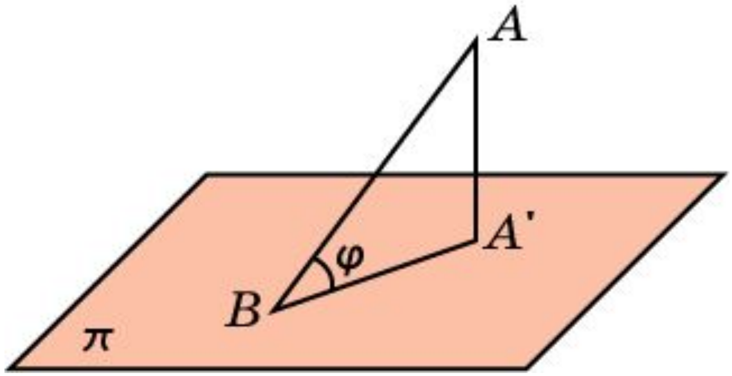
# УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

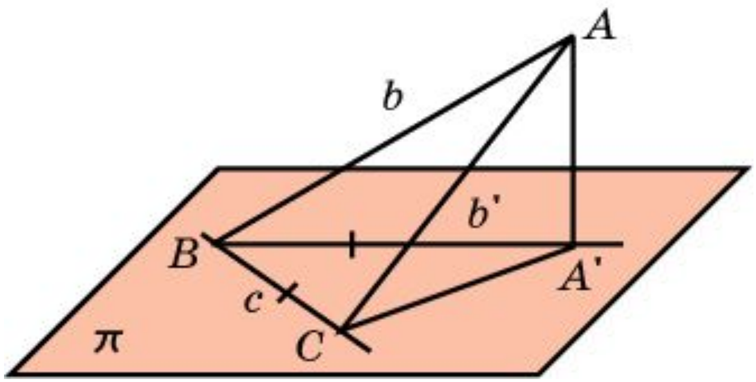
**Углом** между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и ее ортогональной проекцией на данную плоскость.




Считают также, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол.

# Теорема

Угол между наклонной и плоскостью является наименьшим из всевозможных углов между этой наклонной и прямыми, лежащими в данной плоскости.




Доказательство. Пусть $AB$ - наклонная к плоскости π, $A'B$ - ее ортогональная проекция, $c$ - прямая в плоскости π, проходящая через точку $B$.

Докажем, что угол $ABA'$ меньше угла $ABC$. Для этого на прямой $c$ отложим отрезок $BC$, равный $A'B$. В треугольниках $ABA'$ и $ABC$ сторона $AB$ общая, $A'B = BC$ и $AA' < AC$. Следовательно, угол $ABA'$ меньше угла $ABC$.

## Упражнение 1

Прямые $a$ и $b$ образуют с плоскостью $\alpha$ равные углы. Будут ли эти прямые параллельны?

Ответ: Нет.

## Упражнение 2

Две плоскости образуют с данной прямой равные углы. Как расположены плоскости относительно друг друга?

Ответ: Параллельны или пересекаются.

# Упражнение 3

Под каким углом к плоскости нужно провести отрезок, чтобы его ортогональная проекция на эту плоскость была вдвое меньше самого отрезка?

Ответ: $60^{o}$.

# Упражнение 4

Может ли катет равнобедренного прямоугольного треугольника образовать с плоскостью, проходящей через гипотенузу, угол в 60°? Каков наибольший угол между катетом и этой плоскостью?

Ответ: Нет, 45°.

# Упражнение 5

Одна из двух скрещивающихся прямых пересекает плоскость под углом 60°, а другая перпендикулярна этой плоскости. Найдите угол между данными скрещивающимися прямыми.

Ответ: $30^{o}$.

# Упражнение 6

Будут ли в пирамиде боковые ребра равны, если они образуют равные углы с плоскостью основания?

Ответ: Да.

# Упражнение 7

Через сторону квадрата проведена плоскость, составляющая с диагональю квадрата угол 30°. Найдите углы, которые образуют с плоскостью стороны квадрата, наклонные к ней.

Ответ: 45°.

# Упражнение 8

Основание равнобедренного треугольника лежит в плоскости $\pi$ (плоскость треугольника не совпадает с плоскостью $\pi$). Какой из углов больше: угол наклона боковой стороны к плоскости $\pi$ или угол наклона высоты, опущенной на основание треугольника, к плоскости $\pi$?

Ответ: Угол наклона высоты.

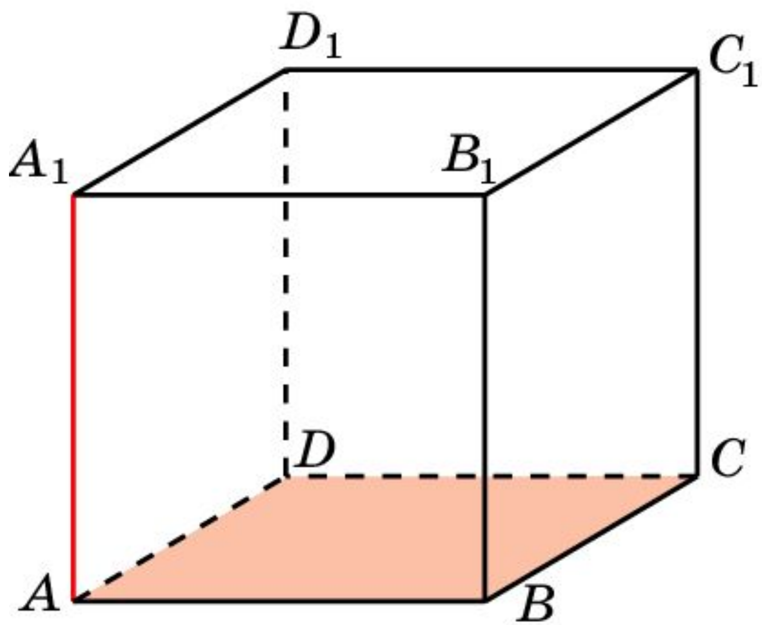
# Упражнение 9

Из вершины $A$ квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости проведен отрезок $AK$, равный 3. Из точки $K$ опущены перпендикуляры на стороны $BC$ и $CD$. Перпендикуляр из точки $K$ к стороне $BC$ равен 6. Найдите углы, которые образуют эти перпендикуляры с плоскостью квадрата.

Ответ: $30^{\circ}$.

# Куб 1

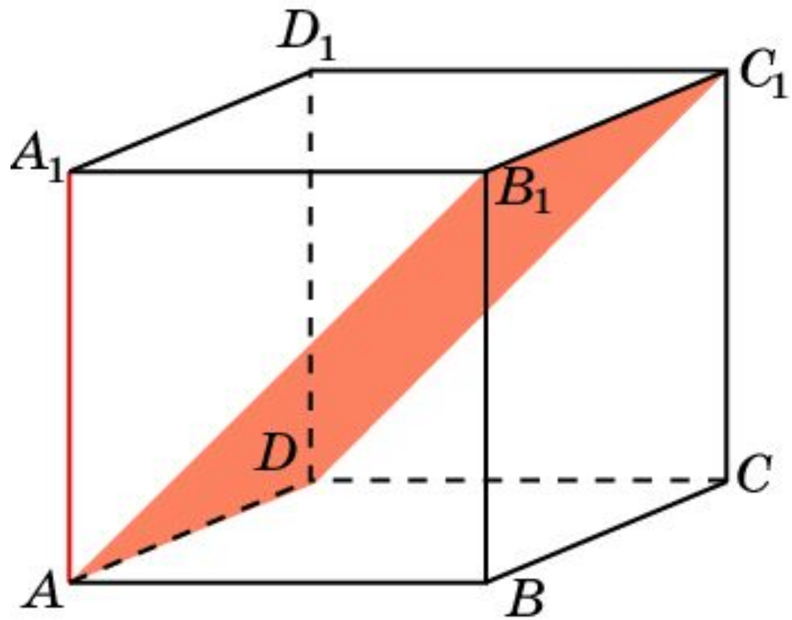
В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямой $AA_1$ и плоскостью $ABC$.




Ответ: 90°.

# Куб 2

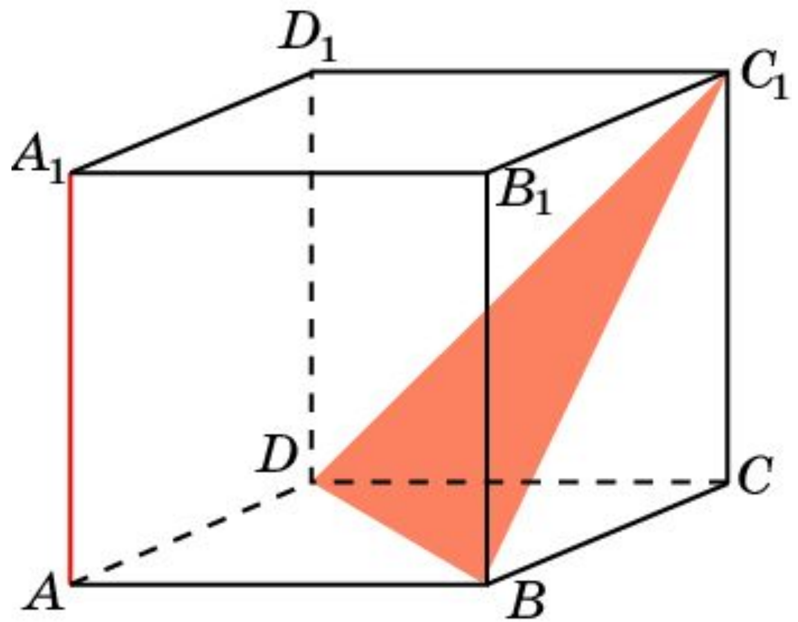
В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямой $AA_1$ и плоскостью $AB_1C_1$.




Ответ: 45°.

# Куб 3

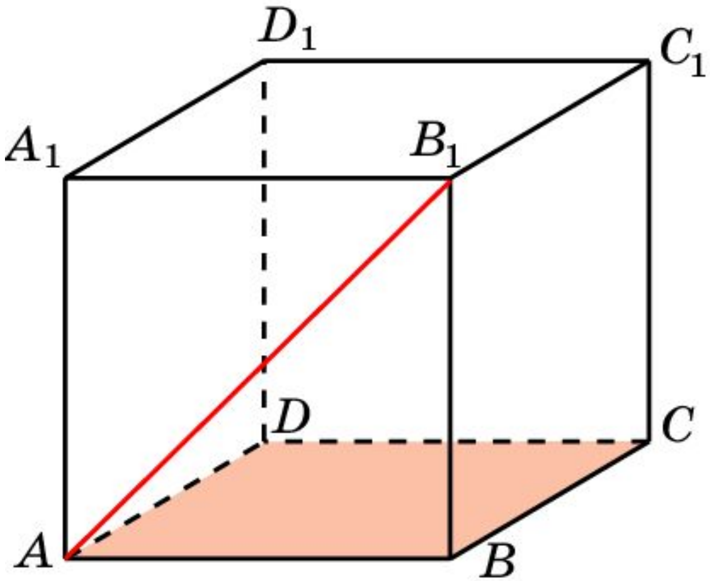
В кубе $A \ldots D_1$ найдите тангенс угла между прямой $AA_1$ и плоскостью $BC_1D$.




Ответ: $tg\,\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

# Куб 4

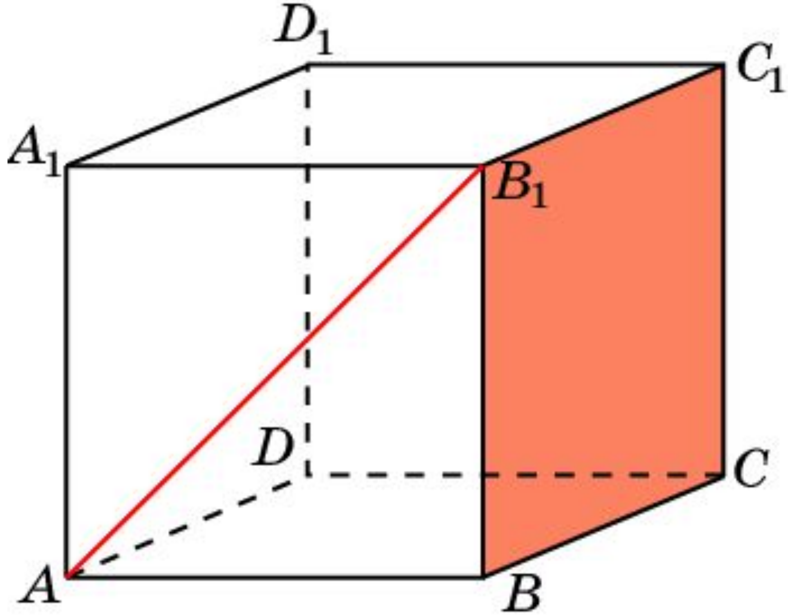
В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между прямой $AB_1$ и плоскостью $ABC$.




Ответ: 45°.

# Куб 5

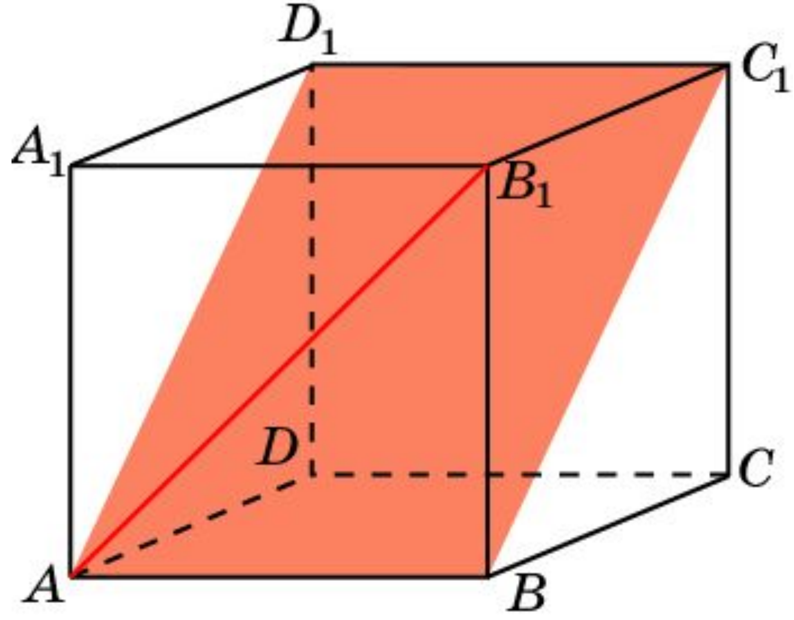
В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямой $AB_1$ и плоскостью $BCC_1$.




Ответ: 45°.

# Куб 6

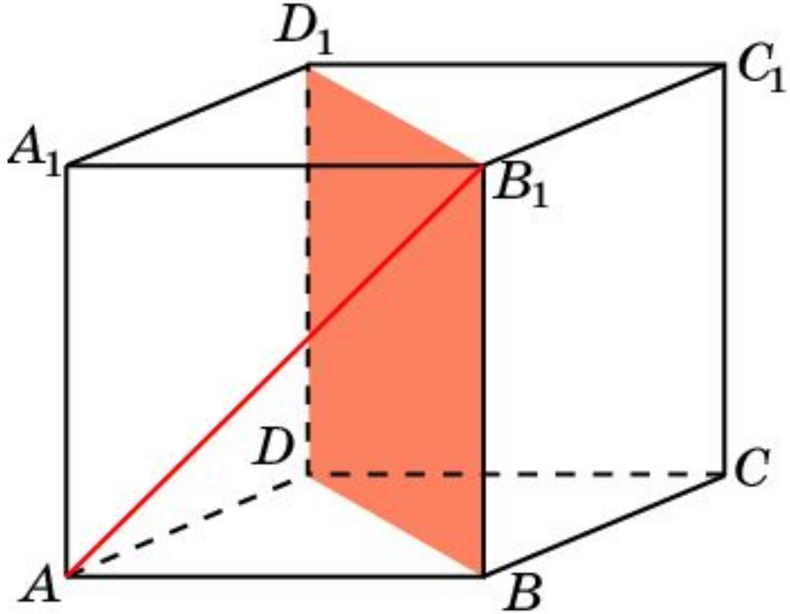
В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямой $AB_1$ и плоскостью $ABC_1$.




Ответ: 30°.

# Куб 7

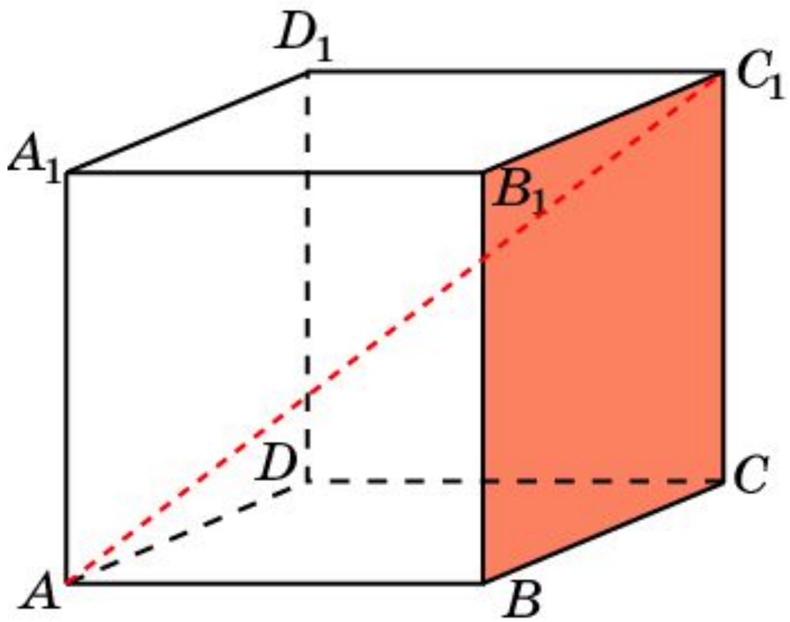
В кубе $A…D_1$ найдите угол между прямой $AB_1$ и плоскостью $BB_1D_1$.




Ответ: 30°.

# Куб 8

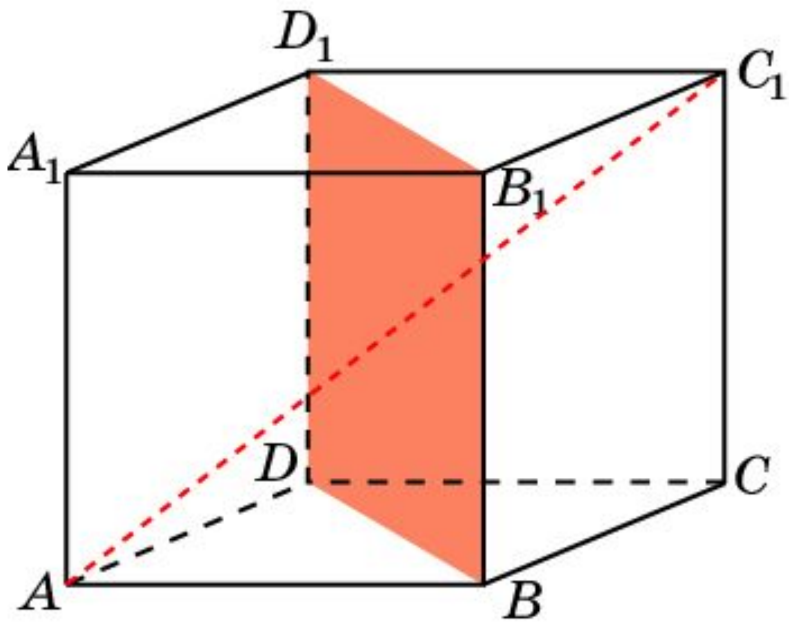
В кубе $A\ldots D_1$ найдите синус угла между прямой $AC_1$ и плоскостью $BCC_1$.




Ответ: $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

# Куб 9

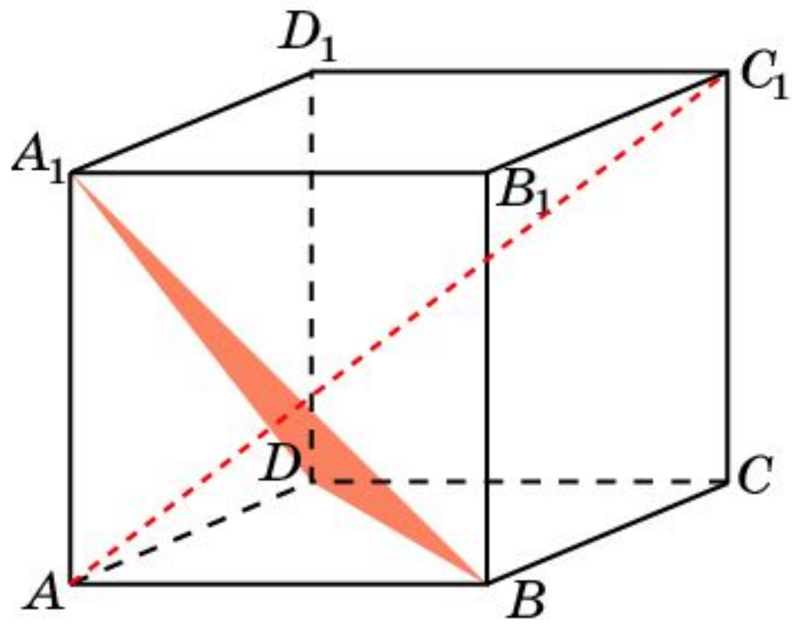
В кубе $A \ldots D_1$ найдите синус угла между прямой $AC_1$ и плоскостью $BB_1D_1$.




Ответ: $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

# Куб 10

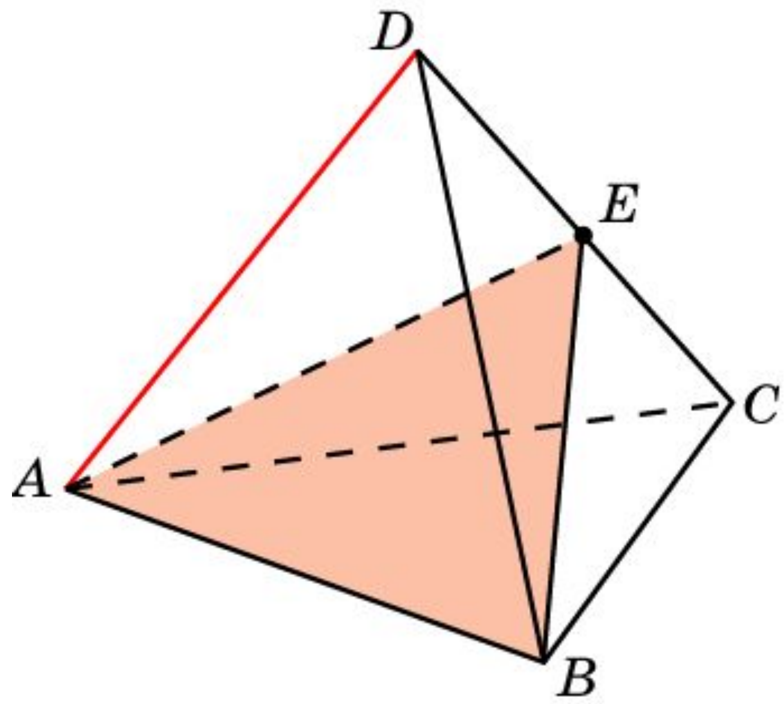
В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямой $AC_1$ и плоскостью $BA_1D$.




Ответ: 90º.

# Пирамида 1

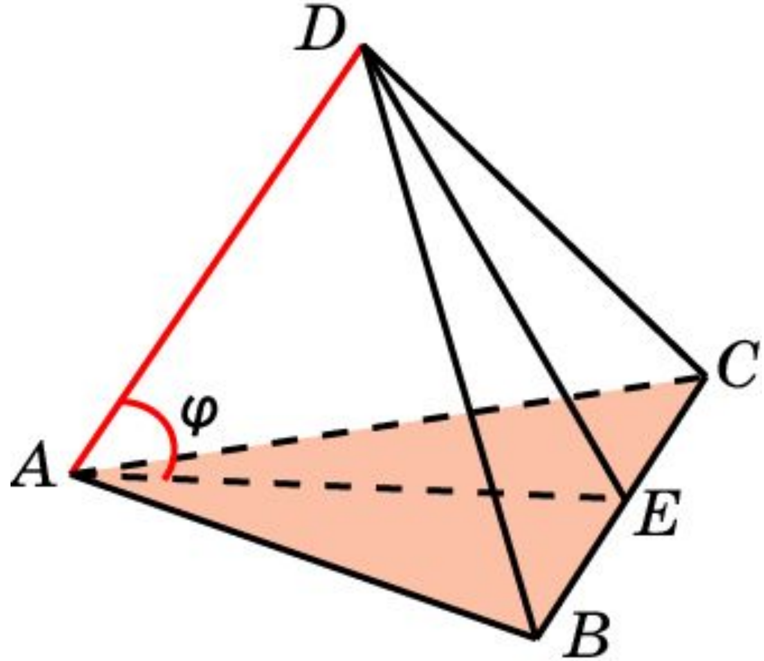
В правильном тетраэдре $ABCD$ точка $E$ – середина ребра $CD$. Найдите угол между прямой $AD$ и плоскостью $ABE$.




Ответ: 30°.

# Пирамида 2

В правильном тетраэдре *ABCD* найдите косинус угла между прямой *AD* и плоскостью *ABC*.



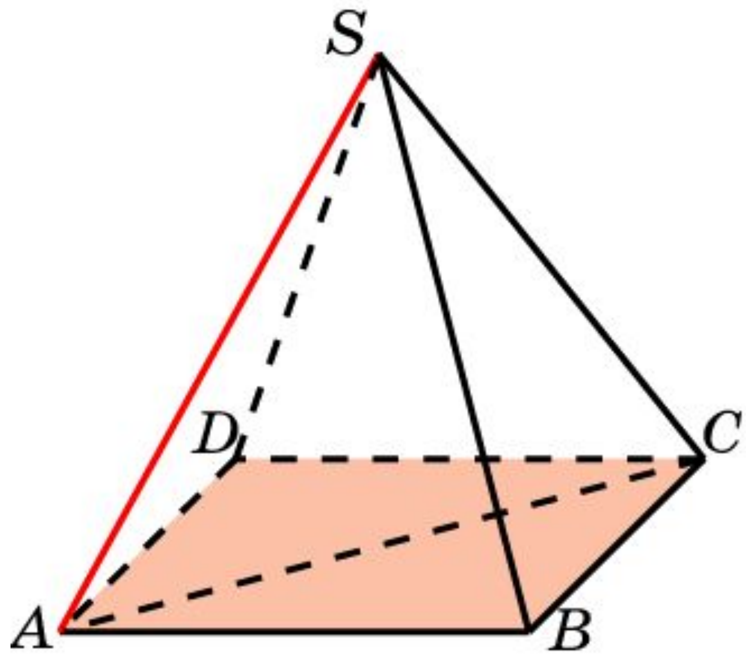

Решение. Пусть *E* – середина ребра *BC*. Искомый угол $\varphi$ равен углу *DAE*. В треугольнике *DAE* имеем: $AD = 1$, $AE = DE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Используя теорему косинусов, получим $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

# Пирамида 3

В правильной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой *SA* и плоскостью *ABC*.

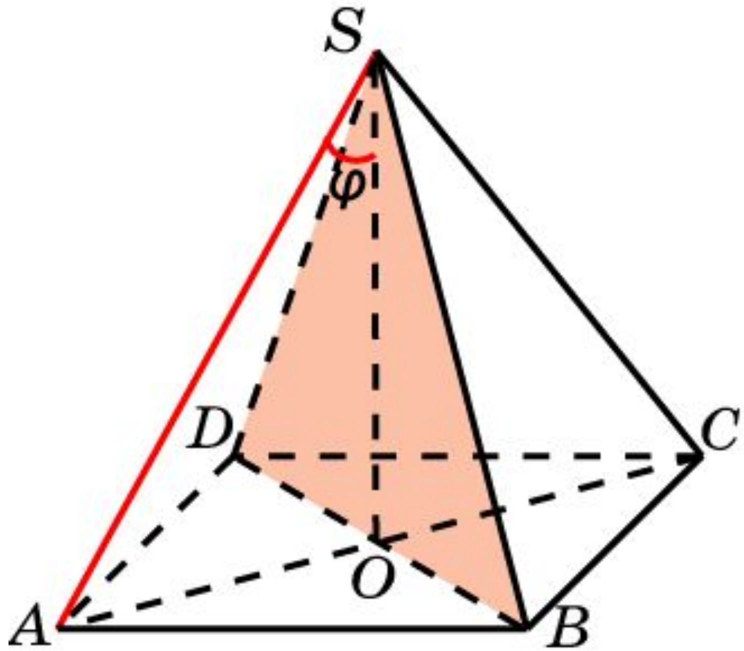



Решение: Искомый угол равен углу *SAC*. В треугольнике *SAC* имеем: $SA = SC = 1$, $AC = \sqrt{2}$. Следовательно, искомый угол равен $45^{\circ}$.

Ответ: $45^{\circ}$.

# Пирамида 4

В правильной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой *SA* и плоскостью *SBD*.

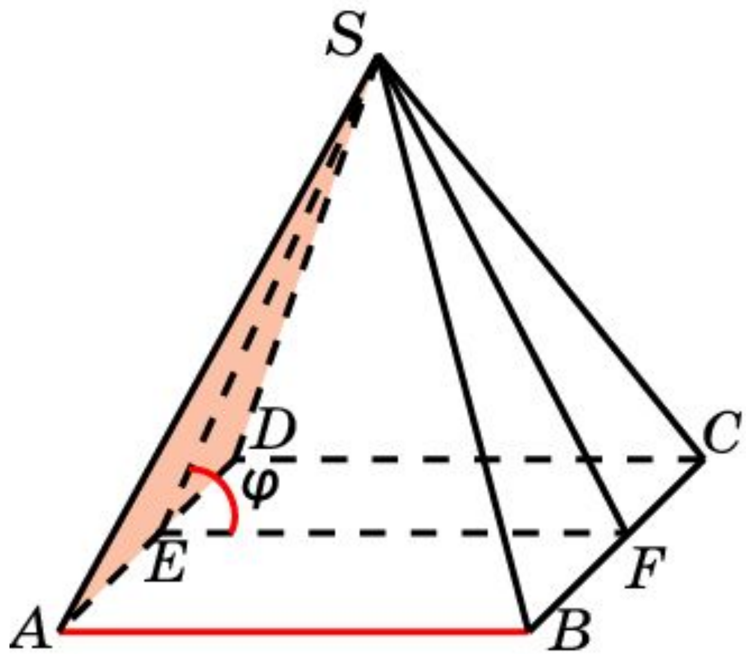



Решение: Искомый угол равен углу *SOA*, где *O* – середина *BD*. В прямоугольном треугольнике *SOA* имеем: $SA = 1$, $AO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, искомый угол $\varphi$ равен 45°.

Ответ: 45°.

# Пирамида 5

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой $AB$ и плоскостью $SAD$.



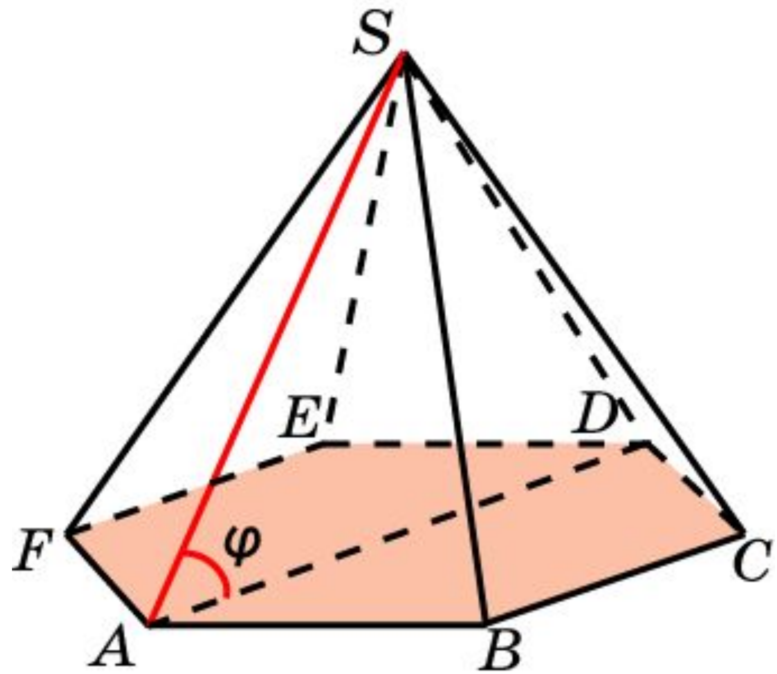

Решение. Пусть $E$, $F$ – середины ребер $AD$ и $BC$. Искомый угол $\varphi$ равен углу $SEF$. В треугольнике $SEF$ имеем: $EF = 1$, $SE = SF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Используя теорему косинусов, получим $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

# Пирамида 6

В правильной 6-ой пирамиде $SA…F$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите угол между прямой $SA$ и плоскостью $ABC$.

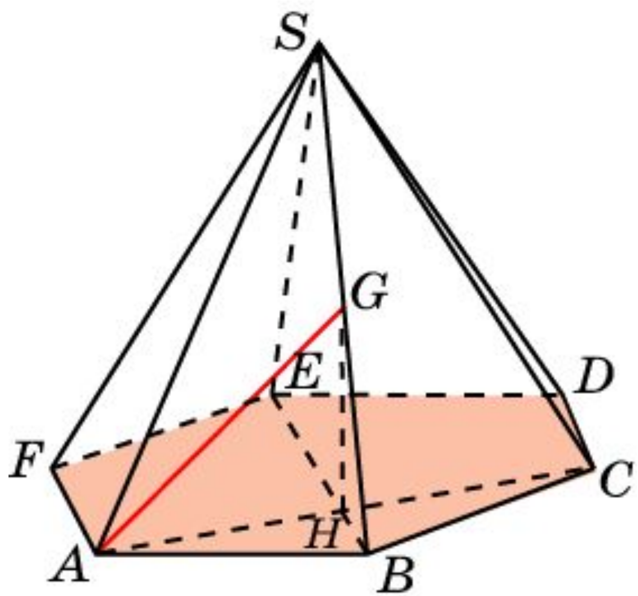



Решение. Искомый угол $\varphi$ равен углу $SAD$. Треугольник $SAD$ равносторонний. Следовательно, $\varphi = 60°$.

Ответ: 60°.

# Пирамида 7

В правильной 6-ой пирамиде *SA…F*, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, точка *G* – середина ребра *SB*. Найдите угол между прямой *AG* и плоскостью *ABC*.

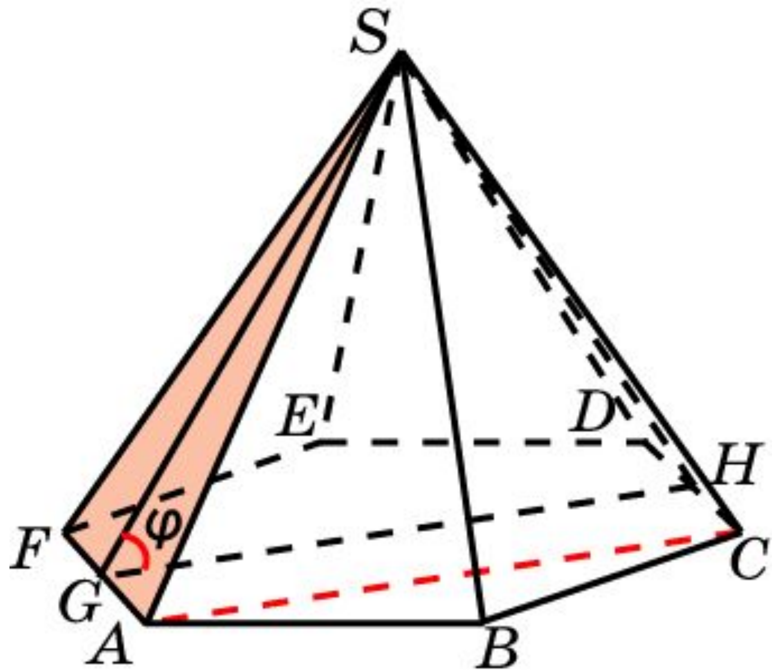



Решение. Искомый угол равен углу *GAH*. Треугольник *GAH* прямоугольный равнобедренный. Следовательно, угол равен 45°.

Ответ: 45°.

# Пирамида 8

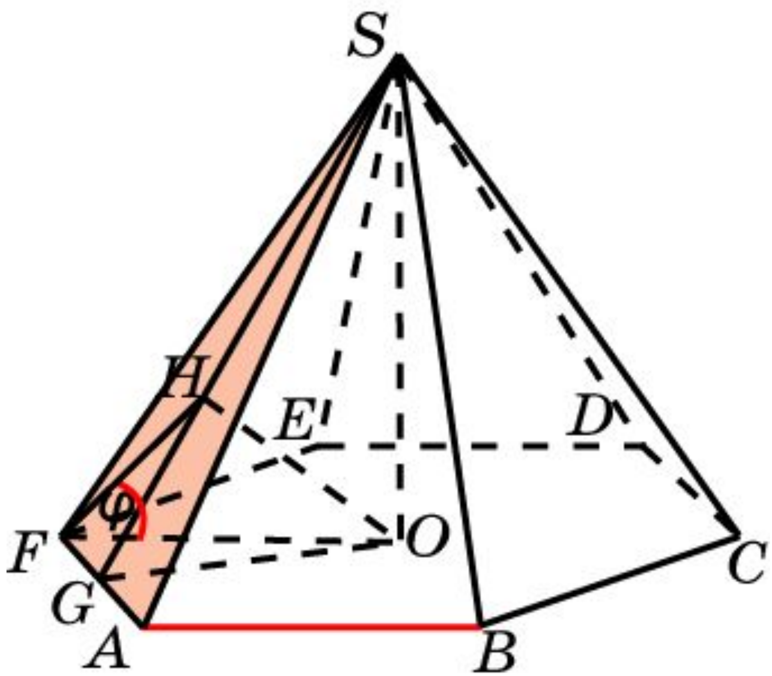
В правильной 6-ой пирамиде *SA…F*, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямой *AC* и плоскостью *SAF*.




Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

# Пирамида 9*

В правильной 6-ой пирамиде $SA...F$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямой $AB$ и плоскостью $SAF$.




Решение. Пусть $O$ – центр основания, $G$ – середина $AF$. Искомый угол $\varphi$ равен углу между прямой $FO$ и плоскостью $SAF$. Опустим из точки $O$ перпендикуляр $OH$ на плоскость $SAF$. Тогда $\varphi$ равен углу $OFH$. В треугольнике $SOG$ имеем:

$$OG = \frac{\sqrt{3}}{2},\ SO = \sqrt{3},\ SG = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Следовательно, $OH = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

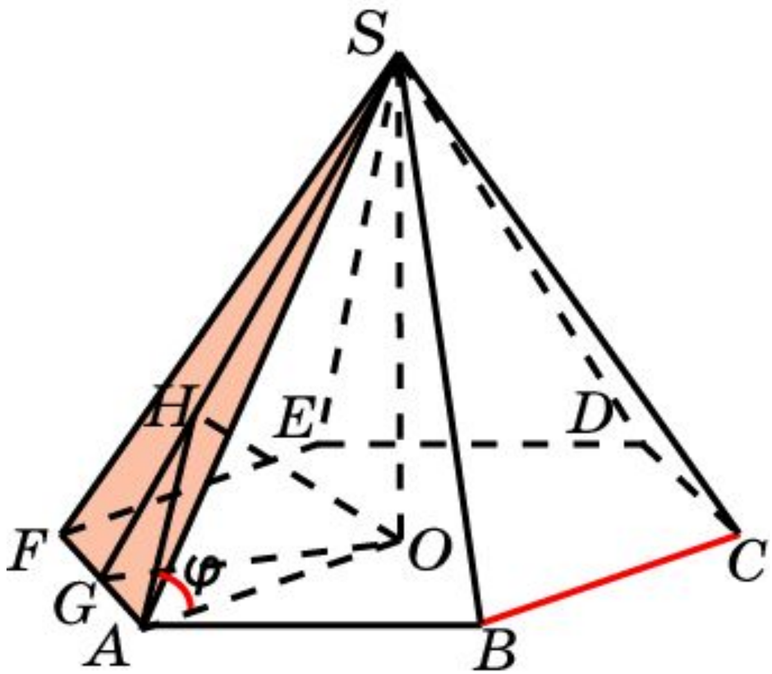
В треугольнике $OFH$ $FH = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $OF = 1$. Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

# Пирамида 10*

В правильной 6-ой пирамиде $SA\ldots F$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямой $BC$ и плоскостью $SAF$.




Решение. Пусть $O$ – центр основания, $G$ – середина $AF$. Искомый угол $\varphi$ равен углу между прямой $AO$ и плоскостью $SAF$. Опустим из точки $O$ перпендикуляр $OH$ на плоскость $SAF$. Тогда $\varphi$ равен углу $OAH$. Из решения предыдущей задачи имеем:

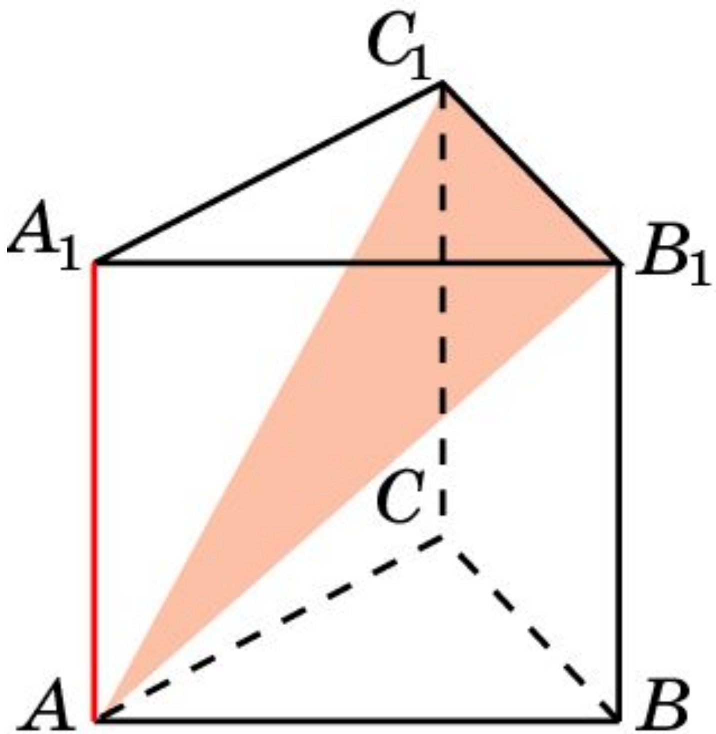
$OH = \frac{\sqrt{15}}{5}$. В треугольнике $OAH$ $OF = 1$, $AH = \frac{\sqrt{10}}{5}$. Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

# Призма 1

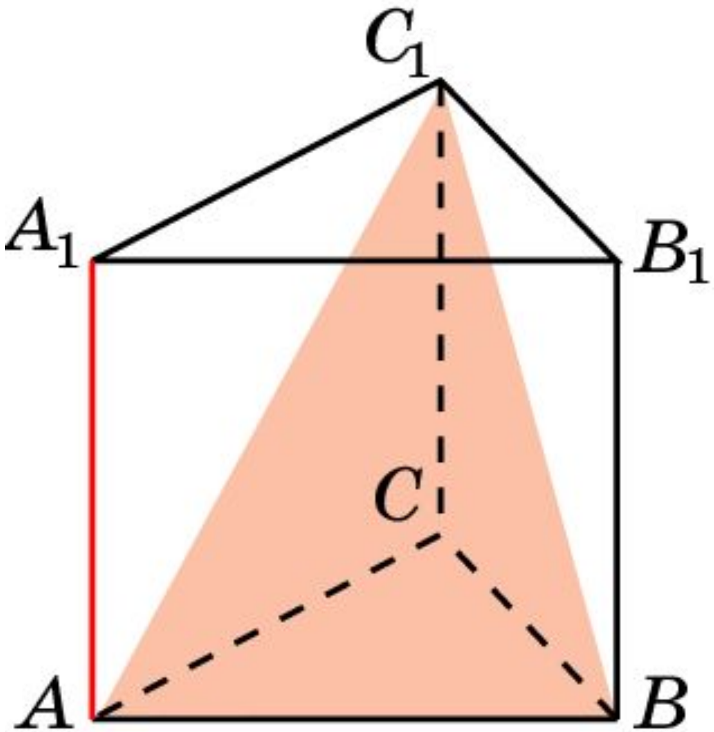
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой $AA_1$ и плоскостью $AB_1C_1$.




Ответ: $tg\,\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

# Призма 2

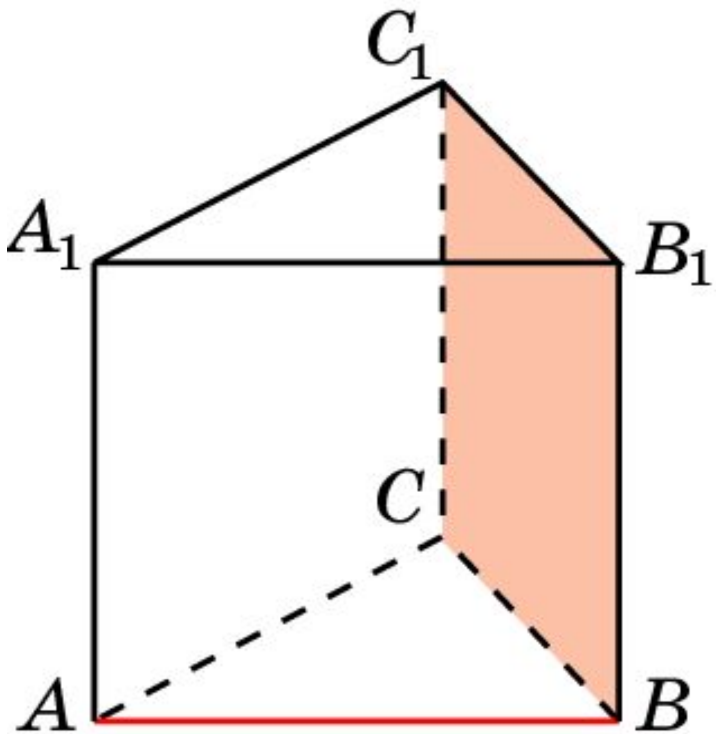
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой $AA_1$ и плоскостью $ABC_1$.




Ответ: $tg\,\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

# Призма 3

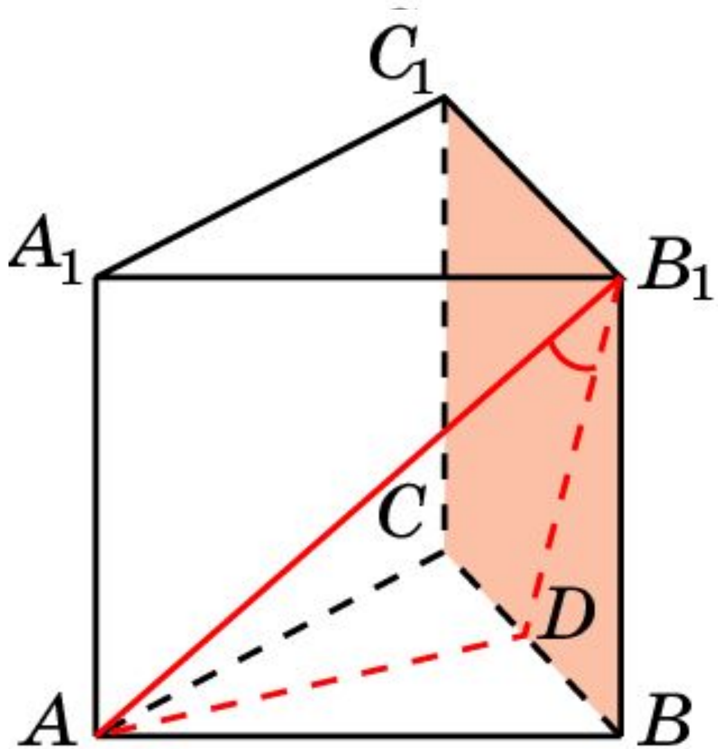
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой $AB$ и плоскостью $BB_1C_1$.




Ответ: 60°.

# Призма 4

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой $AB_1$ и плоскостью $BB_1C_1$.

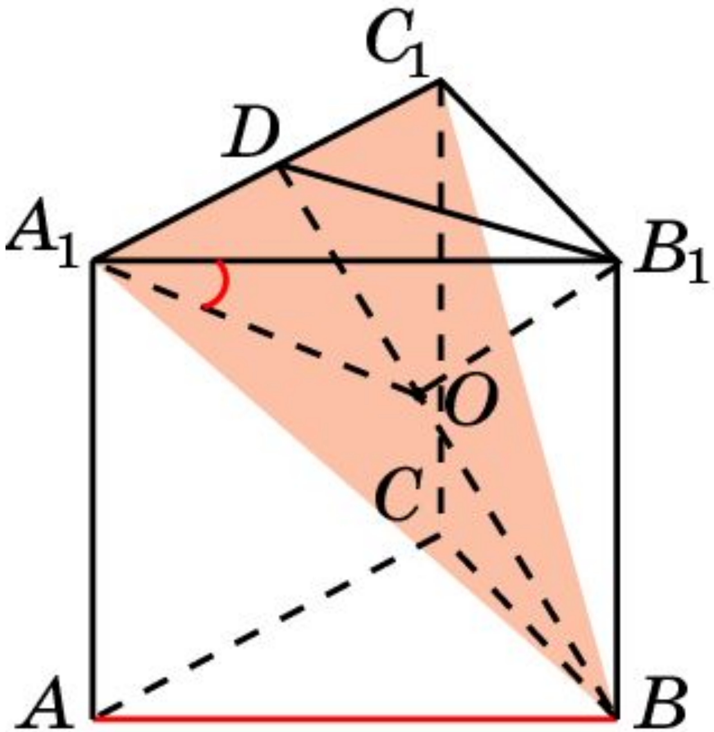



Решение: Искомый угол равен углу $B_1AD$, где $D$ – середина ребра $BC$. Следовательно,

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

# Призма 5*

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой $AB$ и плоскостью $A_1BC_1$.




Решение: Искомый угол равен углу $B_1A_1O$, где $O$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки $B_1$ на плоскость $A_1BC_1$. Из прямоугольного треугольника $BB_1D$ находим

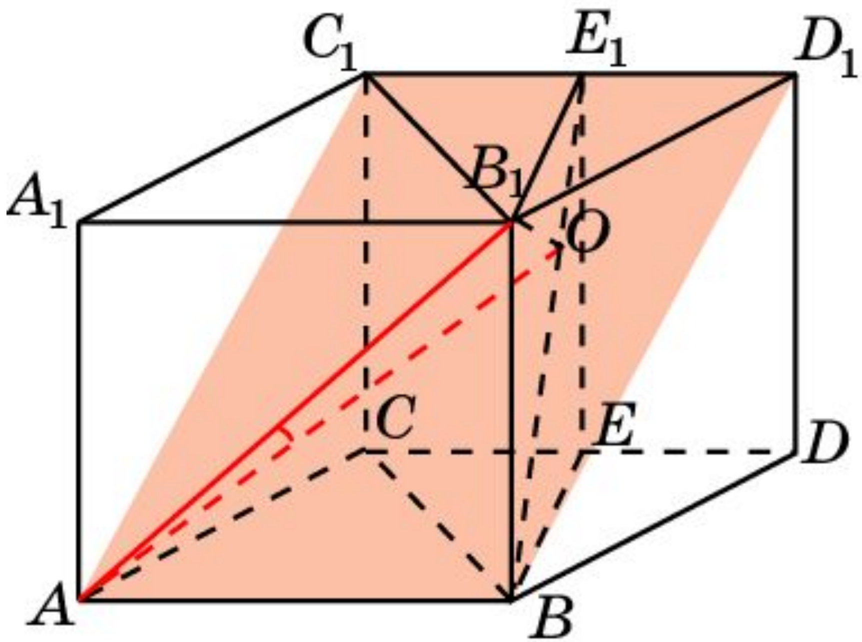
$$B_1O = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Следовательно,

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

# Призма 6*

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой $AB_1$ и плоскостью и $ABC_1$.



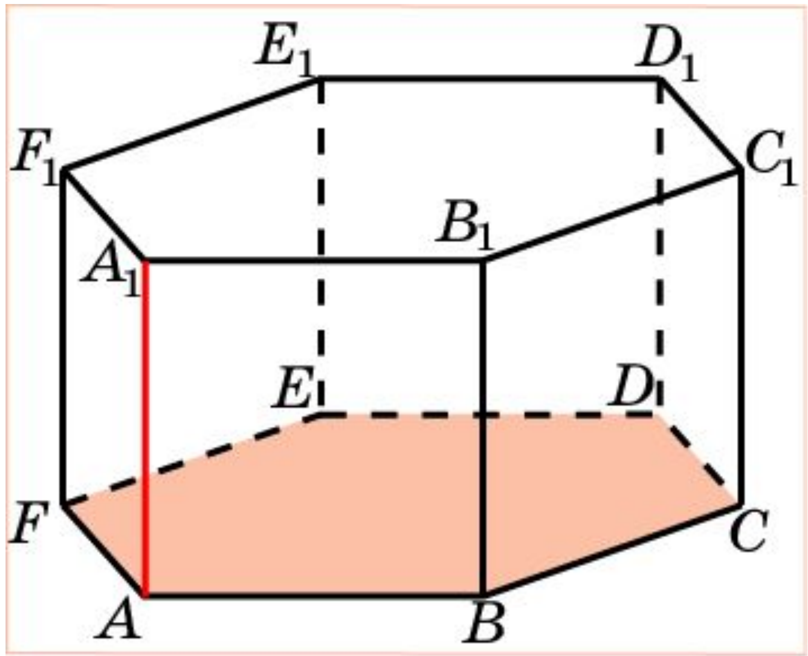

Решение: Достроим треугольную призму до четырехугольной. $BEE_1B_1$ – сечение, перпендикулярное $CD$. $B_1O$ перпендикулярен $BE_1$. Искомый угол равен углу $B_1AO$. Из прямоугольного треугольника $BB_1E_1$ находим

$$B_1O = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Следовательно, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{42}}{14}.$

# Призма 7

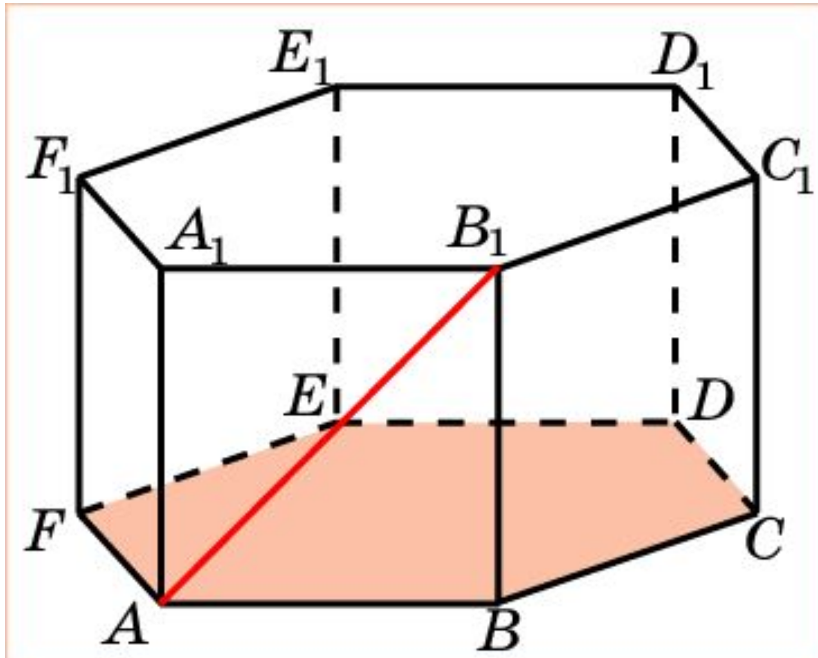
В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой $AA_1$ и плоскостью $ABC$.




Ответ: 90°.

# Призма 8

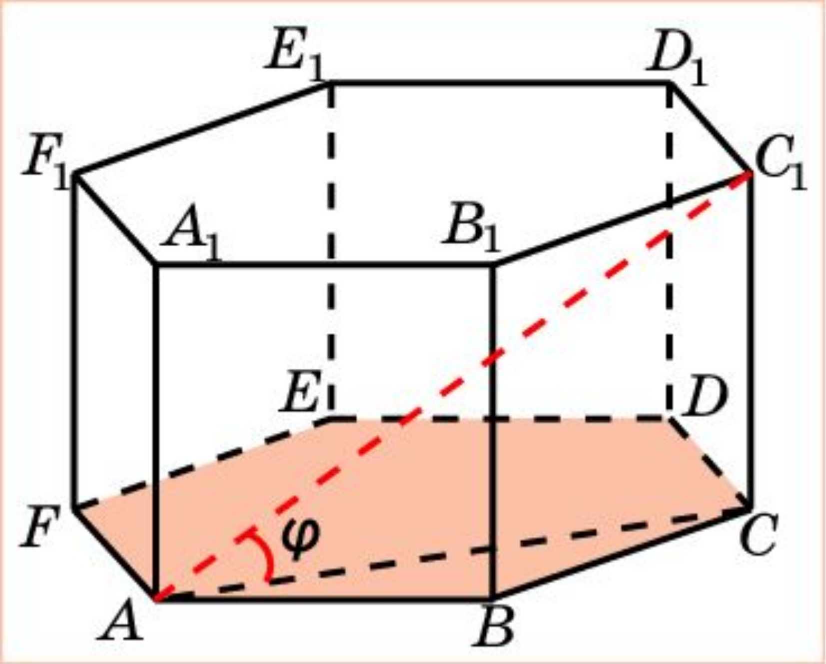
В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой $AB_1$ и плоскостью $ABC$.




Ответ: 45º.

# Призма 9

В правильной 6-й призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой $AC_1$ и плоскостью $ABC$.

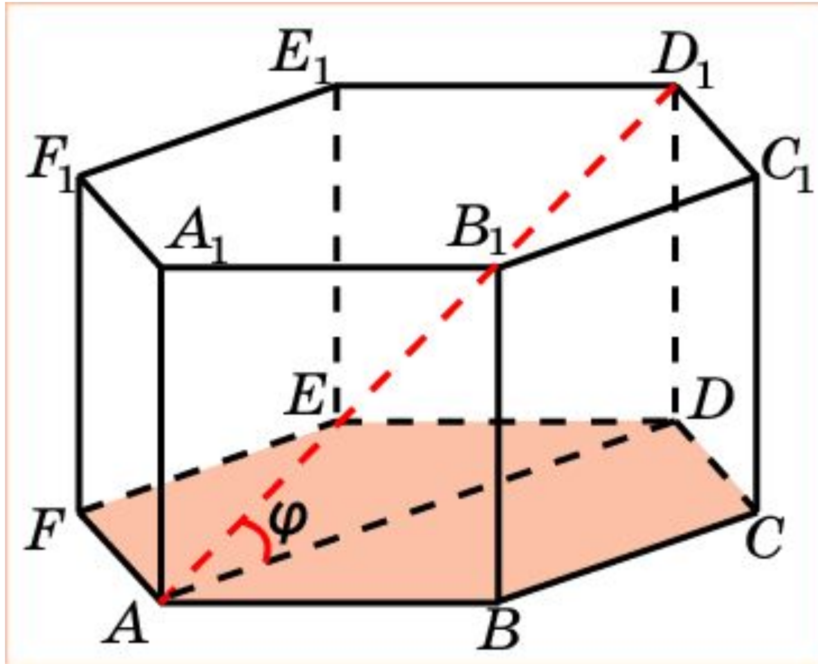



Решение: Искомый угол $\varphi$ равен углу $C_1AC$.
В прямоугольном треугольнике $ACC_1$ $CC_1 = 1$, $AC_1 = 2$.
Следовательно, $\varphi = 30^\circ$.

Ответ: $30^\circ$.

# Призма 10

В правильной 6-й призме $A…F_1$, ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой $AD_1$ и плоскостью $ABC$.




Решение: Искомый угол φ равен углу $D_1AD$.

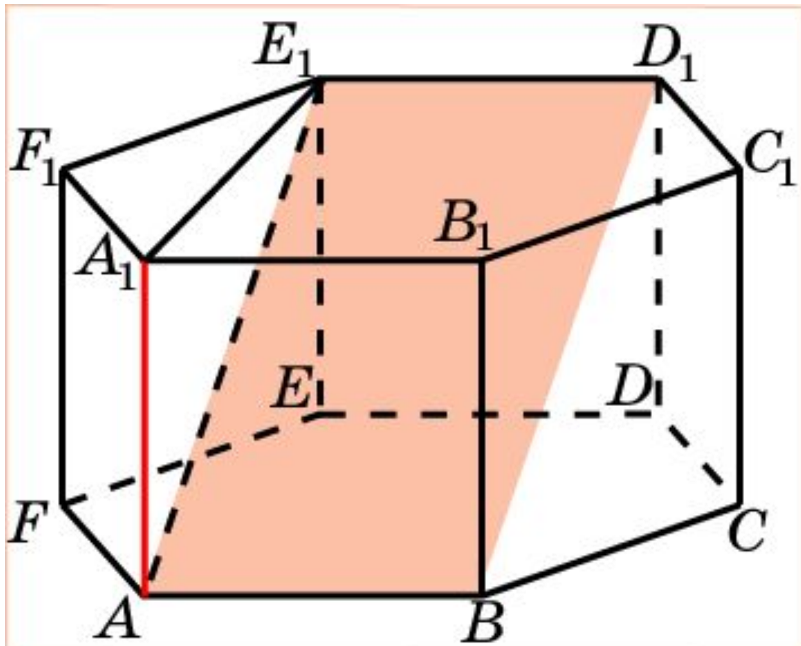
В прямоугольном треугольнике $ADD_1$ имеем: $DD_1 = 1$, $AD = 2$.

Следовательно, $tg\varphi = \frac{1}{2}$.

Ответ: $tg\varphi = \frac{1}{2}$.

# Призма 11

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой $AA_1$ и плоскостью $ABD_1$.

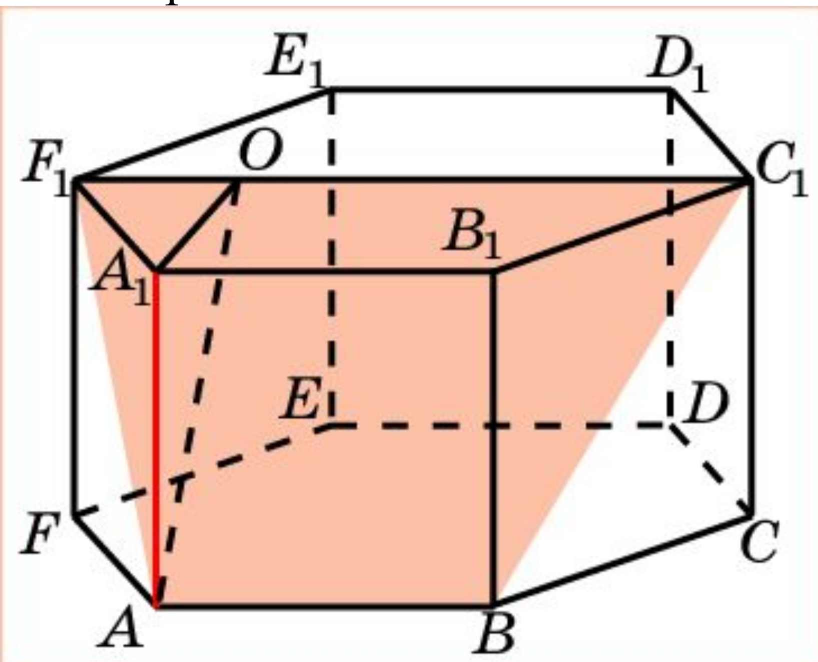



Решение: Искомый угол φ равен углу $A_1AE_1$. В прямоугольном треугольнике $A_1AE_1$ имеем: $AA_1 = 1$; $A_1E_1 = \sqrt{3}$. Следовательно, φ = 60°.

Ответ: 60°.

# Призма 12

В правильной 6-й призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой $AA_1$ и плоскостью $ABC_1$.




Решение: Искомый угол φ равен углу $A_1AO$, где $O$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки $A_1$ на прямую $C_1F_1$.

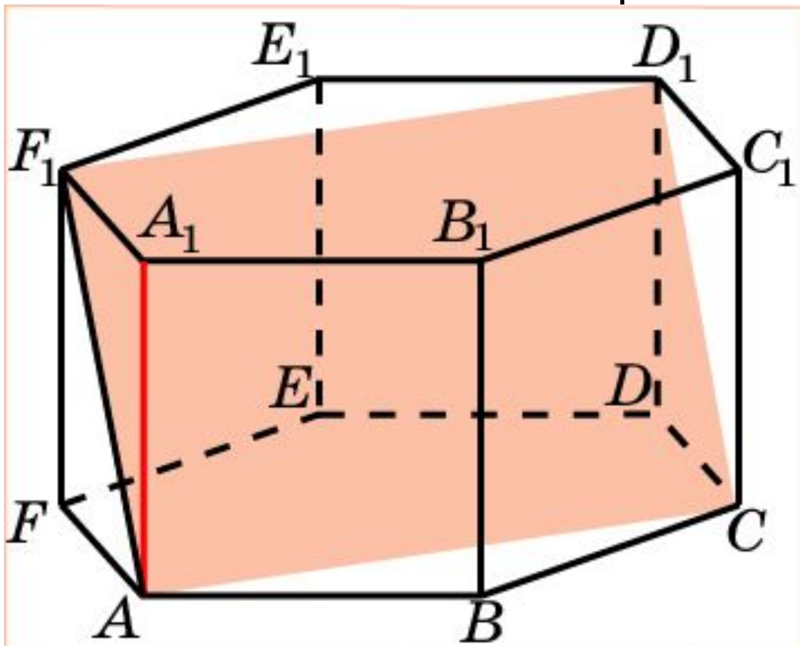
В прямоугольном треугольнике $A_1AO$ имеем: $AA_1 = 1$; $A_1O = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $tg\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $tg\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

# Призма 13

В правильной 6-й призме $A \dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой $AA_1$ и плоскостью $ACD_1$.

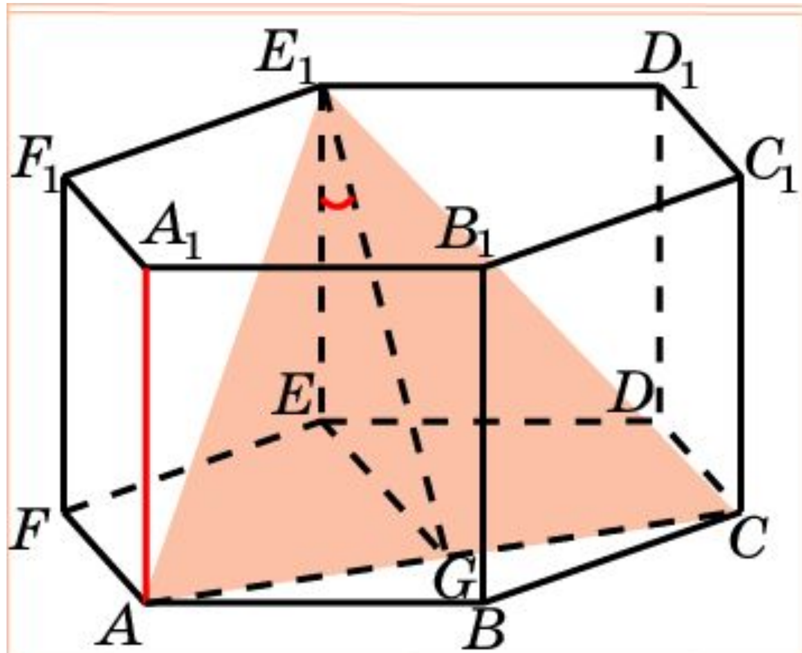



Решение: Искомый угол φ равен углу $A_1AF_1$. В прямоугольном треугольнике $A_1AF_1$ имеем: $AA_1 = 1$; $A_1F_1 = 1$. Следовательно, $\varphi = 45^o$.

Ответ: $45^o$.

# Призма 14

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите тангенс между прямой $AA_1$ и плоскостью $ACE_1$.




Решение: Из точки $E_1$ опустим перпендикуляр $E_1G$ на прямую $AC$. Искомый угол $\varphi$ равен углу $EE_1G$.

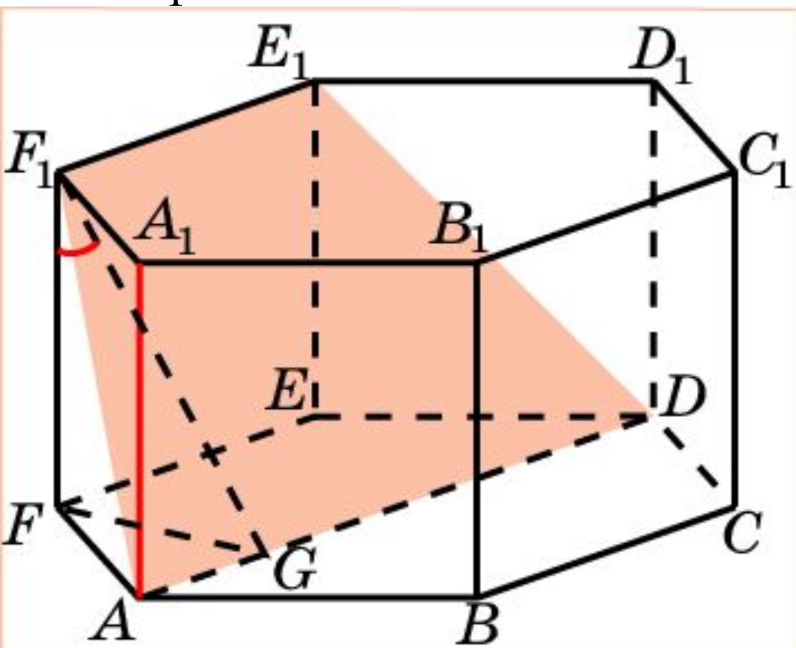
В прямоугольном треугольнике $EE_1G$ имеем: $EE_1 = 1$; $EG = \frac{3}{2}$.

Следовательно, $tg\varphi = \frac{3}{2}$.

Ответ: $tg\varphi = \frac{3}{2}$.

# Призма 15

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой $AA_1$ и плоскостью $ADE_1$.




Решение: Из точки $F_1$ опустим перпендикуляр $F_1G$ на прямую $AD$. Искомый угол $\varphi$ равен углу $FF_1G$.

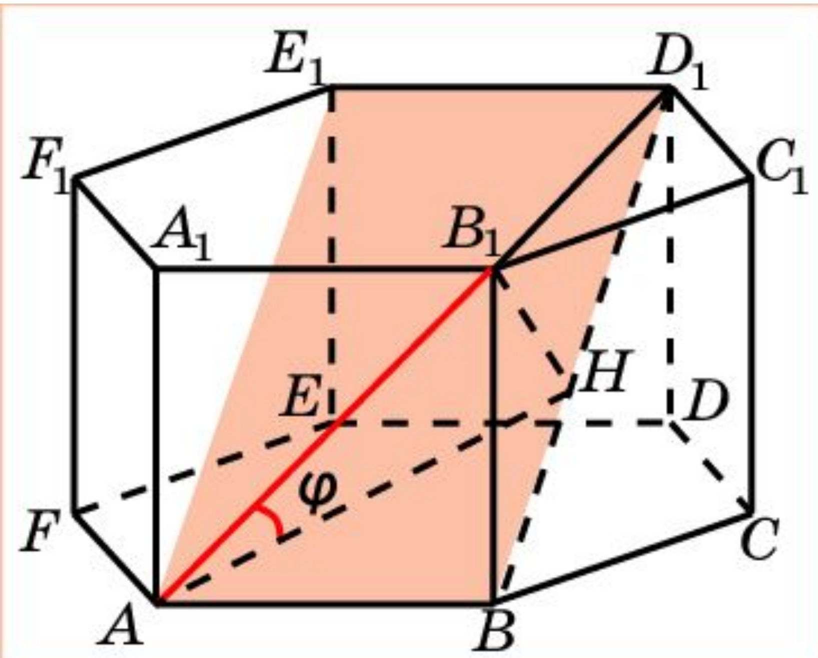
В прямоугольном треугольнике $FF_1G$ имеем: $FF_1 = 1$; $FG = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $tg\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $tg\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

# Призма 16*

В правильной 6-й призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой $AB_1$ и плоскостью $ABD_1$.




Решение: Из точки $B_1$ опустим перпендикуляр $B_1H$ на прямую $BD_1$. Искомый угол φ равен углу $B_1AH$. В прямоугольном треугольнике $BB_1D_1$ имеем: $BB_1 = 1$; $B_1D_1 = \sqrt{3}$, $BD_1 = 2$. Следовательно, угол $BD_1B_1$ равен 30° и, значит, $B_1H = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

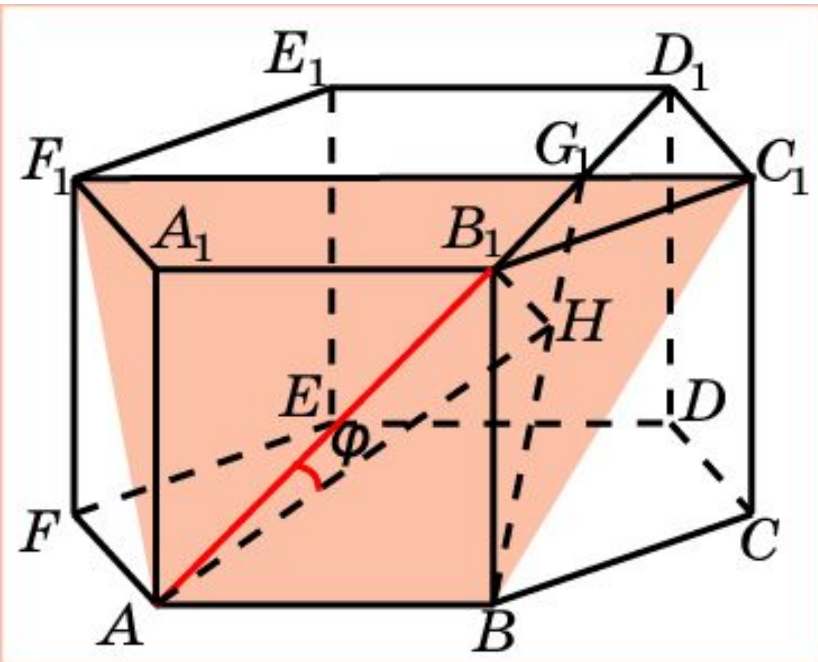
В прямоугольном треугольнике $AB_1H$ имеем: $AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1H = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Ответ: $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

# Призма 17*

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой $AB_1$ и плоскостью $ABC_1$.




Решение: Проведем прямые $C_1F_1$, $B_1D_1$ и обозначим $G_1$ их точку пересечения. Из точки $B_1$ опустим перпендикуляр $B_1H$ на прямую $BG_1$. Искомый угол φ равен углу $B_1AH$. В прямоугольном треугольнике $BB_1G_1$ имеем:

$$BB_1 = 1;\ B_1G_1 = \frac{\sqrt{3}}{2},\ BG_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

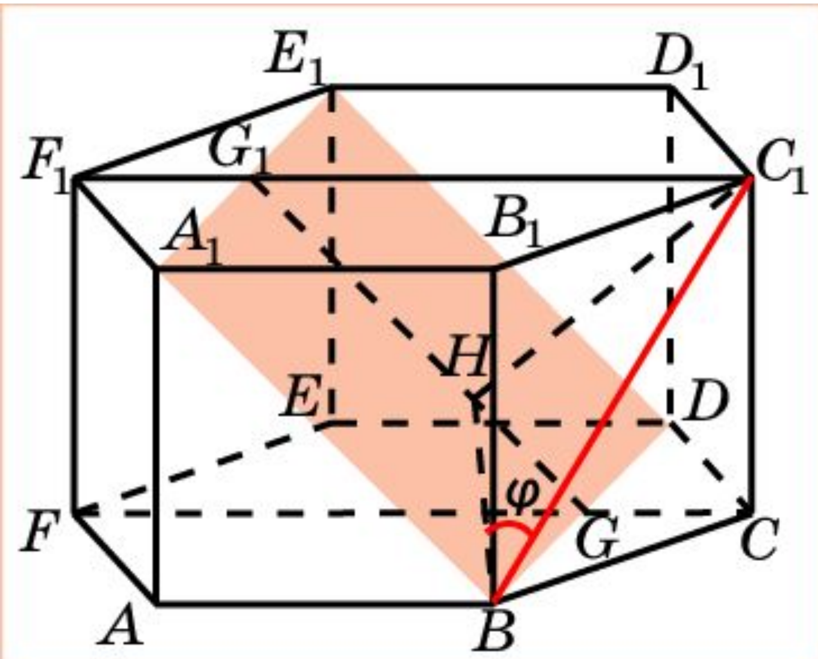
Из подобных треугольников $BB_1G_1$ и $B_1HG_1$ находим $B_1H = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

В прямоугольном треугольнике $AB_1H$ имеем $B_1H = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$, $AB_1 = \sqrt{2}$.

Следовательно, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$. Ответ: $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

# Призма 18*

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой $BC_1$ и плоскостью $BDE_1$.



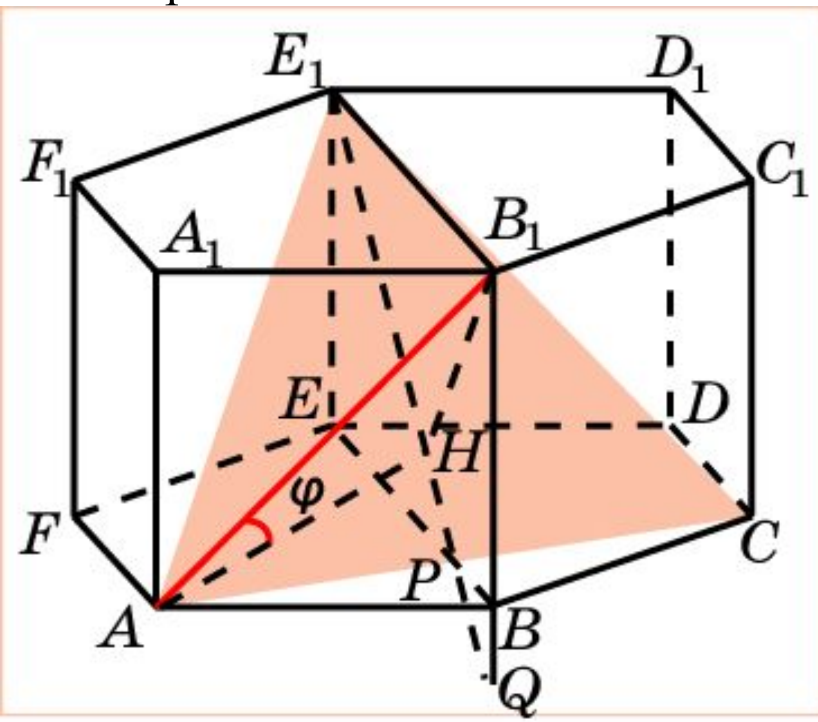

Решение: Плоскость $CFF_1$ перпендикулярна плоскости $BDE_1$ и пересекает ее по прямой $GG_1$. Прямая $GG_1$ образует с прямой $C_1F_1$ угол 45°. Из вершины $C_1$ опустим перпендикуляр $C_1H$ на прямую $GG_1$. В прямоугольном треугольнике $C_1G_1H$ имеем: $C_1G_1 = \frac{3}{2}$, $\angle\ C_1G_1H = 45°$. Следовательно, $C_1H = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

В прямоугольном треугольнике $BC_1H$ имеем: $BC_1 = \sqrt{2}$; $C_1H = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Следовательно, $\sin\varphi = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\sin\varphi = \frac{3}{4}$.

# Призма 19*

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой $AB_1$ и плоскостью $ACE_1$.




Решение: Плоскость $BB_1E_1$ перпендикулярна плоскости $ACE_1$ и пересекает ее по прямой $QE_1$. В прямоугольном треугольнике $QB_1E_1$ имеем: $QB_1 = \dfrac{4}{3}$, $B_1E_1 = 2$.

Высота $B_1H$ этого треугольника равна $\dfrac{4\sqrt{13}}{13}$.

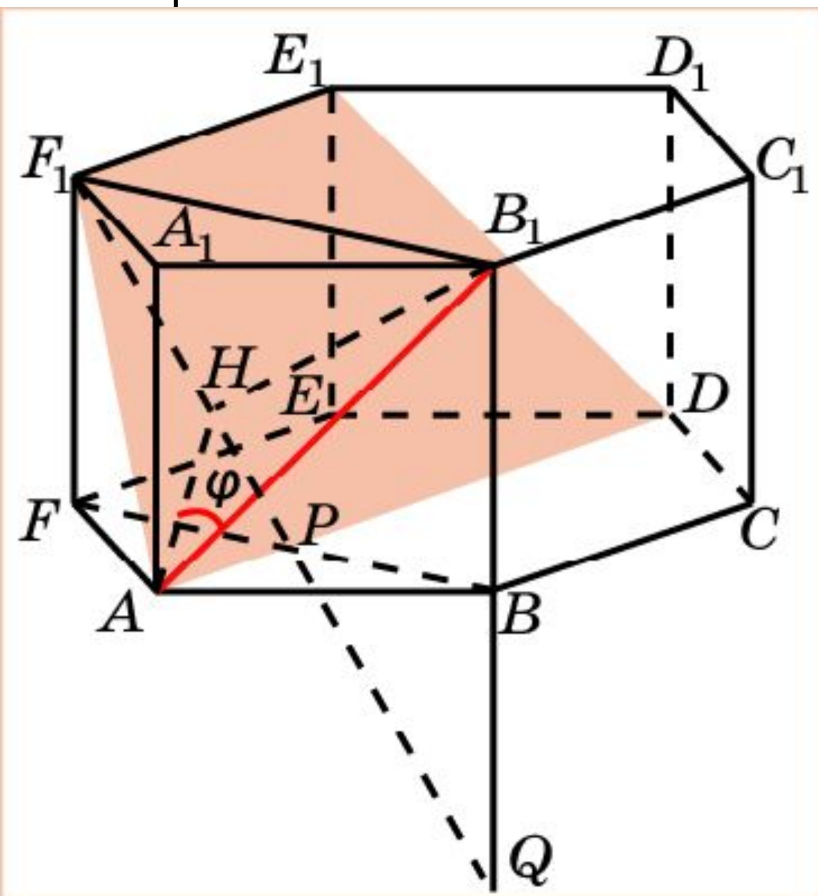
В прямоугольном треугольнике $AB_1H$ имеем: $AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1H = \dfrac{4\sqrt{13}}{13}$.

Следовательно, $\sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{26}}{13}$.

Ответ: $\sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{26}}{13}$.

# Призма 20*

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой $AB_1$ и плоскостью $ADE_1$.




Решение: Плоскость $BB_1F_1$ перпендикулярна плоскости $ADE_1$ и пересекает ее по прямой $QF_1$. В прямоугольном треугольнике $QB_1F_1$ имеем: $QB_1 = 2$, $B_1F_1 = \sqrt{3}$. Высота $B_1H$ этого треугольника равна $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

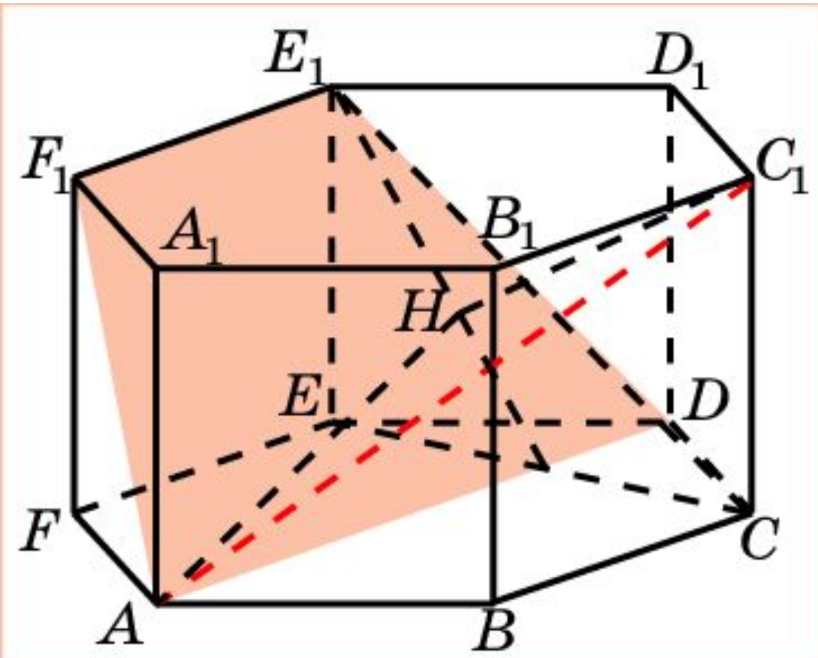
В прямоугольном треугольнике $AB_1H$ имеем: $AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1H = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$,

Следовательно, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

Ответ: $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

# Призма 21*

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой $AC_1$ и плоскостью $ADE_1$.




Решение: Прямая $B_1C_1$ параллельна плоскости $ADE_1$. Следовательно, расстояние от точки $C_1$ до плоскости $ADE_1$ равно расстоянию от точки $B_1$ до этой плоскости и равно $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

В прямоугольном треугольнике $AC_1H$ имеем: $AC_1 = 2$, $C_1H = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

Следовательно, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.