



Учимся решать задачи на смеси и сплавы

Работа ученицы 7 класса Г
МОУ «СОШ № 24»г. Северодвинска
Лысковской Татьяны
Учитель математики Паршева В.В.

2008г.

Немного теории

- Для решения данного вида задач необходимо знать, что такое концентрация вещества в смеси (растворе или сплаве). Пусть в смесь входят компоненты A , B и C с массами m_A , m_B , m_C соответственно. Будем считать, что масса m смеси равна сумме масс компонентов, т.е. $m = m_A + m_B + m_C$. Тогда *концентрацией компонента A по массе* будем называть отношение массы этого компонента к массе всей смеси и обозначать как C_A :

$$C_A = \frac{m_A}{m} = \frac{m_A}{m_A + m_B + m_C},$$

Аналогично для компонентов B и C

$$C_B = \frac{m_B}{m} = \frac{m_B}{m_A + m_B + m_C}, \quad C_C = \frac{m_C}{m} = \frac{m_C}{m_A + m_B + m_C},$$

- *Концентрация — безразмерная величина. Понятно, что сумма концентраций всех компонентов смеси равна 1 ($C_A + C_B + C_C = 1$).*

- *Процентным содержанием компонента A* называется число $p_A = c_A \cdot 100\%$, т.е. это концентрация вещества, выраженная в процентах.
- Аналогично $p_B = c_B \cdot 100\%$ и $p_C = c_C \cdot 100\%$.

Задача

	Масса	% олова	Масса олова
1 кусок	300г.	20%=0, 2	? 1) $0,2 \times 300 = 60$ (г)
2 кусок	200 г.	40%=0, 4	2) $0,4 \times 200 = 80$ (г)
Сплав	3) $300 + 200 = 500$ (г)	? 5) $140 : 500 \times 100\% = 28\%$	4) $60 + 80 = 140$ (г)

Задача

	М	% кислоты	М кислоты
1 раствор	300	50%	1) $50\% = 0,5$; $0,5 \times 300 = 150$ (г)
2 раствор	100	30%	2) $30\% = 0,3$; $0,3 \times 100 = 30$ (г)
Смесь 1 и 2 раствора	3) $300 + 100 =$ $= 400$ (г)	4) $180 : 400 \times 100\% =$ $= 45\%$	

Ответ: 45%

Алгоритм решения задач такого типа

	M	% олова	M олова
1 кусок	M_1	$P_1 \% = P_1 / 100$	$P_1 M_1 / 100$ 1)
2 кусок	M_2	$P_2 \% = P_2 / 100$	$P_2 M_2 / 100$ 2)
Сплав из 1 и 2 куска	$M_1 + M_2$ 4)	$P\% - ?$ $\frac{P_1 M_1 + P_2 M_2}{M_1 + M_2}$ 5)	$\frac{P_1 M_1 + P_2 M_2}{100}$ 3)

- 1) Масса олова в первом куске.
- 2) Масса олова во втором куске.
- 3) Масса олова в двух кусках.
- 4) Масса сплава в двух кусках.
- 5) Процентное содержание олова в двух кусках.

Дано:

$$M_1 = 1 \text{ л.}$$

$$P_1 = 10\%$$

$$M_2 = 4 \text{ л.}$$

$$P_2 = 0\%$$

Найти: $P\%$

$$\text{Решение: } P\% = \frac{P_1 M_1 + P_2 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{10 \times 1 + 0 \times 4}{1 + 4} = 10/5 = 2\%$$

Ответ: 2% соли.

Дано:

$$M_1 = 6 \text{ л.}$$

$$P_1 = 60\%$$

$$M_2 = 4 \text{ л.}$$

$$P_2 = 0\%$$

Найти: $P\%$

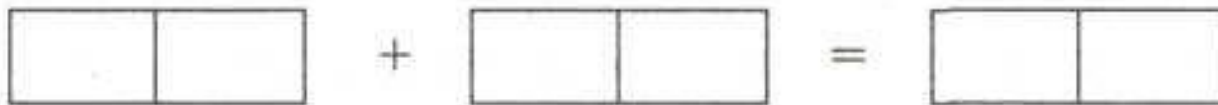
$$\text{Решение: } P\% = \frac{P_1 M_1 + P_2 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{60 \times 6 + 0 \times 4}{6 + 4} = 180 / 10 = 18\%$$

Ответ 18% кислоты.

- При решении задач данного типа полезно пользоваться наглядной моделью — схемой, в которой смесь (раствор, сплав) изображается в виде прямоугольника, разбитого на фрагменты в соответствии с числом входящих в нее (в него) компонентов, а непосредственно при составлении уравнения — проследить содержание какого-нибудь одного компонента.

Пример 1. Имеются два сплава меди со свинцом. Один сплав содержит 15% меди, а другой 65%. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получилось 200 г сплава, содержащего 30% меди?

Решение. Изобразим каждый сплав в виде прямоугольника, разбитого на два фрагмента. Поскольку данные сплавы соединяют в новый (на схеме эту операцию обозначим знаком «+» между прямоугольниками, а тот факт, что третий сплав — результат смешения первых двух, покажем с помощью знака «=») и он содержит те же самые компоненты, изобразим получающийся сплав в виде такого же прямоугольника



- Сверху подпишем названия компонентов сплавов. Обычно бывает достаточно указать первые буквы в их названиях (если они различны). В данном случае — это буквы М (медь) и С (свинец).
- Теперь внутри соответствующих фрагментов каждого прямоугольника запишем данное в условии процентное содержание элементов (в нашем примере только меди), а под прямоугольником укажем массу сплава (нам известна только масса третьего сплава).

- В результате получим следующую модель рассматриваемой в задаче ситуации

$$\begin{array}{c}
 \text{М} \quad \text{С} \\
 \boxed{15\% \quad \quad} \\
 x \text{ г}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \text{М} \quad \text{С} \\
 \boxed{65\% \quad \quad} \\
 (200 - x) \text{ г}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \text{М} \quad \text{С} \\
 \boxed{30\% \quad \quad} \\
 200 \text{ г}
 \end{array}$$

- Решим задачу двумя способами.

Дано:

$$M_1 = 30 \text{ в.}$$

$$P_1 = 48\%$$

$$M_2 = 24 \text{ в.}$$

$$P_2 = 36\%$$

Найти: $P\%$.

$$\begin{aligned} \text{Решение: } P\% &= \frac{P_1 M_1 + P_2 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{48 \times 30 + 24 \times 36}{30 + 24} = \frac{1440 + 864}{54} = \\ &= 2304 / 54 = 42,6\% \end{aligned}$$

Ответ: 43%.

Первый способ

- Пусть масса первого сплава x г, тогда масса второго сплава $(200 - x)$ г. Дополним модель данными

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{М} & \text{С} \\ \hline 15\% & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{М} & \text{С} \\ \hline 65\% & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{М} & \text{С} \\ \hline 30\% & \\ \hline \end{array}$$

200 г

Зная, что сумма масс меди в исходных сплавах равна массе меди в новом сплаве, составим уравнение $0,15x + 0,65(200 - x) = 0,3 \cdot 200$, из которого $x = 140$.

Следовательно, надо взять 140 г первого сплава и $200 - 140 = 60$ г - второго.

Второй способ.

- Можно обозначить x г и y г массу первого и второго сплава соответственно.

$$\begin{array}{c} \text{М} \quad \text{С} \\ \boxed{15\% \quad \boxed{}} \\ x \text{ г} \end{array} + \begin{array}{c} \text{М} \quad \text{С} \\ \boxed{65\% \quad \boxed{}} \\ y \text{ г} \end{array} = \begin{array}{c} \text{М} \quad \text{С} \\ \boxed{30\% \quad \boxed{}} \\ 200 \text{ г} \end{array}$$

Очевидно, $x + y = 200$ — первое уравнение системы.

Второе уравнение получим, приравняв сумму масс меди в исходных сплавах и в новом сплаве. Таким образом,

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 0,15x + 0,65y = 0,3 \cdot 200, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 140 \\ y = 60. \end{cases}$$

О т в е т: 140 г, 60 г.

Замечание.

- Обратите внимание на то, что в любом из рассмотренных способов решения можно было составить уравнение и на основе подсчета масс свинца. Ясно, что если в первом сплаве медь составляет 15% от его общей массы, то на свинец приходится 85%. Аналогично во втором и третьем сплавах свинца будет 35% и 70% соответственно. Тогда, решая задачу первым способом, получим уравнение
- $0,85x + 0,35(200 - x) = 0,7 \cdot 200.$
- Очевидно, оно равносильно уравнению $0,15x + 0,65(200 - x) = 0,3 \cdot 200.$
- Из двух возможных уравнений обычно выбирают то, что проще составить по условию задачи или легче будет решить.

Пример 2. В 4 кг сплава меди и олова содержится 40% олова. Сколько килограммов олова надо добавить к этому сплаву, чтобы содержание олова в новом сплаве было равно 70%?

Решение. Обозначим компоненты сплава буквами М (медь) и О (олово). Пусть к сплаву надо добавить x кг олова, тогда масса нового сплава будет равна $(4 + x)$ кг. Составим модель рассматриваемой в задаче ситуации.

$$\begin{array}{c} \text{М} \quad \text{О} \\ \boxed{} \quad \boxed{40\%} \\ 4 \text{ кг} \end{array} + \begin{array}{c} \text{О} \\ \boxed{100\%} \\ x \text{ кг} \end{array} = \begin{array}{c} \text{М} \quad \text{О} \\ \boxed{} \quad \boxed{70\%} \\ (4 + x) \text{ кг} \end{array}$$

Так как сумма масс олова, указанных в левой части схемы (до смешения сплавов), равна массе олова в новом сплаве, можно составить уравнение

$$0,4 \cdot 4 + x = 0,7(4 + x), \text{ откуда } x = 4.$$

Ответ: 4 кг.

Пример 3. Свежие грибы содержат 90% влаги, а сушеные — 12% влаги. Сколько сушеных грибов получится из 10 кг свежих?

- Решение. Введем обозначения: ГМ — грибная масса, В — вода (влаги). Процесс сушки грибов состоит в удалении из них большей части влаги. Если принять за x кг массу сушеных грибов, то масса удаленной влаги будет равна $(10 - x)$ кг. Теперь нетрудно составить необходимую для дальнейшего решения схему

$$\begin{array}{c} \text{ГМ} \quad \text{В} \\ \boxed{} \quad \boxed{90\%} \\ 10 \text{ кг} \end{array} - \begin{array}{c} \text{В} \\ \boxed{100\%} \\ (10 - x) \text{ кг} \end{array} = \begin{array}{c} \text{ГМ} \quad \text{В} \\ \boxed{} \quad \boxed{12\%} \\ x \text{ кг} \end{array}$$

Можно составить уравнение на основе подсчета масс влаги, учитывая, что она удаляется из грибов:

$$0,9 \cdot 10 - (10 - x) = 0,12x.$$

Однако поступим иначе. Найдем процентное содержание грибной массы в свежих и в сушеных грибах и, учитывая, что она в результате сушки не изменилась, составим уравнение $0,1 \cdot 10 = 0,88x$.

$$\begin{array}{c}
 \text{ГМ} \quad \text{В} \\
 \boxed{10\% \quad 90\%} \\
 10 \text{ кг}
 \end{array}
 -
 \begin{array}{c}
 \text{В} \\
 \boxed{100\%} \\
 (10 - x) \text{ кг}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \text{ГМ} \quad \text{В} \\
 \boxed{88\% \quad 12\%} \\
 x \text{ кг}
 \end{array}$$

Ясно, что второе уравнение проще первого. Решив его, найдем

$$x = 1 \frac{3}{22}$$

Ответ: $1 \frac{3}{22} \text{ кг}$.

Пример 4. Из 40 т железной руды выплавляют 20 т стали, содержащей 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

- Решение. Воспользуемся следующими обозначениями: Ж — железо в руде и стали, П — примеси. В процессе плавки удаляется большая часть примесей. Пусть в руде их содержится $x\%$. Составим вспомогательную схему:

$$\begin{array}{c} \text{Ж} \quad \text{П} \\ \boxed{} \quad \boxed{x\%} \\ 40 \text{ т} \end{array} - \begin{array}{c} \text{П} \\ \boxed{100\%} \\ 20 \text{ т} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Ж} \quad \text{П} \\ \boxed{} \quad \boxed{6\%} \\ 20 \text{ т} \end{array}$$

Рассуждая, как и в предыдущей задаче, приходим к уравнению $0,01 \cdot x \cdot 40 - 20 = 0,06 \cdot 20$.

Или, выразив процентное содержание железа в руде и стали: $(100 - x)\%$ и 94% соответственно, приравняем массы железа в обоих случаях, получим равносильное уравнение $0,01 \cdot (100 - x) \cdot 40 = 0,94 \cdot 20$, откуда $x = 53$.
Ответ: 53%.

Пример 5

- **Задача.** Из бака емкостью 54 л, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили водой. Потом опять вылили столько же литров смеси, после чего в баке осталось 24 л чистой кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?
- **Решение.** Введем обозначения: К — кислота, В — вода. Пусть x л - количество кислоты, отлитой из бака в первый раз. Описанную в задаче ситуацию можно представить в виде следующей схемы

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{К} & & \text{К} & & \text{В} & & \text{К} & \text{В} & & \\ & \boxed{100\%} & - & \boxed{100\%} & + & \boxed{100\%} & - & \boxed{} & \boxed{} & = & \\ & 54 \text{ л} & & x \text{ л} & & x \text{ л} & & x \text{ л} & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & \text{К} & \text{В} & & \\ & & & & & & & \boxed{24 \text{ л}} & \boxed{} & & \\ & & & & & & & (54 - x) \text{ л} & & & \end{array}$$

Однако работа со схемой затруднительна: не хватает данных, чтобы составить уравнение.

Определим процентное содержание воды в отлитой смеси. После второй операции (когда кислоту заменили водой) в баке получилась смесь, в которой на 54 л приходится x л воды. Следовательно, процентное содержание воды в этой смеси равно

Кроме того, после третьей операции (когда вылили x л смеси) в баке стало $(54-x)-24=(30-x)$ л воды. Добавим эти данные в схему

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{К} & & \text{К} & & \text{В} & & \text{К} & \text{В} \\
 \boxed{x\%} & - & \boxed{100\%} & + & \boxed{100\%} & - & \boxed{} & \boxed{\frac{x}{54} \cdot 100\%} \\
 54 \text{ л} & & x \text{ л} & & x \text{ л} & & x \text{ л} & \\
 & & & & \text{К} & & \text{В} & \\
 & & & & \boxed{24 \text{ л}} & | & \boxed{(30-x) \text{ л}} & \\
 & & & & (54-x) \text{ л} & & &
 \end{array} =$$

Ясно, что количество воды, казанное в схеме слева и справа от знака равенства, одно и то же, т.е.

$$x - \frac{x}{54} \cdot x = 30 - x.$$

$$x - \frac{x}{54} \cdot x = 30 - x.$$

$$54x - x^2 = 1620 - 54x;$$

$$x^2 - 108x + 1620 = 0.$$

Корни уравнения: $x=90$, $x=18$. Первый корень не подходит по смыслу задачи (нельзя отлить 90л из бочки, вмещающей всего 54л).

Ответ: 18л

Задача 6

- Слиток сплава серебра с цинком весом в 3.5 кг содержал 76% серебра. Его сплавляли с другим слитком и получили слиток весом в 10.5 кг, содержание серебра в котором было 84%. Сколько процентов серебра содержалось во втором слитке?

Решение:

1) $3.5 \cdot 0.76 = 2.66$ (кг) серебра в первом слитке.

2) $10.5 \cdot 0.84 = 8.82$ (кг) серебра в 10.5 кг сплава.

3) $8.82 - 2.66 = 6.16$ (кг) серебра во втором слитке.

4) $10.5 - 3.5 = 7$ (кг) вес второго слитка.

5) $6.16 : 7 = 0.88 = 88\%$ серебра содержалось во втором слитке.

Ответ: 88% серебра содержалось во втором слитке.

