Концепция учебника по алгебре и началам анализа для профильной ШКОЛЫ

Доцент кафедры методики и теории преподавания математики в школе Московского городского педагогического университета Надежда Евгеньевна Фёдорова, к. п. н. pptcloud.r

Содержание учебников призвано сформировать

• у всех учащихся старших классов представление о математике как о части человеческой культуры, как о средстве моделирования различных явлений природы, жизни и деятельности человека;

у учащихся, планирующих связать свою дальнейшую, профессиональную деятельность с естественно – научными, техническими, **экономическими знаниями** – представление о широком применении математических методов в различных теоретических и практических вопросах; сформировать прочные и конкретные знания и умения, позволяющие в дальнейшем использовать математику как средство освоения своих профессиональных знаний.

Содержательные и структурные особенности учебника

- ۲
- первая глава учебника в сжатом виде повторяет традиционное содержание основной (девятилетней) школы, что позволит учителю эффективно организовать повторение математики, максимально используя самостоятельную деятельность учащихся (при чтении текстов и решении задач из этой главы).
- В этой же главе дается краткое изложение элементов теории множеств и логики – вопросов, включенных в содержание нового стандарта математического образования для основной школы.

 В связи с возрастными особенностями учащихся традиционный курс алгебры, связанный с элементарными функциями и их исследованием методами элементарной математики предшествует изучению элементов математического анализа;



Ведущей линией курса является числовая линия, что позволяет с самого начала строить курс с опорой на свойства действительных чисел. В частности, это объясняет тот факт, что основное содержание курса начинается с изучения теории делимости чисел. Числовая линия свое логическое завершение получает в главе «Комплексные числа», рассматриваемой в конце 11 класса

Развивается числовая линия
параллельно функциональной, но с
некоторым опережением по времени.
 Вопросы, связанные с исследованием
функции следуют за изучением
соответствующих числовых понятий и
алгебраических операций

- •Простейшие уравнения решаются с опорой на свойства числовых равенств, а после изучения определенного класса функций решаются более сложные показательные, логарифмически, иррациональные, тригонометрические уравнения.
 - Решения неравенств рассматриваются после изучения соответствующего класса функций

 Ведущими дидактическими принципами курса является оптимальная взаимосвязь научности и доступности. Этому способствует разумная простота терминологии, а также стиль и язык изложения учебного материала. Для учащихся базового уровня изложение ведется конкретно-индуктивным методом с опорой на практические задачи. Задачи мотивируют значимость вводимых понятий и иллюстрируют основу математических абстракций, показывающих математические модели реальных процессов. Применение теоретического материала на протяжении всего курса иллюстрируется примерами и задачами, решения которых разбираются достаточно подробно

Изложение теоретического материала для учащихся профильного уровня ведется на дедуктивной основе. Часть доказательств отдельных положений в профильных классах переносится на самостоятельную работу под руководством учителя (к таким вопросам, например, относятся обоснования ряда равносильных преобразований уравнений, неравенств и их систем). Изучение некоторых понятий происходит с разных точек зрения и в разных разделах (так, например, бином Ньютона рассматривается и в теории многочленов, и в разделе «Комбинаторика»), что усиливает мировоззренческую составляющую курса.

Система упражнений учебника имеет выделенные 4 уровня сложности:

- 1) обязательный базовый;
 - 2) продвинутый базовый;
- 3) профильный;
 - 4) углубленный профильный.



- Упражнения приведены в конце каждого параграфа, в конце каждой главы (упражнения для тематического повторения) и в конце учебника (для итогового повторения курса).
- По каждой теме (главе) имеются вопросы для проверки теоретических знаний и практические задания для самоконтроля («Проверь себя!»).

В методических рекомендациях приводятся

- -Концептуальные особенности изложения содержания каждой главы в целом;
- -Формулируются требования к обязательным результатам обучения в общеобразовательных и профильных классах;
- -Ставятся цели изучения каждого параграфа; приводятся конкретные рекомендации по конструированию учебного процесса для изучения каждой темы;
- -Предлагается система самостоятельных и контрольных работ по каждой теме;
- -Приводятся подробные решения наиболее трудных задач учебника;
- -Даются рекомендации по проведению уроков обобщения и систематизации знаний

Алгебра и начала математического анализа

10 класс

Тема1. Алгебра 7-9 классов (повторение)

Множества

- 1) Какие названия применяются для обозначения множества животных; кораблей?
- 2) Как называют множество артистов, работающих в одном театре; цветов в одной вазе?
- 3) Как называется множество точек земной поверхности, равноудаленных от Северного полюса; имеющих одинаковую долготу?
- 4) Коза привязана веревкой длиной I к колечку, которое может скользить по другой веревке, натянутой между колышками A и B. Каково множество точек луга, до которых может дотянуться коза?

Логика

№233 (стр. 74)

Привести контрпример, опровергающий утверждение:

- 1) в любой четырехугольник можно вписать окружность;
- 2) для любого треугольника сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны;
- 3) сумма чисел с разными знаками есть число отрицательное;
- 4) в равнобедренном треугольнике один угол тупой.

Тема11. Делимость чисел(10ч.)

Задачи к теме11

- §2. Задача 5. Найти последнюю цифру числа
- §4.Задача 4. Доказать, что натуральное число а, записанное в виде

$$a = a_n a_{n-1} ... a_1 a_0 = a_0 + 10 a_1 + 10^2 a_2 + ... + 10^n a_n$$

делится на 11 тогда и только тогда, когда делится на 11 сумма $a_0 - a_1 + a_2 + ... + (-1)^n a_n$

м

Делимость чисел

Задача 2 (стр. 77)

Доказать, что число $a = 16^{10} - 2^{35}$ делится на 31.

Задачи

- 1. Доказать, что уравнение 42х+66у=13 не имеет целочисленных решений.
- 2.Найти все целочисленные решения уравнения 7х+15у =3.
- 3.Найти все целочисленные решения уравнения х²=у²+7.
- 4.Доказать, что уравнение х²-у²=1994 не имеет целочисленных решений

Делимость чисел

Задача 4 (стр.88)

Доказать, что уравнение $x^2 - y^2 = 1994$ не имеет целочисленных решений.



Алгебраические уравнения.(17ч.)

Решить уравнение.

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$
 (5 баллов)

- $x^4 2x^3 5x^2 + 8x + 4 = 0$ (6 баллов)
- $78x^6 133x^5 + 133x 78 = 0$ (7 баллов)

 Теорема. Если рациональное число m\n является корнем целочисленного многочлена

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- то a_0 делится на m, a a_k делится на n
- Задача. Найти все корни многочлена

$$2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$$
.

Тема 1У. Степень с действительным показателем(11\14ч.)

Свойства степени

- 1. $a^x > 1$ npu a > 1, x > 0
- Теорема. Пусть $a > 1 u x_1 < x_2$. Тогда $a^{x_1} < a^{x_2}$.
- Сл.1. Пусть $0 < a < 1 u x_1 > x_2$. Тогда $a^{x_1} < a^{x_2}$.
- **■ C**ภ.2. Пусть $a > 0, a \ne 1, a^{x_1} = a^{x_2}$. Тогда $x_1 = x_2$.
- Сл.3. Пусть $0 < x_1 < x_2$. Тогда,

если
$$p > 0$$
, то $x_1^p < x_2^p$,

$$a \ ecnu \ p < 0, mo \ x_1^p > x_2^p.$$

Тема У. Степенная функция (13\17ч.)

Свойство функции у=х³

- Докажем, что функция не является ограниченной.
- Т.е. докажем, что для любого C>0 найдется значение х_с, такое, что lf(x_c)l>C.
- Пусть , $x_c = \sqrt[3]{2C}$ где С-любое положительное
- число, тогда $f(x_c) = (\sqrt[3]{2C})^3 = 2C > C$.

Задача

- Найти: 1) область определения и множество значений функции спроса; 2) объем спроса при цене $p_1 = 20 \ e \partial$., $p_2 = 50 \ e \partial$., $p_3 = 80 \ e \partial$.;
- 3)функцию, обратную функции спроса, которая описывает зависимость цены за единицу продукции от объема спроса.

Примеры задач

Задача 9. Решить неравенство

$$\sqrt{3x^2+8x-3}\rangle\frac{1+2x}{3}.$$

Задача 10. Решить неравенство

$$\sqrt{2-x}-\sqrt{x-1}\rangle\frac{1}{\sqrt{5}}$$
.

Тема У1. Показательная функция (10\11 ч.)

Примеры задач

Задача 11. Решить уравнение

$$(x-3)^{3x^2-10x+3}=1.$$

- Задача 12. При каких значениях а уравнение $(a-1)3^{2x} (2a-1)3^x 1 = 0$
- имеет два различных корня?

Показательная функция

№44 (стр. 220)

Доказать, что уравнение $4^{x} + 25^{x} = 29$ имеет только один корень x = 1.

Тема У11. Логарифмическая функция (15\17 ч.)

v

Логарифмическая функция

Задача 4 (стр.236)

Как известно, двухпроцентный вклад в сбербанк, равный **a** рублям, через **p** лет становится равным **a**(1,02)^p, а трехпроцентный вклад становится равным **a**(1,03)^p. Через сколько лет каждый из вкладов удвоится?

Задача

■ 66. Вода в исследуемом глубоком озере содержит взвесь, которая уменьшает проходимость света в воде. Эксперименты показали, что интенсивность света уменьшается на 10% при прохождении каждых 20 см воды. Днем измерительный прибор опустили на дно озера и начали постепенно поднимать. На какой глубине d прибор впервые покажет наличие света, если его чувствительность такова, что способна обнаружить 0,17% дневного света?

Тема У111. Тригонометрические формулы(21\24ч.)

10

Задачи к теме У111

- **138**. Доказать: $\sin 18^{\circ} = \frac{\sqrt{5} 1}{4}$; 2) $tg^2 36^{\circ} \cdot tg^2 72^{\circ} = 5$.
- 148. Доказать, что если

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, mo\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha} = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

215. Доказать тождество

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{1}{8} (5 + 3\cos 4\alpha).$$

Тема 1X. Тригонометрические уравнения (15\21ч)

Задачи к теме 1Х

- **Задача 9**. Решить уравнение Sinx · sin 9x · sin13x = 1.
- **Задача 10**. Решить уравнение $(\cos 2x \cos 4x)^2 = 4 + \cos^2 x$.
- Задача 11. Решить уравнение

$$\sin^6 x + \cos^8 x = 1.$$

- Задачи
- Задача 6. Решить неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{5+3\cos 4x}{8}}\rangle - \sin x.$$

86. Решить неравенство

$$\frac{\sin^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0$$

Алгебра и начала математического анализа

11 класс

Тема 1. Тригонометрические функции (18\19 ч.)

Задачи к теме 1

- §1. Задача 8. Доказать, что функция у=х sinx не является ограниченной на множестве R.
- **§2. Задача 8**. Доказать, что функция $y=\sin\frac{1}{x}$ не является периодической.
- §3. Задача 5. Построить график функции у=х соsх.
- **§4.** Задача 3. Исследовать функцию $y = \log_2 \sin x$ и построить график
- §6. Задача 5.Построить график функции y=arcsin(sinx)

Тема 11. Производная и ее геометрический смысл (17\25 ч.)

Задачи к теме 11

- **§2. Задача .1** Исследовать функцию $f(x) = \frac{x^2 1}{x 1}$ в окрестности точки x=1.
- Задача 2. Исследовать функцию $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 npu \ x > 0, \\ 0 & npu \ x = 0, \\ x + 1 & npu \ x < 0 \end{cases}$
- Задача 4. Исследовать функцию $f(x) = \begin{cases} x^2 & npu \ x \le 1, \\ x + 1 & npu \ x > 1 \end{cases}$

W

Задача

 Задача 3. Найти числа b и с такие, при которых функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & npu \ x < 2, \\ b & npu \ x = 2, \\ x + c & npu \ x > 2 \end{cases}$$

непрерывна в точке x=2

Задачи

- 60. Тело, масса которого m=5кг, движется прямолинейно по закону $s = 1-t + t^2$ (где s выражается в метрах, $t- \frac{mv^2}{2}$ секундах). Найти кинетическую энергию тела $\frac{mv^2}{2}$ через 10 минут после начала движения.
- <u>61.</u> В тонком неоднородном стержне длиной 25 см его масса (в г) распределена по закону $m=2l^2+3l$, где l-длина стержня, отсчитываемая от его начала. Найти линейную плотность:1) в точке, отстоящей от начала стержня на 3 см;2) в конце стержня.

Тема 111. Применение производной к исследованию функций $(15\15\4.)$

M

Теорема Лагранжа

 Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b] и дифференцируема на интервале (a;b). Тогда существует точка с∈ (a;b) такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c) (b - a).$$

M.

Задачи

§2. Задача 4. Найти экстремумы функции

$$f(x) = 5x^3 - x | x + 1|$$

 §3. Задача 5. Найти высоту конуса, имеющего наибольший объем среди всех конусов, вписанных в сферу, радиуса R.

7

Задача

На координатной плоскости Оху дана точка М (2;4). Рассматриваются треугольники, у которых две вершины, симметричные относительно оси Оу, лежат на параболе y = 3x², -1 ≤x≤ 1, а точка М является серединой одной из сторон каждого треугольника. Среди этих треугольников выбран тот, который имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

10

Теорема

 Для того, чтобы прямая у = kx + b была асимптотой графика функции f(x) при x→+∞, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = k$$

Тема 1У. Первообразная и интеграл (11\17 ч.)

Задачи к Теме 1У

- §3. Задача 7. Вычислить интеграл $\int_{0}^{3} x \sqrt{x+1} dx$
- §5. Задача. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,08 м, если для ее сжатия на 0,01 м требуется сила 10 Н
- §6. Задача 2. Найти решение у(x) дифференциального уравнения у' = cos x, удовлетворяющее условию у(0)=0.

Тема У. Комбинаторика (8\12 ч.)

Задачи к теме У

- Сколько различных шифров можно набрать в автоматической камере хранения, если шифр составляется с помощью любой из тридцати букв русского алфавита с последующим трехзначным числовым кодом?
- Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 5 членов, можно образовать из 10 преподавателей?

Тема У1. Элементы теории вероятностей (7\10 ч.)

Задачи к теме У1

- 1.В лотерее участвуют 15 билетов, среди которых 3 выигрышных. Наугад вынуты 2 билета. Какова вероятность того, что: 1) оба вынутых билета выигрышные; 2)выигрышного билета не оказалось; 3) только один выигрышный?
- 2.Студент, которому предстояло сдать зачет, знал ответы на 70 вопросов из 90. Какова вероятность того, что он 1) верно ответит на два вопроса; 2) ответит на второй вопрос при условии, что он не знал ответа на первый вопрос?

Тема У11. Комплексные числа (15 ч.)

7

Задачи к теме У11

• §2. Задача 4. Доказать, что для любых двух комплексных чисел $z_1 u z_2$ справедливо равенство

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

• §3. Задача 1. Пусть $z_1 u z_2$ - разные точки комплексной плоскости. Доказать, что $|z-z_1|=|z-z_2|$ - уравнение прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки $z_1 u z_2$ и проходящей через его середину.

■ §4. 52. Найти тригонометрическую форму комплексного числа $-5(\cos 40^{\circ} + i \sin 40^{\circ});$ $1 + \cos \alpha + \sin \alpha, 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

- §5. Задача 6. Записать формулы для cos 4x и sin 4x.
- §7. Задача 2. Решить уравнение

$$z^6 = -1$$

Тема У111. Уравнения и неравенства с двумя переменными $(8\13\4.)$

Задачи к главе У111

- §1. Задача 6. Пусть М множество точек плоскости с координатами (х;у) таких, что числа 3х, 2у, 9-у являются длинами сторон некоторого треугольника. Найти площадь фигуры М.
- Задача 7. Найти все пары целых чисел х и у, для которых верны неравенства 3y-x<5, x+y>26, 3x-2y<46.
- §2.Задача 2. Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению:
- 1) $x^2 + y^2 + 4x 6x 3 = 0$; 2) $8x^3y = y^4$

§2. Задача 6. Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству x-25

$$\frac{x - 25}{x^2 + y^2 - 625} > \frac{1}{26}$$

Задача 13. Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^{2} + y^{2} \le 4|x|, \\ |x| + |y| \ge 2, \\ x^{2} - y^{2} + 16 - 8x \ge 0. \end{cases}$$

- Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют: 1)первому неравенству системы; 2) первым двум неравенствам системы; 3) всем трем неравенствам системы.
- §3. Задача 1.Найти все значения *a*, при которых существует ровно одна пара действительных чисел (x;y), удовлетворяющих уравнению

$$2x^2 + 4x + 2y^2 - 8y + 10 - a = 0$$

Спасибо за внимание