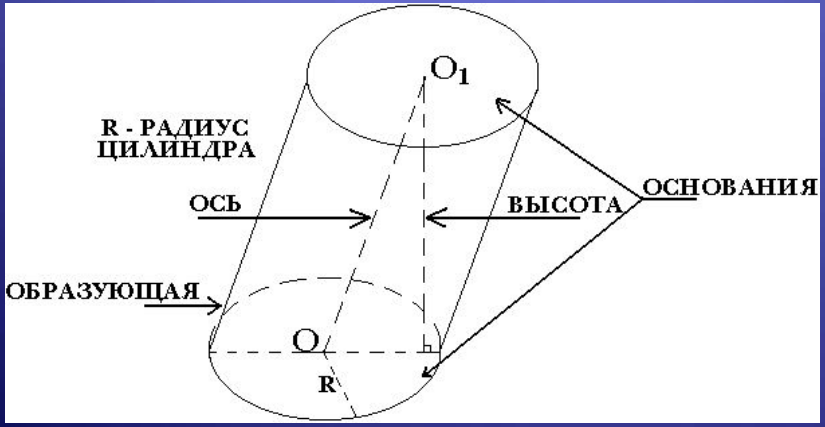
Цилиндр

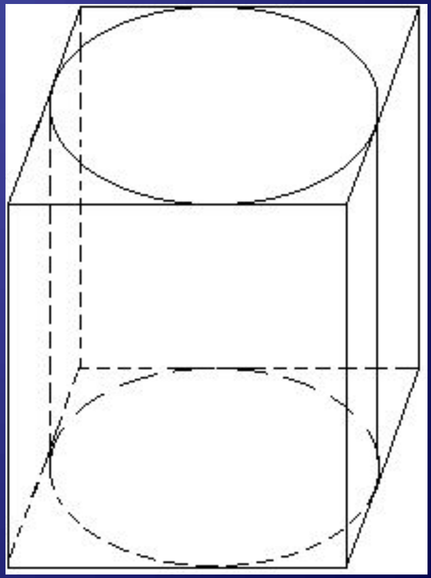
Выполнил: Студент гр 916 Ковардинов Павел

Определение и общие свойства цилиндра.

- Цилиндром (точнее, прямым круговым цилиндром) называется тело вращения, полученное при вращении прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его сторон.



- Призма называется описанной около цилиндра, если основание её - это многоугольники, описанные около основания цилиндра, а боковые грани касаются цилиндра



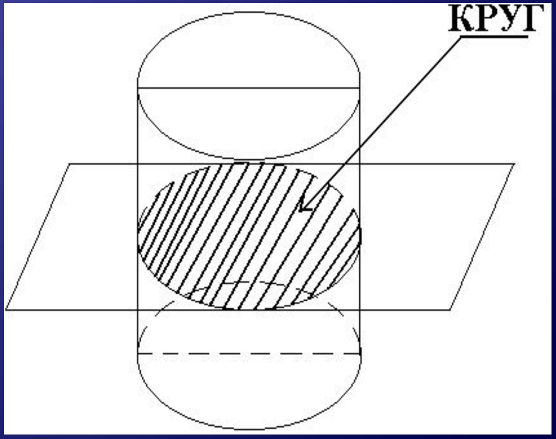
Простейшие свойства цилиндра:

- ***Свойство 1:*** Все образующие цилиндра равны друг другу.
- ***Свойство 2:*** Основание цилиндра равны друг другу.
- ***Свойство 3:*** Все сечения цилиндра плоскостями, параллельными плоскостям основания цилиндра, равны основания цилиндра.

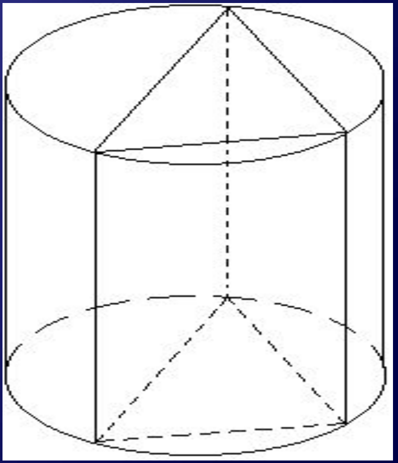
- Перпендикуляр, опущенный из любой плоскости одного основания цилиндра на плоскость другого его основания, называется *высотой цилиндра* (иначе длина образующей). Т.к. плоскости оснований параллельны, то перпендикуляры у них общие и все они равны. Поэтому высоту можно проводить из любой точки плоскости основания.

Цилиндр вращения.

- *Прямым круговым цилиндром* называется прямой цилиндр, основание которого – круг. Отрезок, соединяющий центры его оснований, называется *осью цилиндра.* Ось прямого кругового цилиндра является его осью вращения, а сам он – фигура вращения. Все сечения прямого кругового цилиндра плоскостями, параллельными плоскостям оснований, являются кругами с центрами на оси (по свойству 3). Плоскости этих кругов перпендикулярны оси.

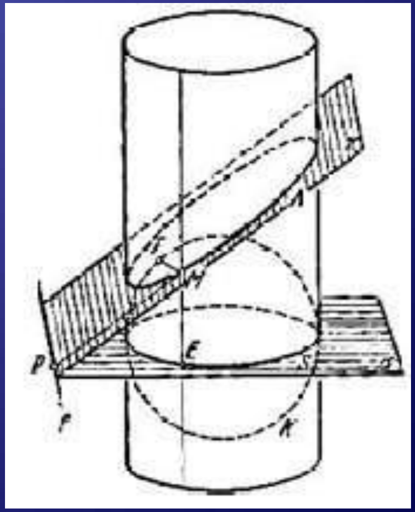


- Эти прямоугольники называются *осевыми сечениями цилиндра вращения.* Образующие цилиндра вращения, исходящие из точек окружности основания, образуют его *боковую поверхность.*
- Поэтому прямой круговой цилиндр является фигурой вращения и его называют *цилиндром вращения.* Он получается вращением прямоугольника вокруг своей оси симметрии, а также вращением прямоугольника вокруг стороны .



Эллипс как сечение цилиндра вращения

- Простейшую кривую поверхность, именно круговой цилиндр, можно получить при помощи простейших кривых – окружности и прямой – следующим образом. Через одну из точек окружности проведем прямую, перпендикулярную к плоскости круга, и будем перемещать её параллельно самой себе вдоль всей окружности. Можно также получить круговой цилиндр, заставив одну прямую вращаться вокруг другой прямой, параллельной первой и служащей для первой прямой осью вращения. Таким образом, круговой цилиндр есть *поверхность вращения.*



Объем цилиндра.

- *Теорема*: объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.
- Доказательство: Впишем в данный цилиндр P радиуса r и высоты h правильную n-угольную призму F_n, а в эту призму впишем цилиндр P_n. Обозначив через V и V_n объемы цилиндров P и P_n, через r_n – радиус цилиндра P_n. Так как объем призмы F_n равен $S_n \cdot h$, где S_n – площадь основания призмы, а цилиндр P содержит призму F_n, которая, в свою очередь, содержит цилиндр P_n, то $V_n < S_n \cdot h < V$ (неравенство 1). Будем неограниченно увеличивать число n. При этом радиус r_n цилиндра P_n стремиться к радиусу r цилиндра P ($r_n = r \cos$ при $n \to \infty$). Поэтому объем цилиндра P_n стремиться к объему цилиндра P: $\lim_{n\to\infty} V_n = V$. Из неравенств 1следует, что и $\lim_{n\to\infty} S_n \cdot h = V$. Но $\lim_{n\to\infty} S_n = \pi r^2$. Таким образом,

$$V=\pi r^2 h \qquad (2)$$

Обозначив площадь πr^2 основания цилиндра буквой S, и из формулы (2) получаем

$$V = S \cdot h$$

Площадь цилиндра.

За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь её развертки. Так как площадь прямоугольника ABB'A' равна $AA' \cdot AB = 2\pi rh$, то для вычисления площади $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра радиуса r и высоты h получается формула

$$S_{бок} = 2\pi rh \qquad (1)$$

Итак, площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований. Так как площадь каждого основания равна πr^2, то для вычисления площади $S_{цил}$ полной поверхности цилиндра получаем формулу:

$$S_{цил} = 2\pi r\,(r + h)$$

Задача №1
Осевой сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 20 см. Найти: а) высоту цилиндра; б) площадь основания цилиндра.

а) Дано:

ВД = 20см

АВСД – осевое сечение, квадрат.

Цилиндр

Найти:

h - ?;

Решение:

а) Так как АВСД – квадрат, то

АВ=АД. Из треугольника АВД

по теореме Пифагора: $АС^2$ =

$ВА^2$ + АД; $20^2 = h^2 + h^2$; $20^2 = 2h^2$; h

$400 = 2\,h^2$; $h^2 = 400$; $h = 10\sqrt{2}$.

Дано:

цилиндр

АВСД – осевое сечение, квадрат.

Найти:

$S_{осн}$ - ?

Решение:

б) $S_{осн} = \pi r^2$; r = 1/2АД; r =1/2h;

r= $(1*10\sqrt{2})/2= 5\sqrt{5}$;

$S_{осн} = \pi(3\sqrt{2}\,)^2$;

$S_{осн} = \pi \cdot 25(\sqrt{2}\,)^2$; $S_{осн} = \pi 50$. ВД = 20см