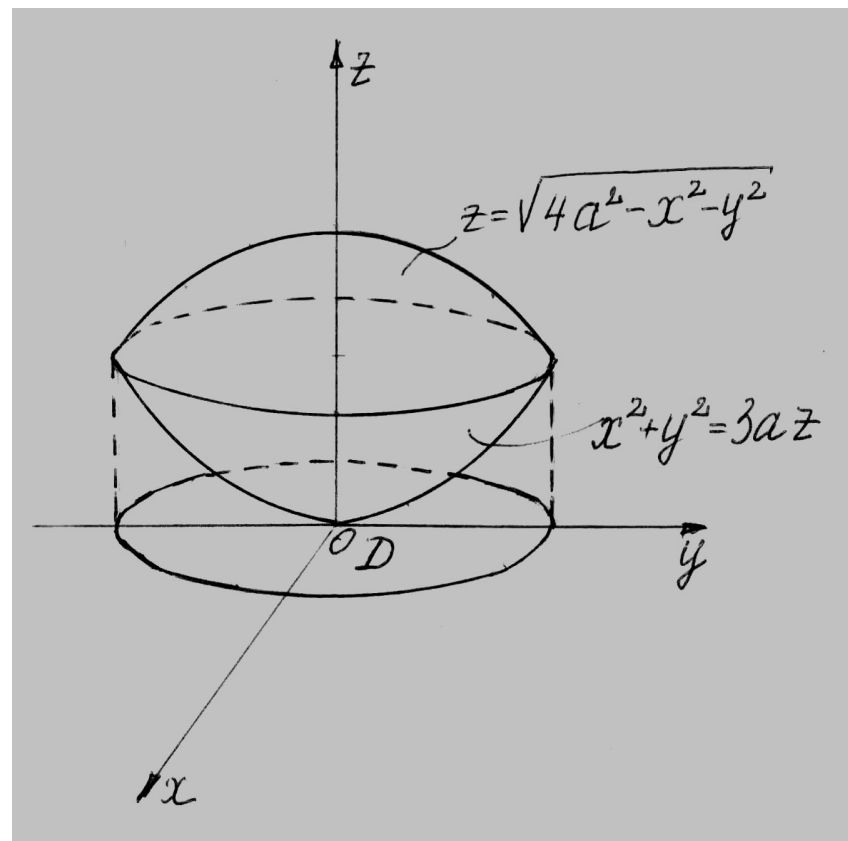
Вычислить объём
тела, ограниченного
сферой

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$

и параболоидом

$$x^2 + y^2 = 3az$$

(внутри
параболоида).



Решение

Вычислим объём тела, переходя к цилиндрическим координатам. Для этого запишем уравнения поверхностей в цилиндрических координатах:

$r^2 + z^2 = 4a^2$, $3az = r^2$ Очевидно, поверхности пересекаются при $z = a$.

Вычислим теперь объём тела.

Подставляя $z = a$ в одно из уравнений системы, получим $r = a\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V r d\varphi dr dz = \iint_D r d\varphi dr \int_{\frac{r^2}{3a}}^{\sqrt{4a^2-r^2}} dz = \iint_D z \Big|_{\frac{r^2}{3a}}^{\sqrt{4a^2-r^2}} r d\varphi dr = \\
 &= \iint_D \left(\sqrt{4a^2-r^2} - \frac{r^2}{3a} \right) r d\varphi dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{3}} \left(r\sqrt{4a^2-r^2} - \frac{r^2}{3a} \right) dr =
 \end{aligned}$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{2} \int_0^{a\sqrt{3}} \sqrt{4a^2 - r^2} d(4a^2 - r^2) - \int_0^{a\sqrt{3}} \frac{r^3}{3a} dr \right) =$$

$$= \left(-\frac{2\pi}{3} \cdot (4a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2\pi r^4}{3 \cdot 4a} \right) \Big|_0^{a\sqrt{3}} = -\frac{2\pi}{3} (a^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2\pi}{3} (4a^2)^{\frac{3}{2}} -$$

$$- \frac{(a\sqrt{3})^4 \cdot 2\pi}{3 \cdot 4a} = \frac{16\pi}{3} a^3 - \frac{2\pi}{3} a^3 - \frac{3\pi}{2} a^3 = \frac{19}{6} \pi a^3.$$