Определение центра тяжести математическими средствами

Секция математики

Выполнила: Шернина Оксана Игоревна
ученица 10 класса МОУ «Лицей» г. Новотроицка

Руководитель: Поветкина Наталия Анатольевна

Актуальность

Нахождение центра тяжести имеет большое значение не только при решении задач математического и физического содержания, но и при решении задач практической направленности.

Меня заинтересовало, к чему может привести неправильный расчёт центра тяжести в ряде морских трагедий.

Центр тяжести линий

- Если линия имеет центр симметрии, то её центр тяжести совпадает с центром симметрии.
- Если линия имеет ось симметрии, то её центр тяжести лежит на оси симметрии.
- Если линия имеет плоскость симметрии, то её центр тяжести лежит на плоскости симметрии.

Из этих свойств следует, что центр тяжести отрезка лежит в его середине.

Центр тяжести однородной пластинки

С точки зрения физики материальная точка - это точка, снабжённая массой. Математически: материальная точка – это пара, состоящая из точки и некоторого положительного числа, называемого массой.

Центр тяжести материальных точек – это точка, в которой расположено объединение этих материальных точек.

Теорема а): Центр тяжести и объединение системы материальных точек не зависит от порядка их последовательного объединения (группировки), т.е. от выбора объединяемых пар.

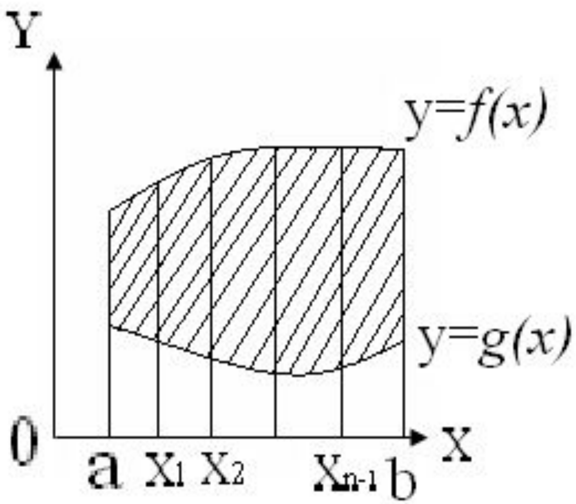
б): Центр тяжести и объединение системы материальных точек не изменяется, если заменить несколько материальных точек их объединением.

Нахождение центра тяжести однородной пластинки

1) Найдем центр тяжести материальных точек:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = M \text{ или } M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$\overline{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M} \quad \overline{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M}$$



2) Рассмотрим материальную пластину, ограниченную двумя кривыми $y = f(x), y = g(x)$ и прямыми $x = a, x = b. f(x) \geq g(x).$

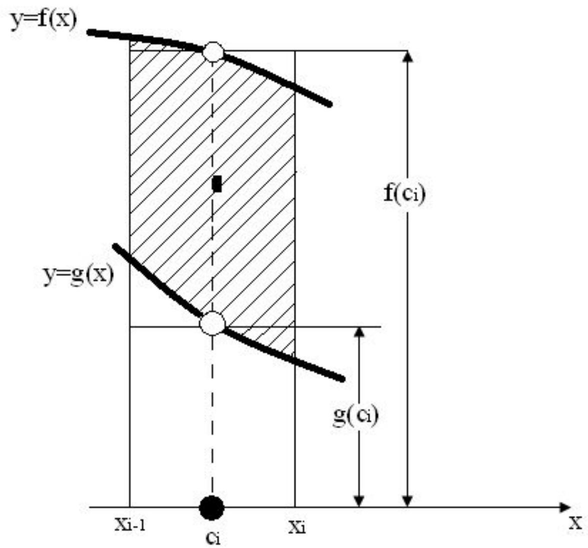
3) Предположим, что поверхностная плотность этой пластинки постоянна и равна ρ. Определим центр тяжести пластинки:

4) Делим [a; b] на n равных частей точками деления $x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}$. Обозначим $a=x_0$, $b=x_n$.

5) Через $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ проведем прямые || Оу. Получим n узких пластинок. Находим центр тяжести пластинок.

6)

Рас



от

рез ую

пласт

инк

основани

ем),

получаем точку c_i.

$$(c_1; \frac{f(c_1)+g(c_1)}{2})$$

$$(c_2; \frac{f(c_2)+g(c_2)}{2})$$

$$(c_n; \frac{f(c_n)+g(c_n)}{2})$$

Ц

ентр тяжести пластинок находится приблизитель

но в точках с координатам

и:

$$m_1 = \rho[f(c_1)-g(c_1)]\Delta x_1, m_2 = \rho[f(c_2)-g(c_2)]\Delta x_2, \ldots, m_n = \rho[f(c_n)-g(c_n)]\Delta x_n,$$

Д

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

ля 1-ой пластинки:

Д

8) Заменим каждую узкую пластинку материальной точкой, расположенной в центре тяжести этой пластинки и имеющей ту же массу, что и узкая пластинка. Тогда, центр тяжести такой системы материальных точек совпадает с центром тяжести всей пластины:

$$x \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \rho [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i [f(c_i) - g(c_i) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x_i}$$

$$y \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{f(ci) + g(ci)}{2} \bullet \rho [f(ci) - g(ci)] \bullet \Delta xi}{\sum_{i=1}^{n} \rho [f(ci) - g(ci)] \Delta xi} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \{[f(ci)]^2 - [g(ci)]^2\} \Delta xi}{\sum_{i=1}^{n} [f(ci) - g(ci)] \Delta xi}.$$

А это сводится к интегральным исчислениям, что будем изучать в 11 классе.