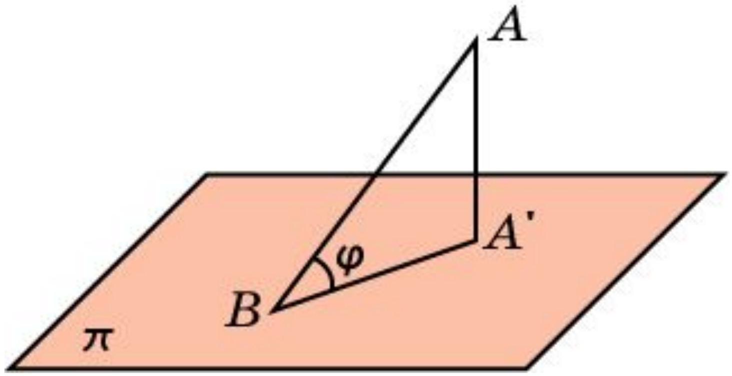
УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

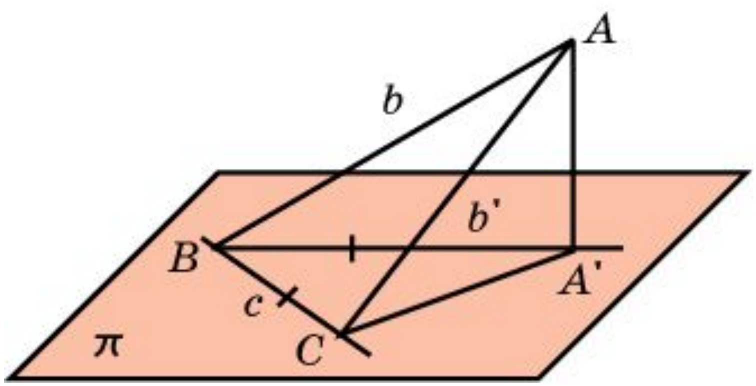
Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и ее ортогональной проекцией на данную плоскость.



Считают также, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол.

Теорема

Угол между наклонной и плоскостью является наименьшим из всевозможных углов между этой наклонной и прямыми, лежащими в данной плоскости.



Доказательство. Пусть *AB* - наклонная к плоскости π, *A'B* - ее ортогональная проекция, *c* - прямая в плоскости π, проходящая через точку *B*.

Докажем, что угол *ABA'* меньше угла *ABC*. Для этого на прямой *c* отложим отрезок *BC*, равный *A'B*. В треугольниках *ABA'* и *ABC* сторона *AB* общая, *A'B* = *BC* и *AA'* < *AC*. Следовательно, угол *ABA'* меньше угла *ABC*.

Упражнение 1

Прямые a и b образуют с плоскостью α равные углы. Будут ли эти прямые параллельны?

Ответ: Нет.

Упражнение 2

Две плоскости образуют с данной прямой равные углы. Как расположены плоскости относительно друг друга?

Ответ: Параллельны или пересекаются.

Упражнение 3

Под каким углом к плоскости нужно провести отрезок, чтобы его ортогональная проекция на эту плоскость была вдвое меньше самого отрезка?

Ответ: 60°.

Упражнение 4

Может ли катет равнобедренного прямоугольного треугольника образовать с плоскостью, проходящей через гипотенузу, угол в 60°? Каков наибольший угол между катетом и этой плоскостью?

Ответ: Нет, 45°.

Упражнение 5

Одна из двух скрещивающихся прямых пересекает плоскость под углом 60°, а другая перпендикулярна этой плоскости. Найдите угол между данными скрещивающимися прямыми.

Ответ: 30°.

Упражнение 6

Будут ли в пирамиде боковые ребра равны, если они образуют равные углы с плоскостью основания?

Ответ: Да.

Упражнение 7

Через сторону квадрата проведена плоскость, составляющая с диагональю квадрата угол 30°. Найдите углы, которые образуют с плоскостью стороны квадрата, наклонные к ней.

Ответ: 45°.

Упражнение 8

Основание равнобедренного треугольника лежит в плоскости π (плоскость треугольника не совпадает с плоскостью π). Какой из углов больше: угол наклона боковой стороны к плоскости π или угол наклона высоты, опущенной на основание треугольника, к плоскости π?

Ответ: Угол наклона высоты.

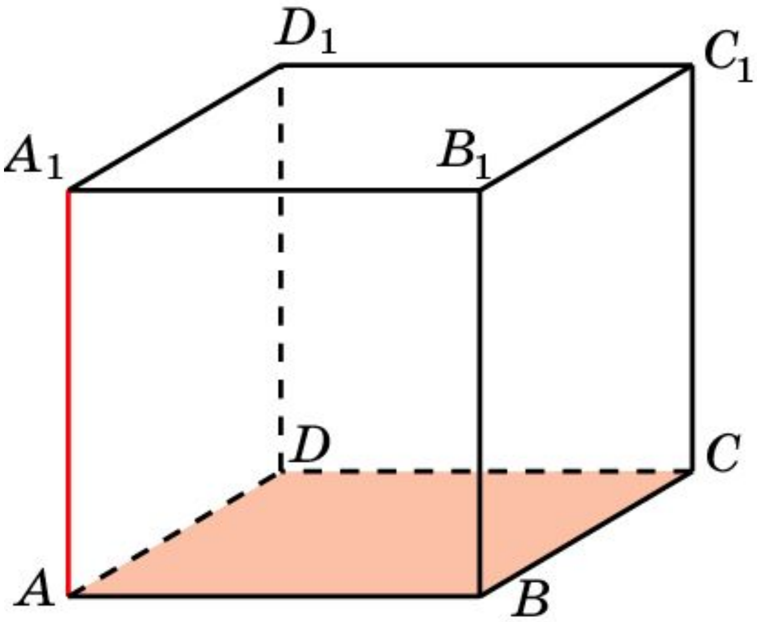
Упражнение 9

Из вершины A квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости проведен отрезок AK, равный 3. Из точки K опущены перпендикуляры на стороны BC и CD. Перпендикуляр из точки K к стороне BC равен 6. Найдите углы, которые образуют эти перпендикуляры с плоскостью квадрата.

Ответ: 30°.

Куб 1

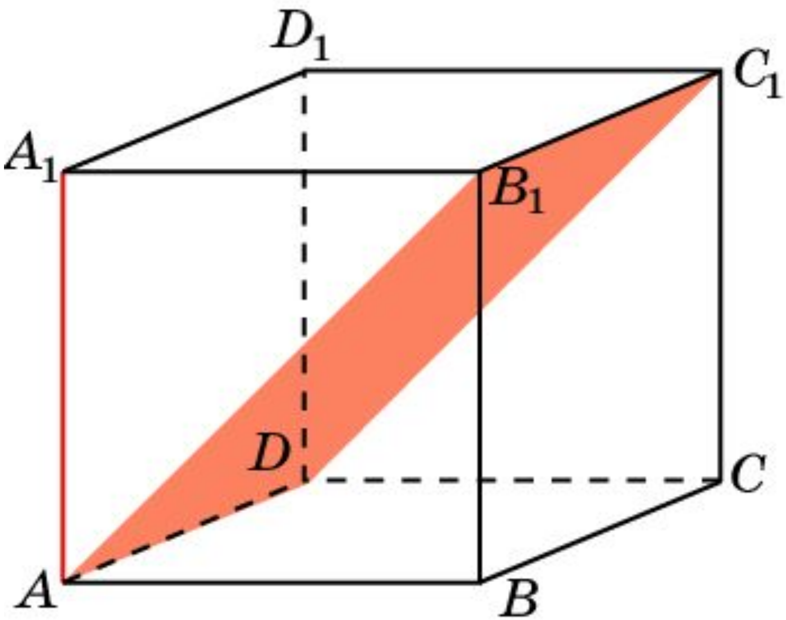
В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABC.



Ответ: 90°.

Куб 2

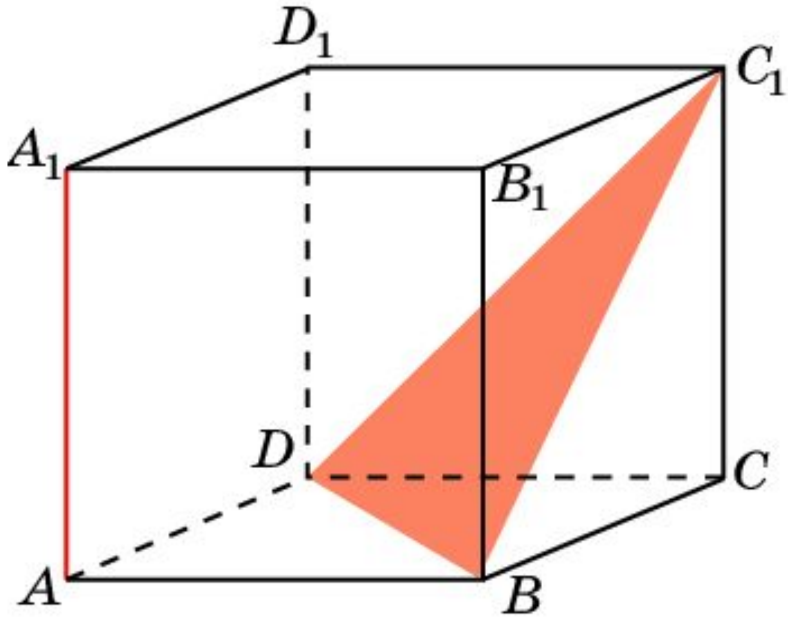
В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1.



Ответ: 45°.

Куб 3

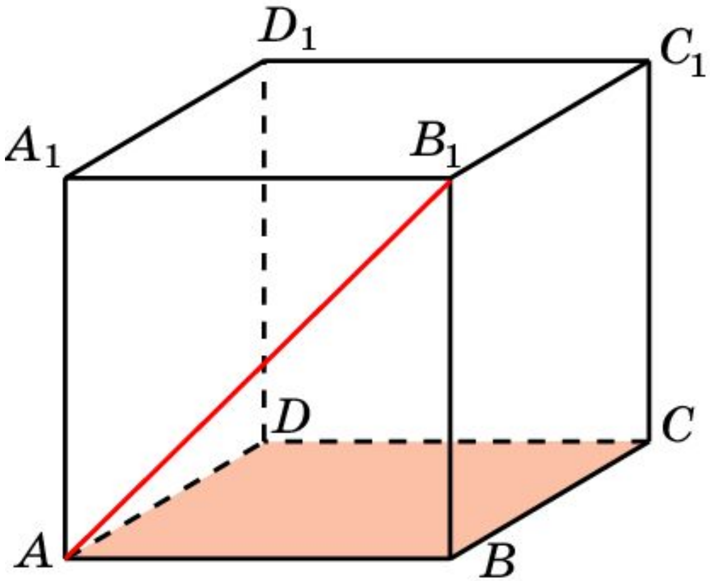
В кубе $A\ldots D_1$ найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D.



Ответ: $tg\,\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Куб 4

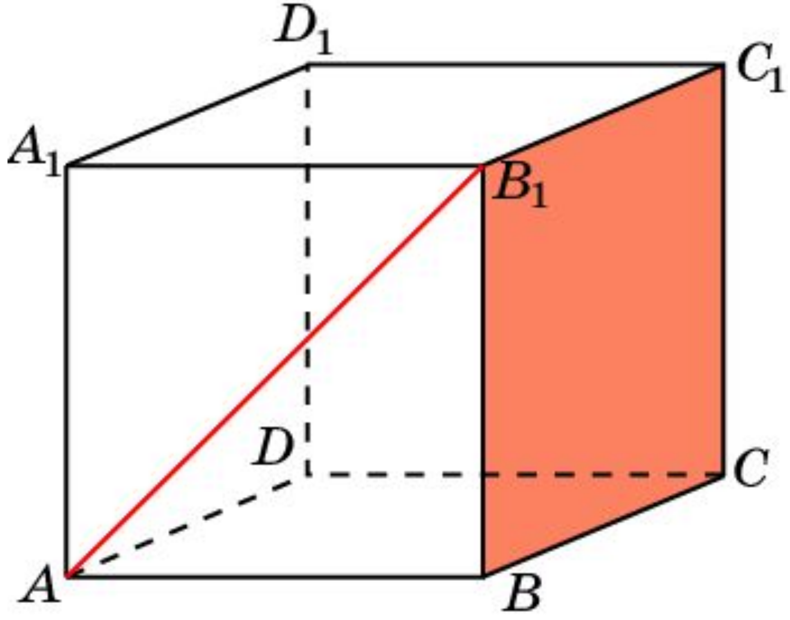
В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC.



Ответ: 45°.

Куб 5

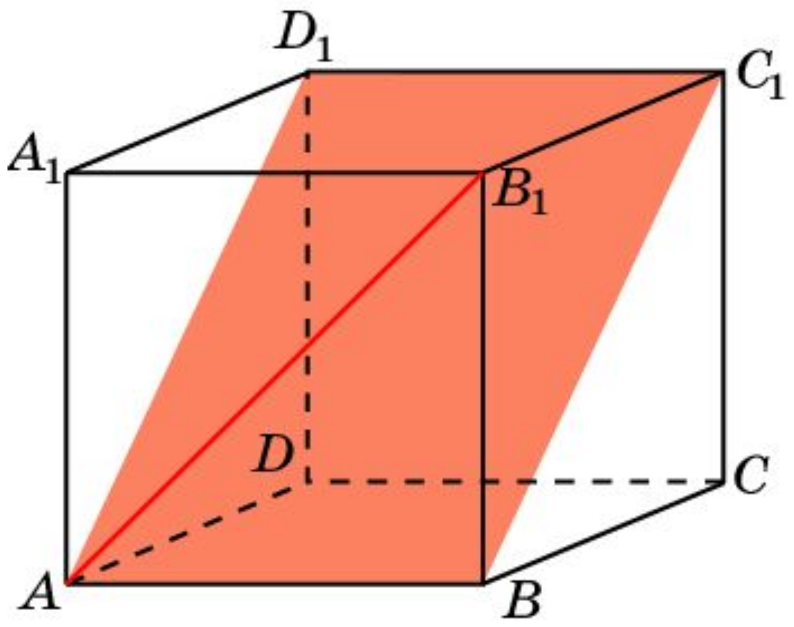
В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BCC_1.



Ответ: 45°.

Куб 6

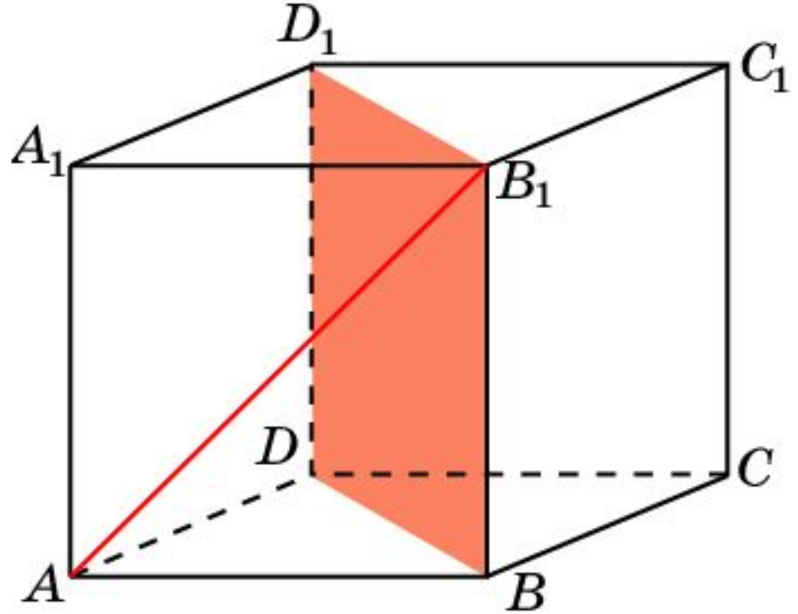
В кубе $A…D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.



Ответ: 30º.

Куб 7

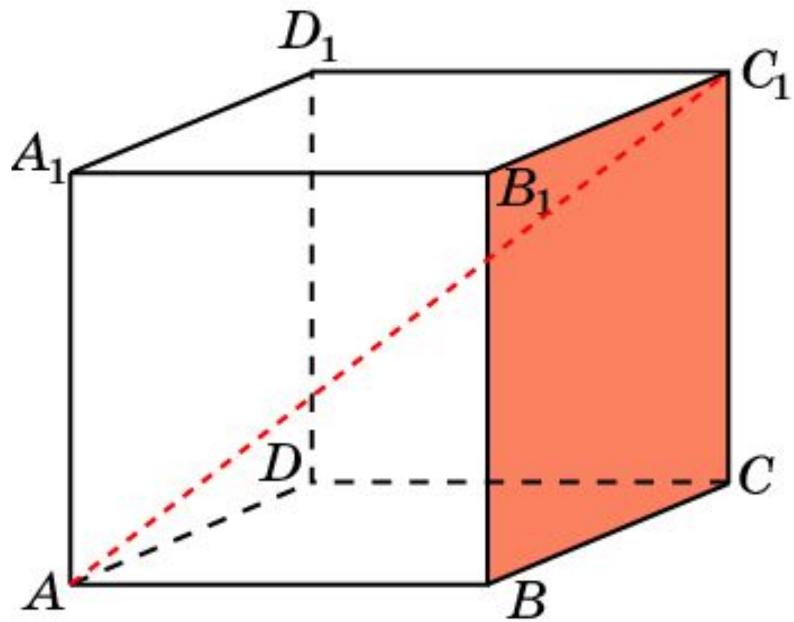
В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BB_1D_1.



Ответ: 30°.

Куб 8

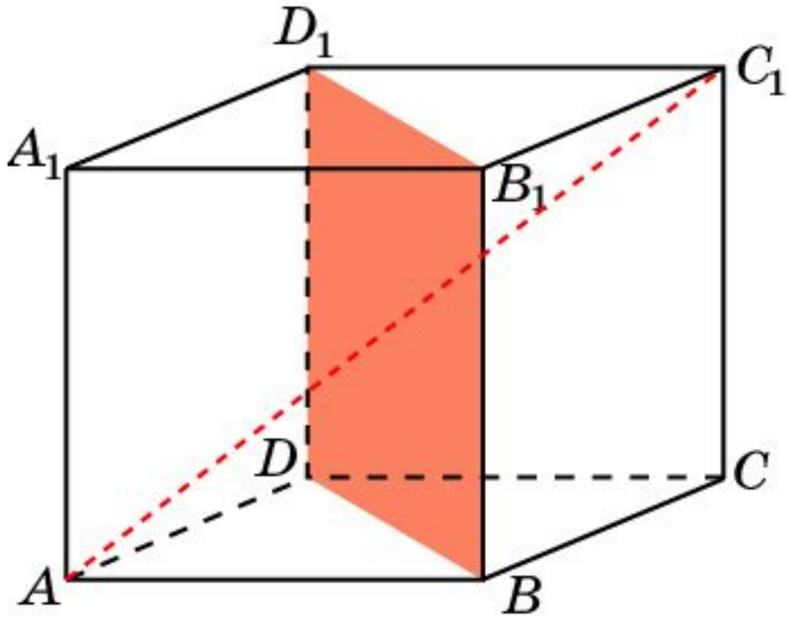
В кубе $A\ldots D_1$ найдите синус угла между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.



Ответ: $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Куб 9

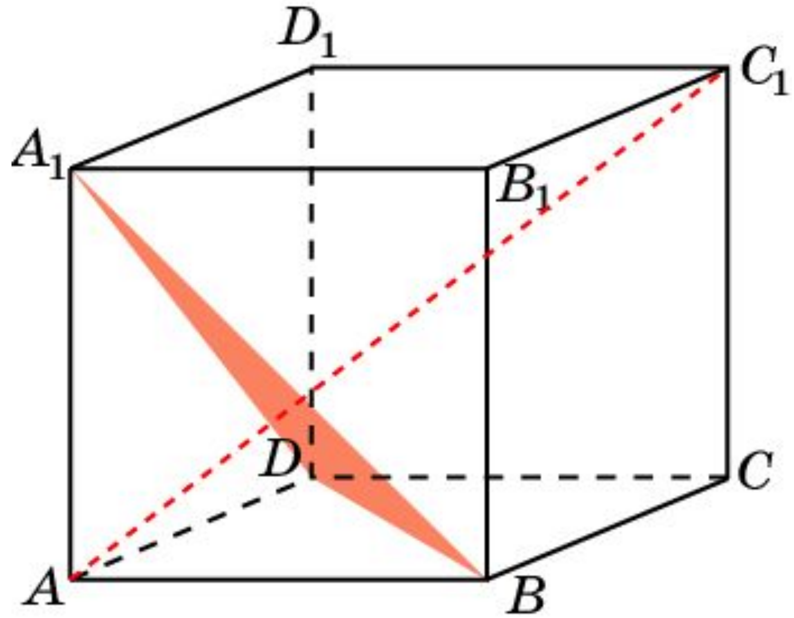
В кубе $A\ldots D_1$ найдите синус угла между прямой AC_1 и плоскостью BB_1D_1.



Ответ: $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

Куб 10

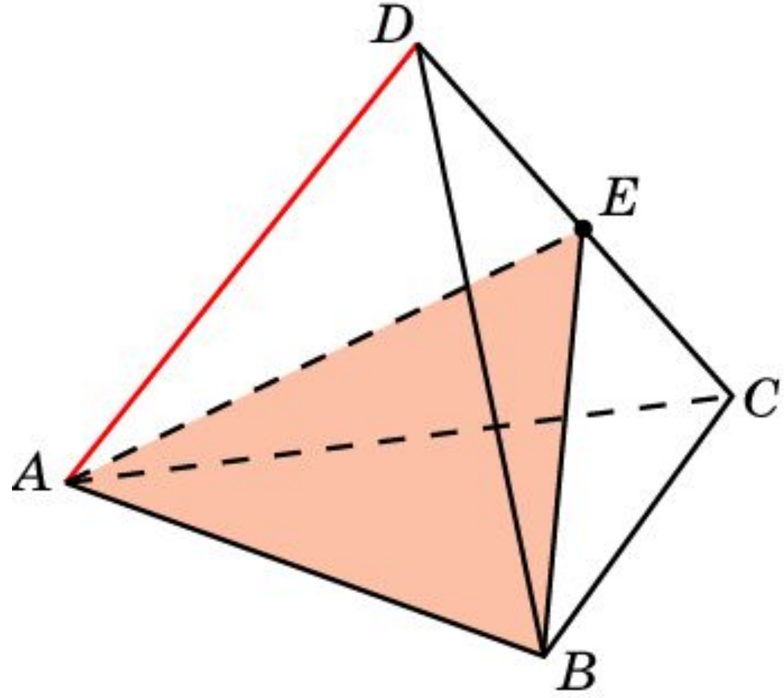
В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BA_1D.



Ответ: 90°.

Пирамида 1

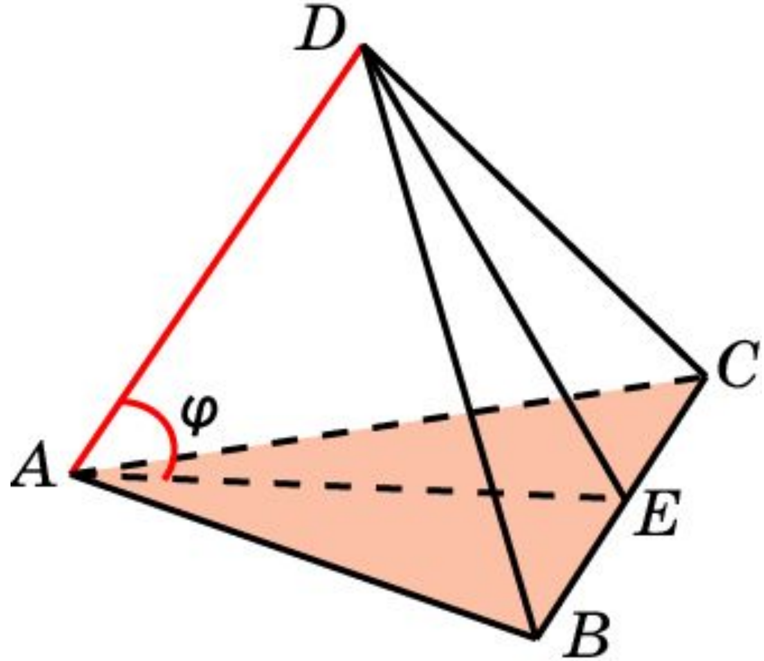
В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E – середина ребра CD. Найдите угол между прямой AD и плоскостью ABE.



Ответ: 30°.

Пирамида 2

В правильном тетраэдре *ABCD* найдите косинус угла между прямой *AD* и плоскостью *ABC*.



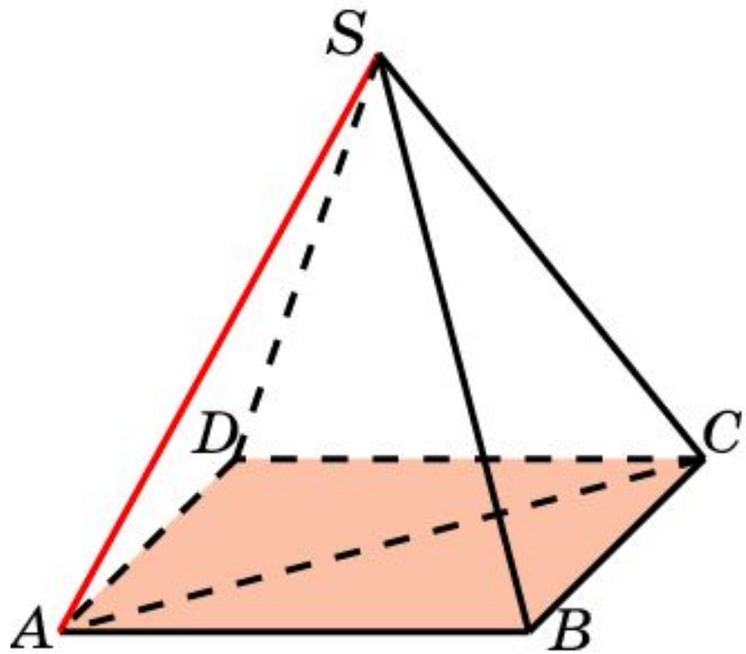
Решение. Пусть *E* – середина ребра *BC*. Искомый угол φ равен углу *DAE*. В треугольнике *DAE* имеем: $AD = 1$, $AE = DE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Используя теорему косинусов, получим $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Пирамида 3

В правильной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой *SA* и плоскостью *ABC*.

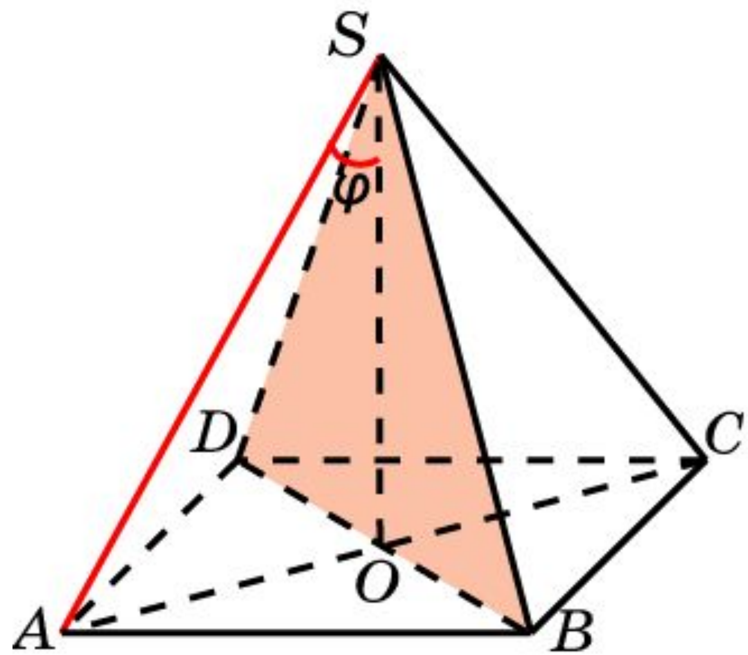


Решение: Искомый угол равен углу *SAC*. В треугольнике *SAC* имеем: $SA = SC = 1$, $AC = \sqrt{2}$. Следовательно, искомый угол равен 45°.

Ответ: 45°.

Пирамида 4

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой SA и плоскостью SBD.

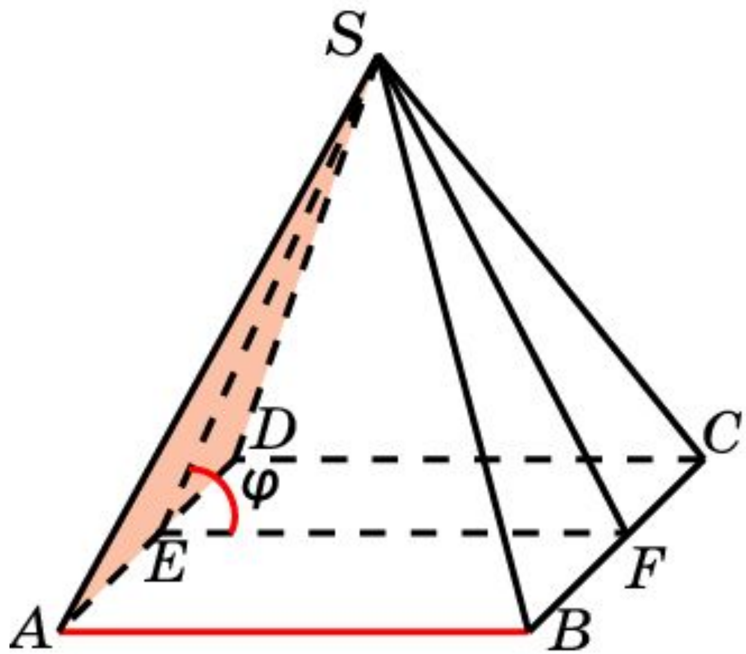


Решение: Искомый угол равен углу SOA, где O – середина BD. В прямоугольном треугольнике SOA имеем: $SA = 1$, $AO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, искомый угол φ равен 45°.

Ответ: 45°.

Пирамида 5

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SAD.



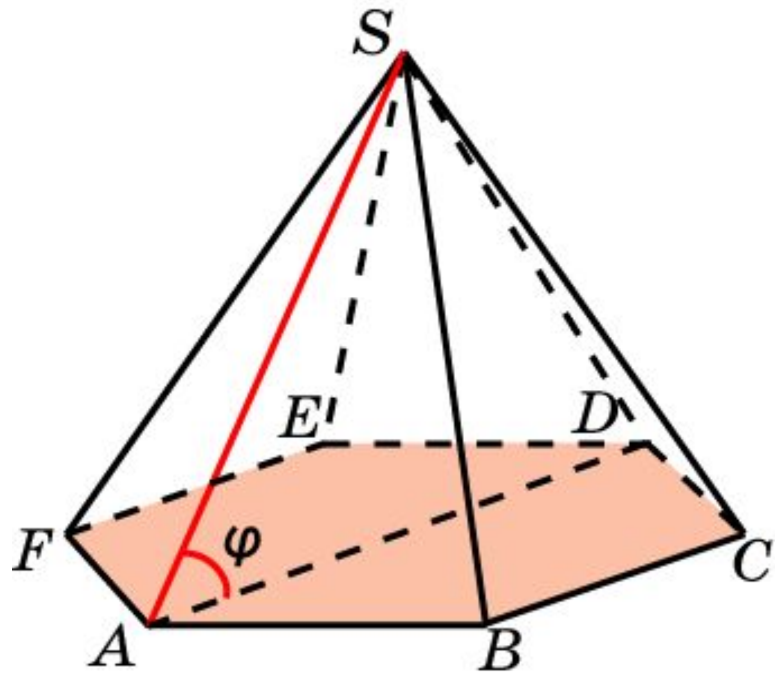
Решение. Пусть E, F – середины ребер AD и BC. Искомый угол φ равен углу SEF. В треугольнике SEF имеем: $EF = 1$, $SE = SF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Используя теорему косинусов, получим $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Пирамида 6

В правильной 6-ой пирамиде $SA\ldots F$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите угол между прямой SA и плоскостью ABC.

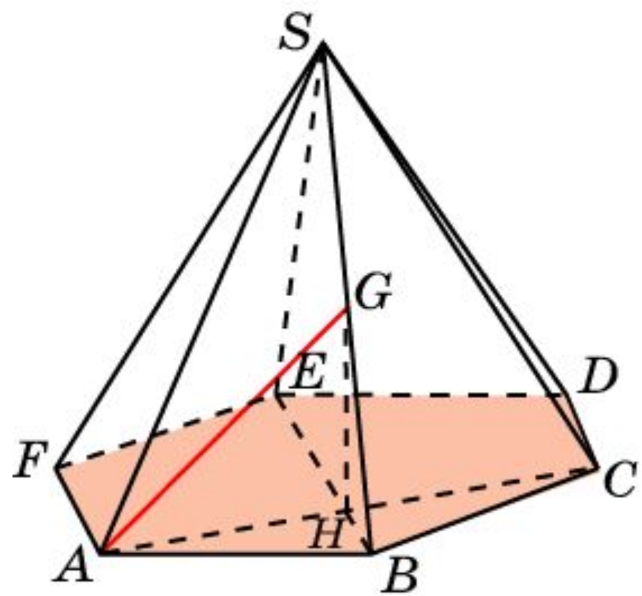


Решение. Искомый угол φ равен углу SAD. Треугольник SAD равносторонний. Следовательно, $\varphi = 60°$.

Ответ: $60°$.

Пирамида 7

В правильной 6-ой пирамиде $SA…F$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, точка G – середина ребра SB. Найдите угол между прямой AG и плоскостью ABC.

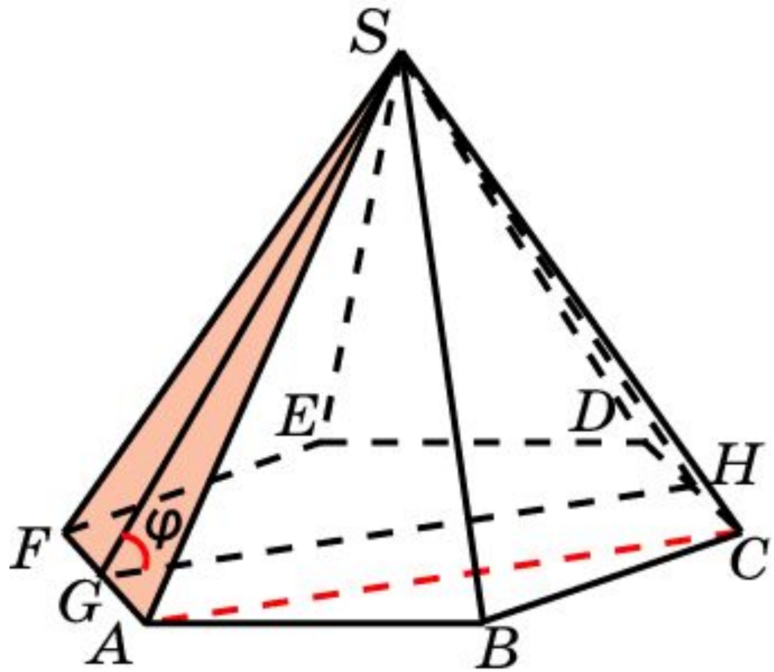


Решение. Искомый угол равен углу GAH. Треугольник GAH прямоугольный равнобедренный. Следовательно, угол равен 45°.

Ответ: 45°.

Пирамида 8

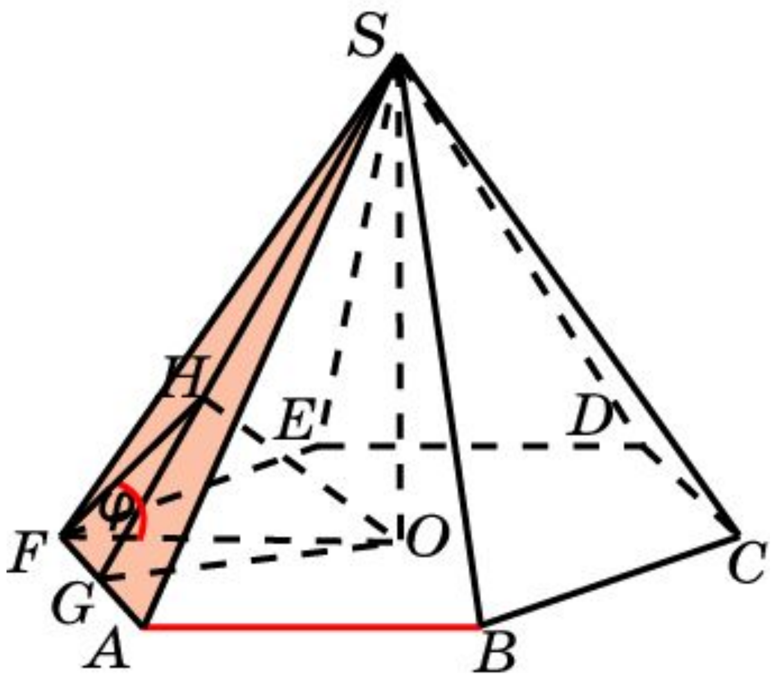
В правильной 6-ой пирамиде $SA\ldots F$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF.



Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

Пирамида 9*

В правильной 6-ой пирамиде *SA…F*, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямой *AB* и плоскостью *SAF*.



Решение. Пусть *O* – центр основания, *G* – середина *AF*. Искомый угол φ равен углу между прямой *FO* и плоскостью *SAF*. Опустим из точки *O* перпендикуляр *OH* на плоскость *SAF*. Тогда φ равен углу *OFH*. В треугольнике *SOG* имеем:

$$OG = \frac{\sqrt{3}}{2},\ SO = \sqrt{3},\ SG = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Следовательно, $OH = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

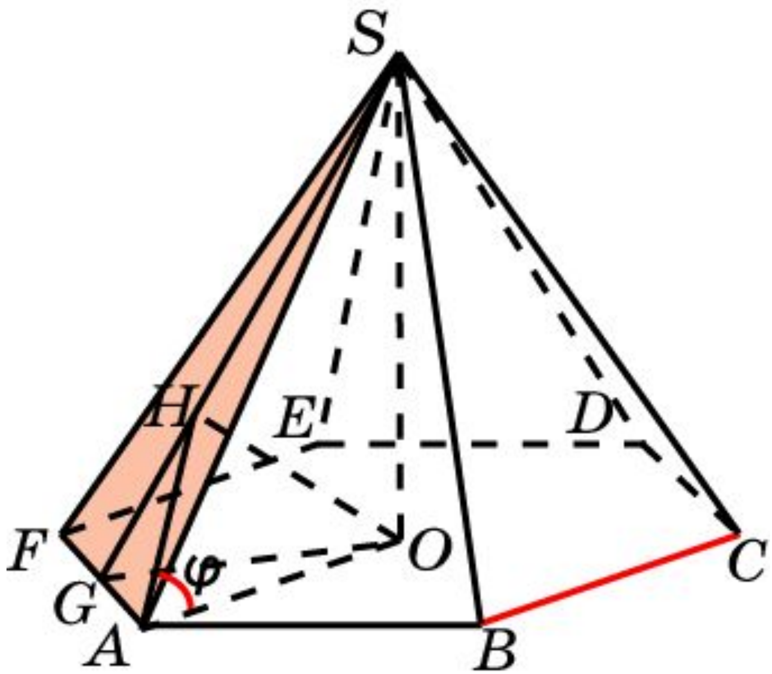
В треугольнике *OFH* $FH = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$, $OF = 1$. Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Пирамида 10*

В правильной 6-ой пирамиде $SA\ldots F$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямой BC и плоскостью SAF.



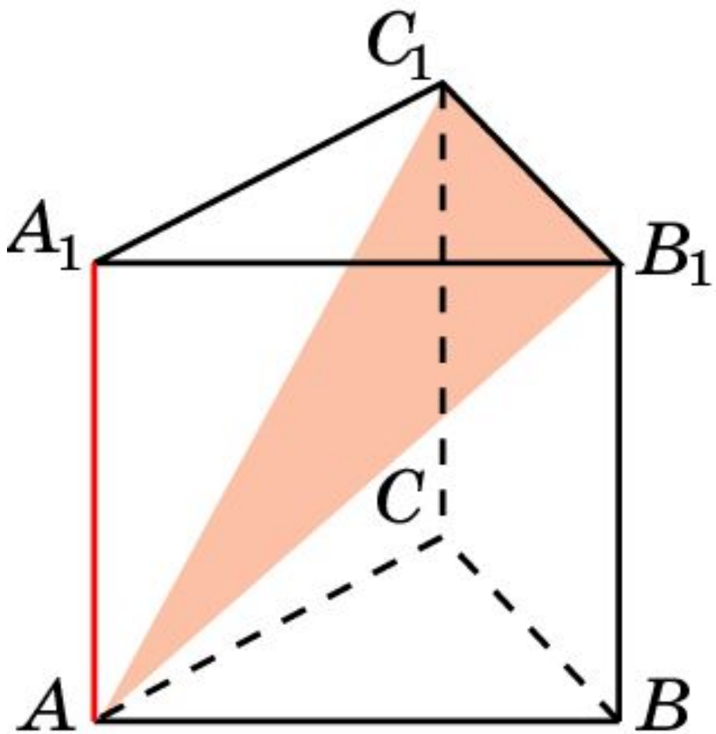
Решение. Пусть O – центр основания, G – середина AF. Искомый угол φ равен углу между прямой AO и плоскостью SAF. Опустим из точки O перпендикуляр OH на плоскость SAF. Тогда φ равен углу OAH. Из решения предыдущей задачи имеем: $OH = \frac{\sqrt{15}}{5}$. В треугольнике OAH $OF = 1$, $AH = \frac{\sqrt{10}}{5}$. Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Призма 1

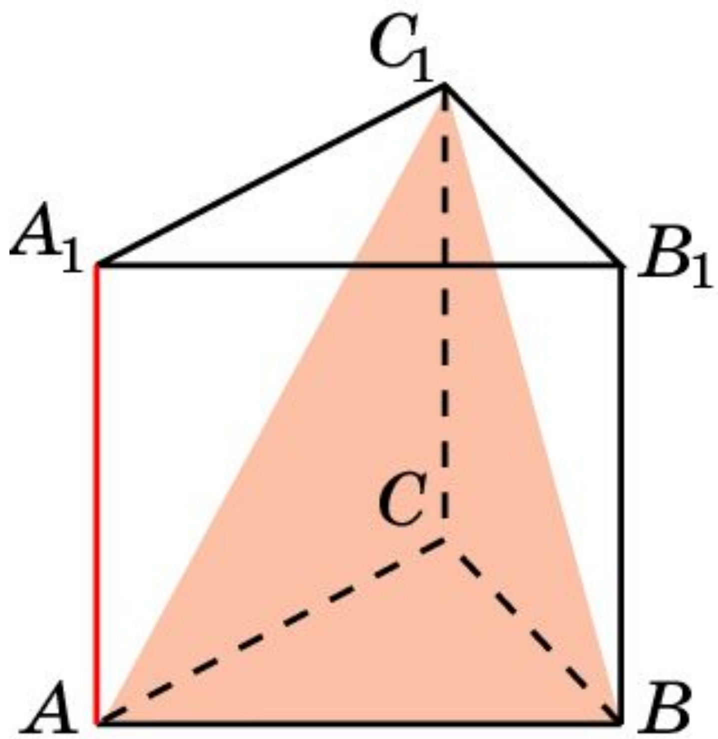
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1.



Ответ: $tg\,\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Призма 2

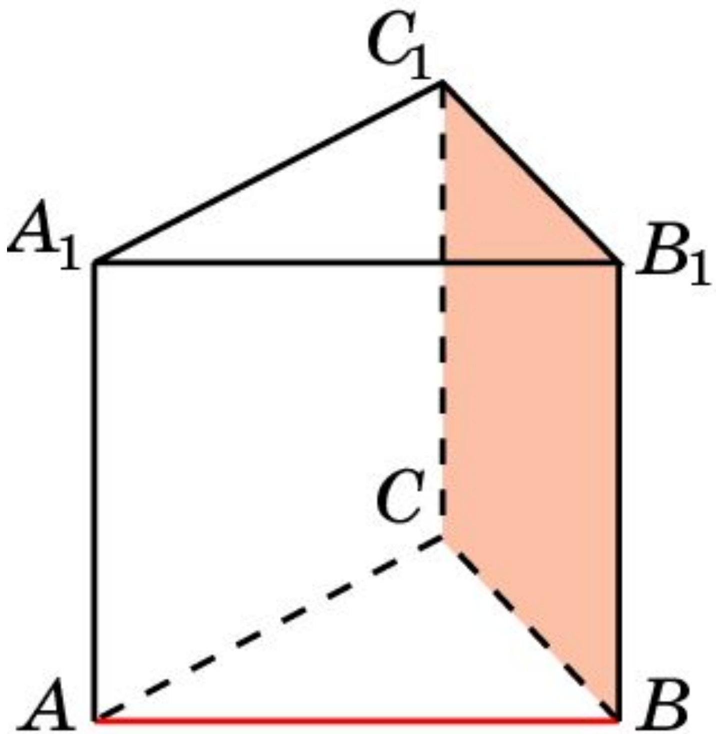
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью ABC_1.



Ответ: $tg\,\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Призма 3

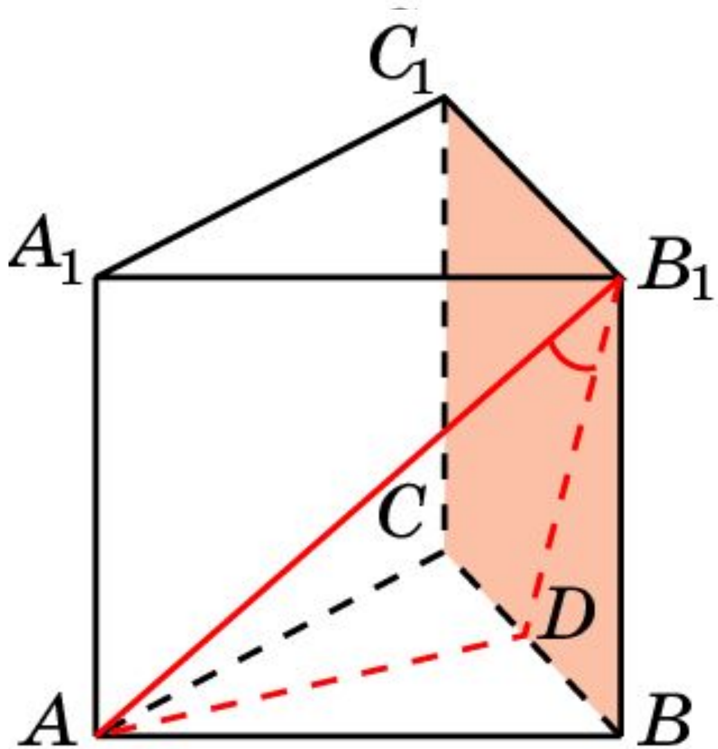
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью BB_1C_1.



Ответ: 60°.

Призма 4

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AB_1 и плоскостью BB_1C_1.

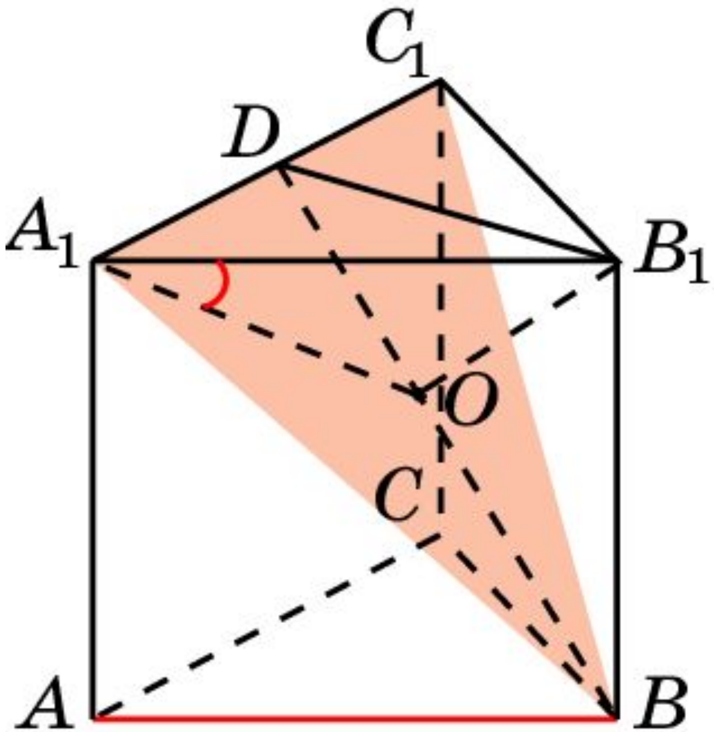


Решение: Искомый угол равен углу B_1AD, где D – середина ребра BC. Следовательно,

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Призма 5*

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AB и плоскостью A_1BC_1.



Решение: Искомый угол равен углу B_1A_1O, где O – основание перпендикуляра, опущенного из точки B_1 на плоскость A_1BC_1. Из прямоугольного треугольника BB_1D находим

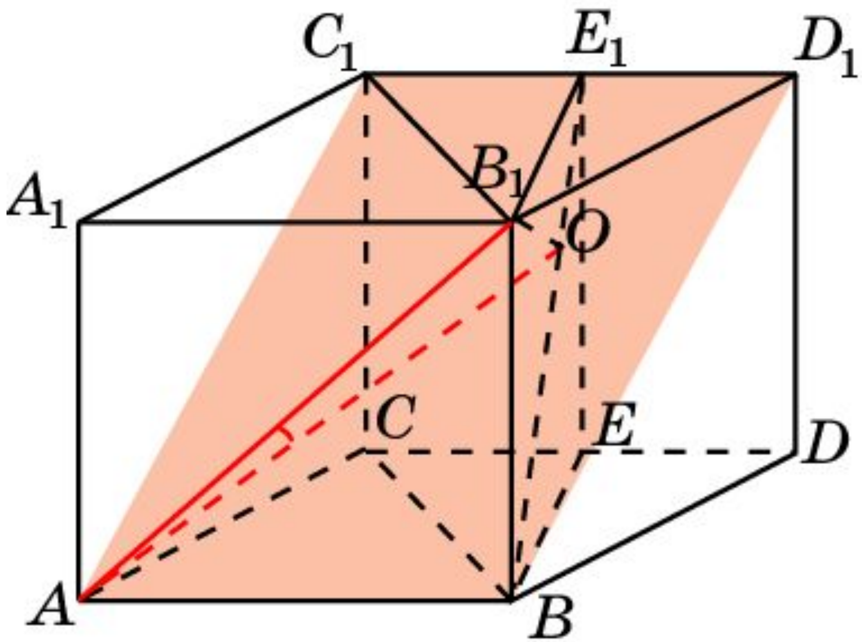
$$B_1O = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Следовательно,

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Призма 6*

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AB_1 и плоскостью и ABC_1.



Решение: Достроим треугольную призму до четырехугольной. BEE_1B_1 – сечение, перпендикулярное CD. B_1O перпендикулярен BE_1. Искомый угол равен углу B_1AO. Из прямоугольного треугольника BB_1E_1 находим

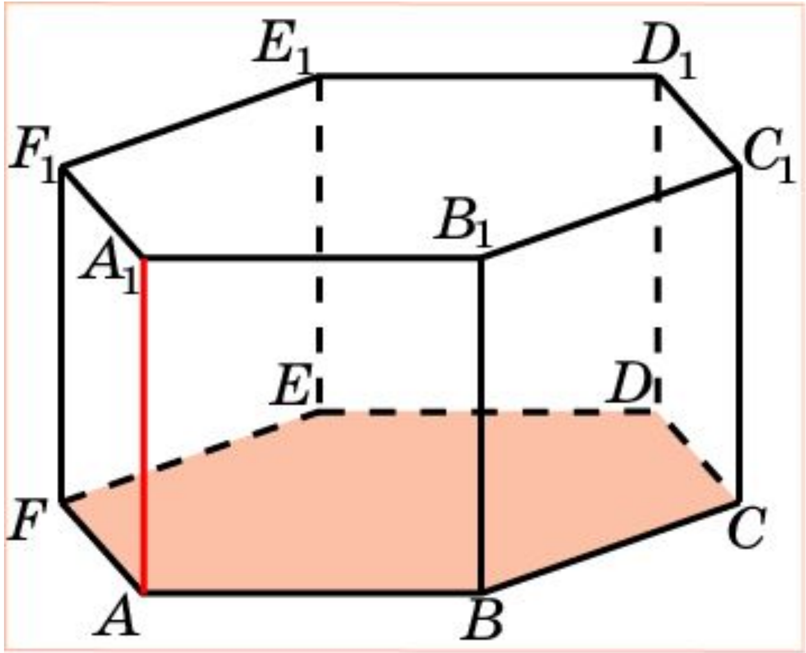
$$B_1O = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Следовательно,

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{42}}{14}.$$

Призма 7

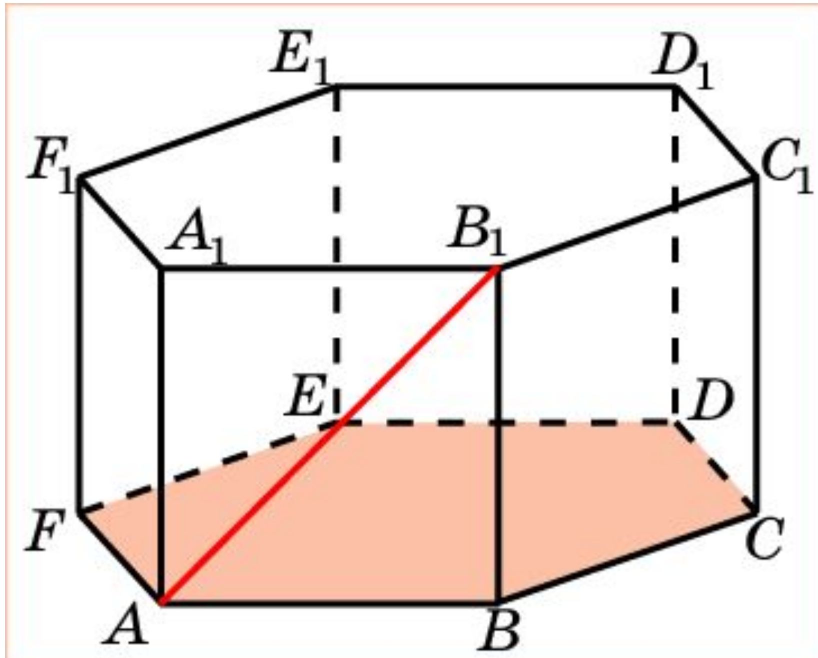
В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABC.



Ответ: 90°.

Призма 8

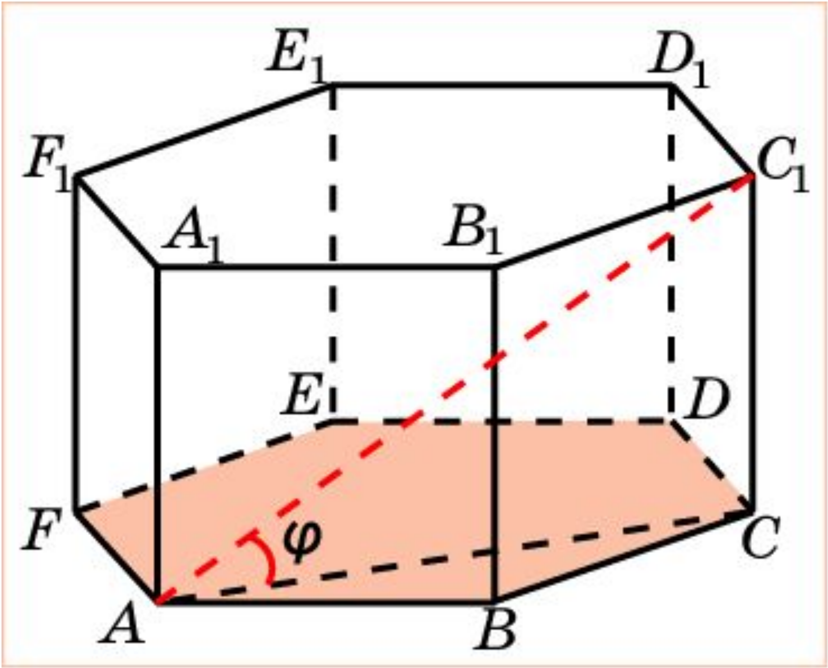
В правильной 6-й призме $A…F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC.



Ответ: 45°.

Призма 9

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью ABC.

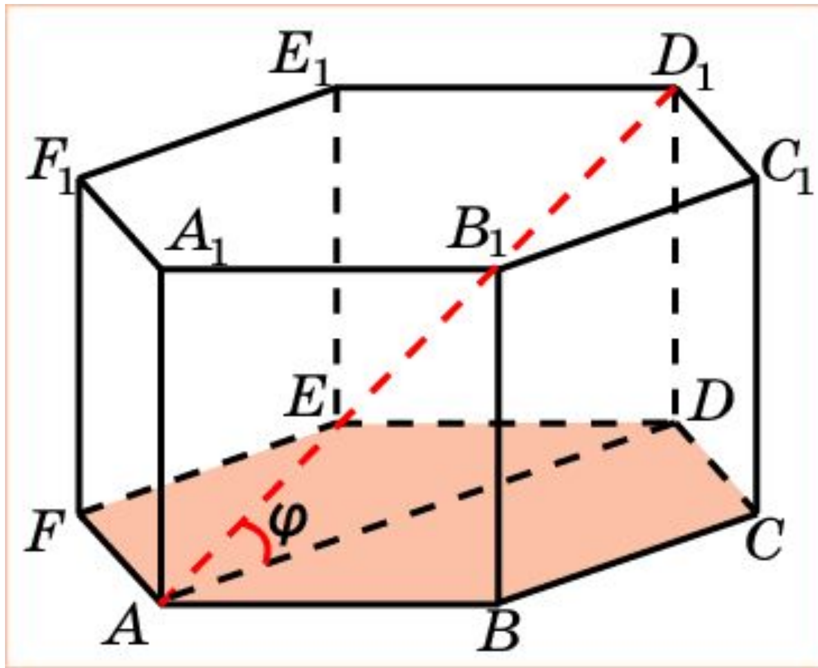


Решение: Искомый угол φ равен углу C_1AC.
В прямоугольном треугольнике ACC_1 $CC_1 = 1$, $AC_1 = 2$.
Следовательно, $\varphi = 30^\circ$.

Ответ: 30°.

Призма 10

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой AD_1 и плоскостью ABC.



Решение: Искомый угол φ равен углу D_1AD.

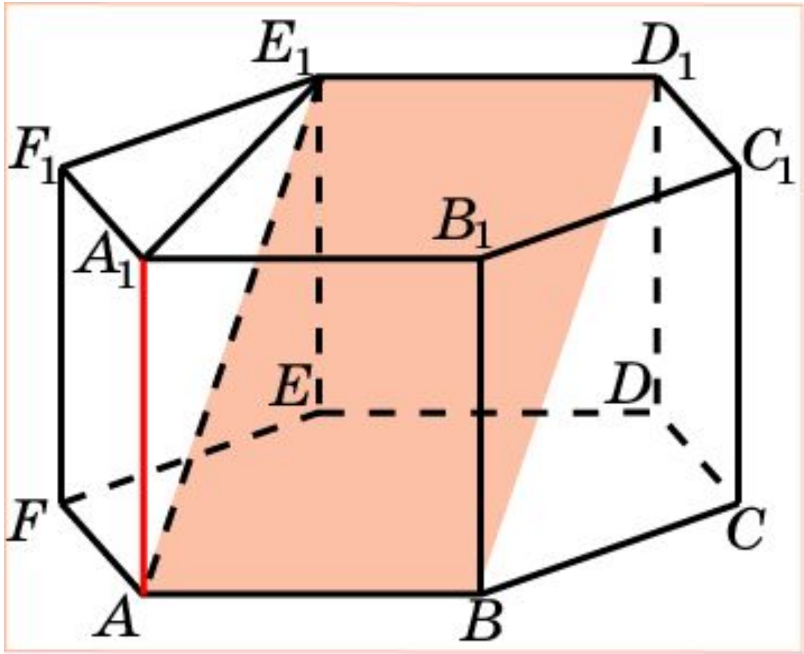
В прямоугольном треугольнике ADD_1 имеем: $DD_1 = 1$, $AD = 2$.

Следовательно, $tg\varphi = \frac{1}{2}$.

Ответ: $tg\varphi = \frac{1}{2}$.

Призма 11

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABD_1.

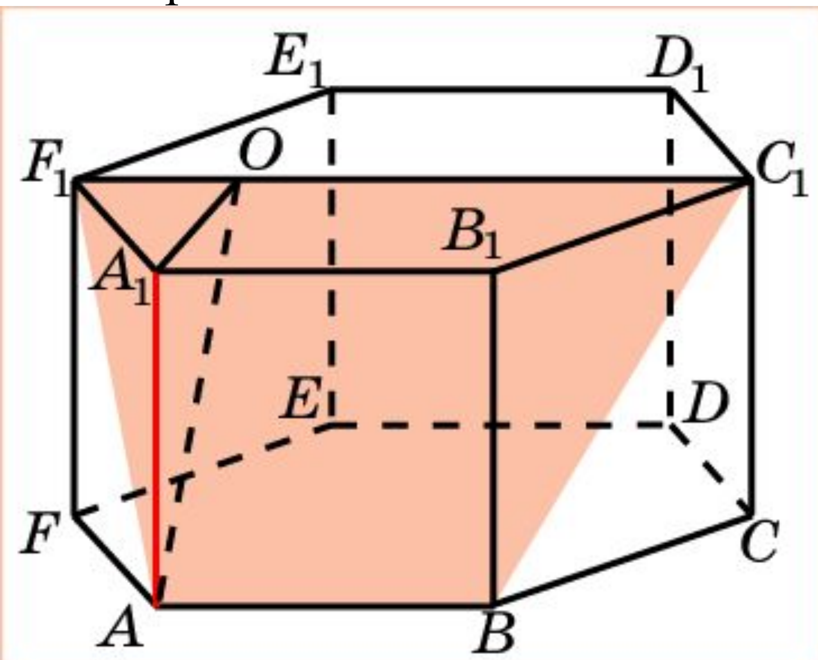


Решение: Искомый угол φ равен углу A_1AE_1. В прямоугольном треугольнике A_1AE_1 имеем: $AA_1 = 1$; $A_1E_1 = \sqrt{3}$. Следовательно, φ = 60°.

Ответ: 60°.

Призма 12

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью ABC_1.



Решение: Искомый угол φ равен углу A_1AO, где O – основание перпендикуляра, опущенного из точки A_1 на прямую C_1F_1.

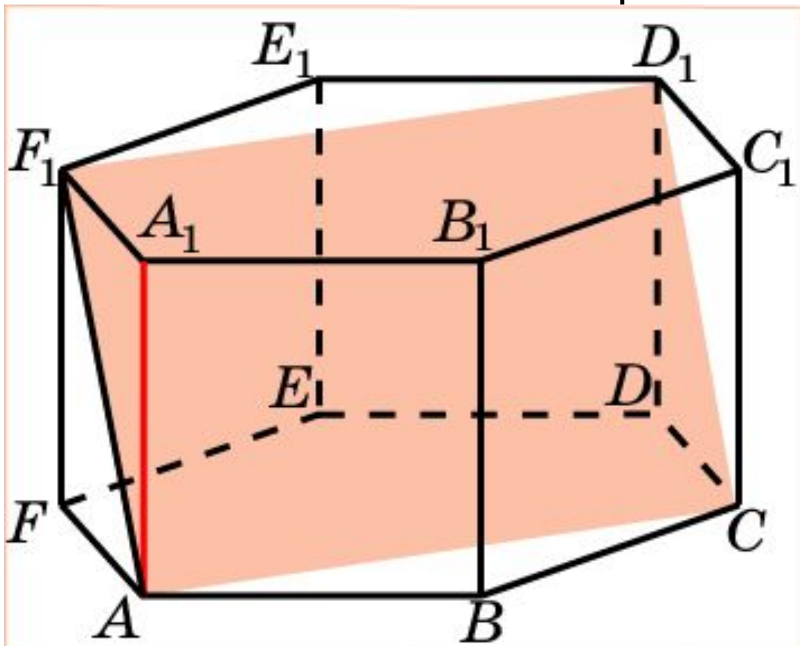
В прямоугольном треугольнике A_1AO имеем: $AA_1 = 1$; $A_1O = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Призма 13

В правильной 6-й призме $A…F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ACD_1.

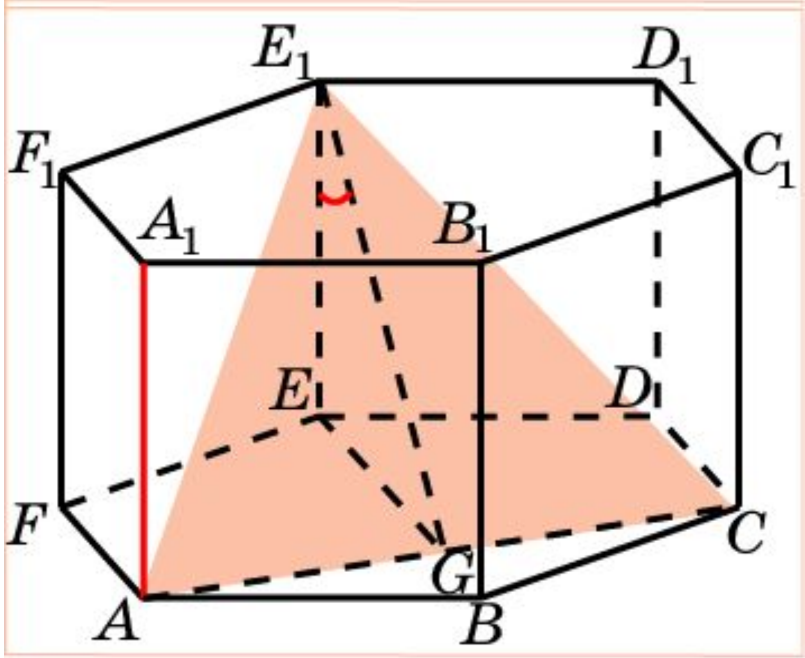


Решение: Искомый угол φ равен углу A_1AF_1. В прямоугольном треугольнике A_1AF_1 имеем: $AA_1 = 1$; $A_1F_1 = 1$. Следовательно, $\varphi = 45^o$.

Ответ: 45^o.

Призма 14

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите тангенс между прямой AA_1 и плоскостью ACE_1.



Решение: Из точки E_1 опустим перпендикуляр E_1G на прямую AC. Искомый угол φ равен углу EE_1G.

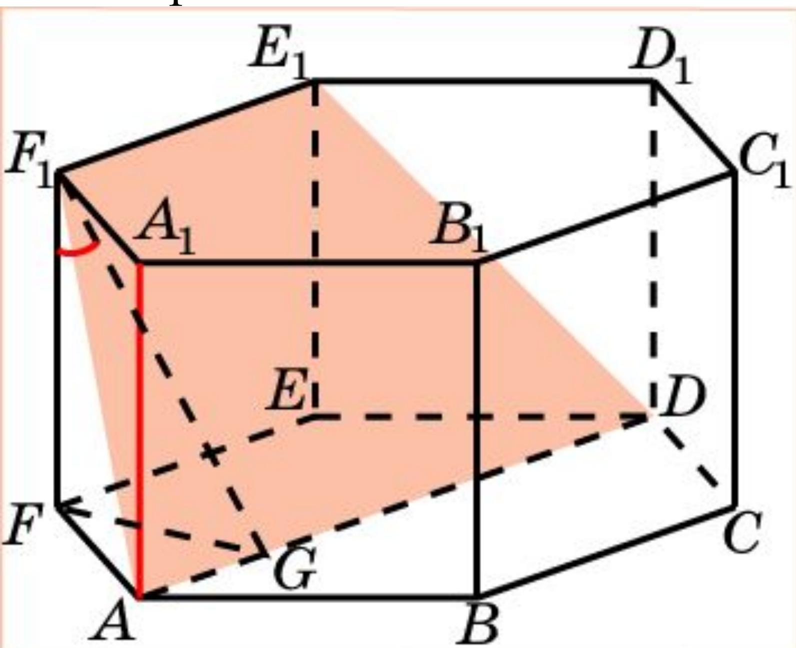
В прямоугольном треугольнике EE_1G имеем: $EE_1 = 1$; $EG = \frac{3}{2}$.

Следовательно, $tg\varphi = \frac{3}{2}$.

Ответ: $tg\varphi = \frac{3}{2}$.

Призма 15

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью ADE_1.



Решение: Из точки F_1 опустим перпендикуляр F_1G на прямую AD. Искомый угол φ равен углу FF_1G.

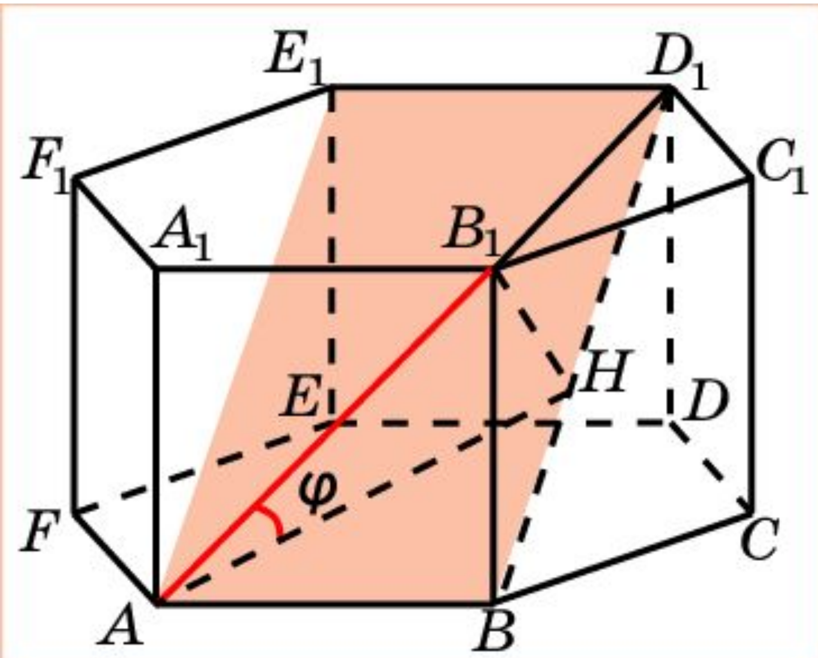
В прямоугольном треугольнике FF_1G имеем: $FF_1 = 1$; $FG = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $tg\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $tg\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Призма 16*

В правильной 6-й призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AB_1 и плоскостью ABD_1.



Решение: Из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1H на прямую BD_1. Искомый угол φ равен углу B_1AH. В прямоугольном треугольнике BB_1D_1 имеем: $BB_1 = 1$; $B_1D_1 = \sqrt{3}$, $BD_1 = 2$. Следовательно, угол BD_1B_1 равен 30^o и, значит, $B_1H = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

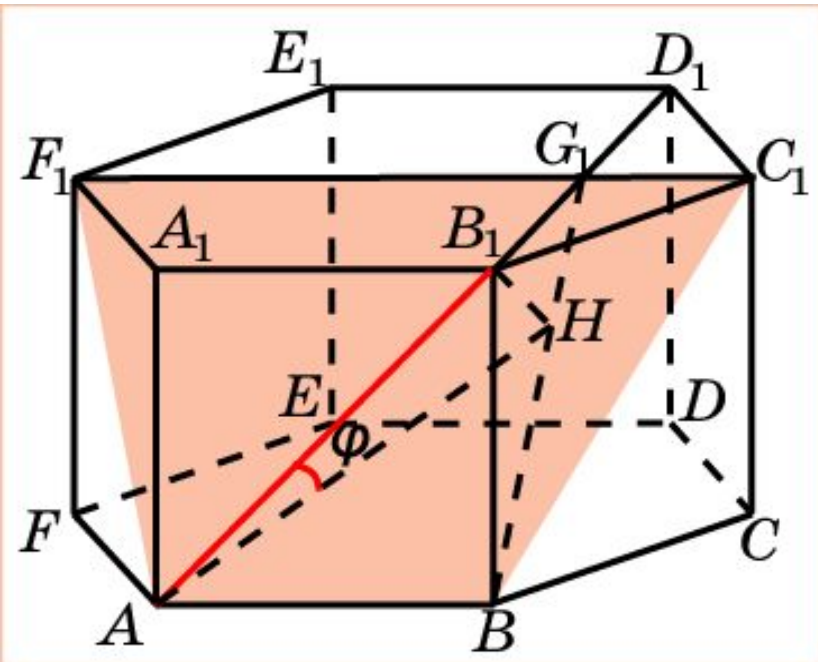
В прямоугольном треугольнике AB_1H имеем: $AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1H = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Ответ: $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Призма 17*

В правильной 6-й призме $A \dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.



Решение: Проведем прямые C_1F_1, B_1D_1 и обозначим G_1 их точку пересечения. Из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1H на прямую BG_1. Искомый угол φ равен углу B_1AH. В прямоугольном треугольнике BB_1G_1 имеем:

$BB_1 = 1$; $B_1G_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $BG_1 = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Из подобных треугольников BB_1G_1 и B_1HG_1 находим $B_1H = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

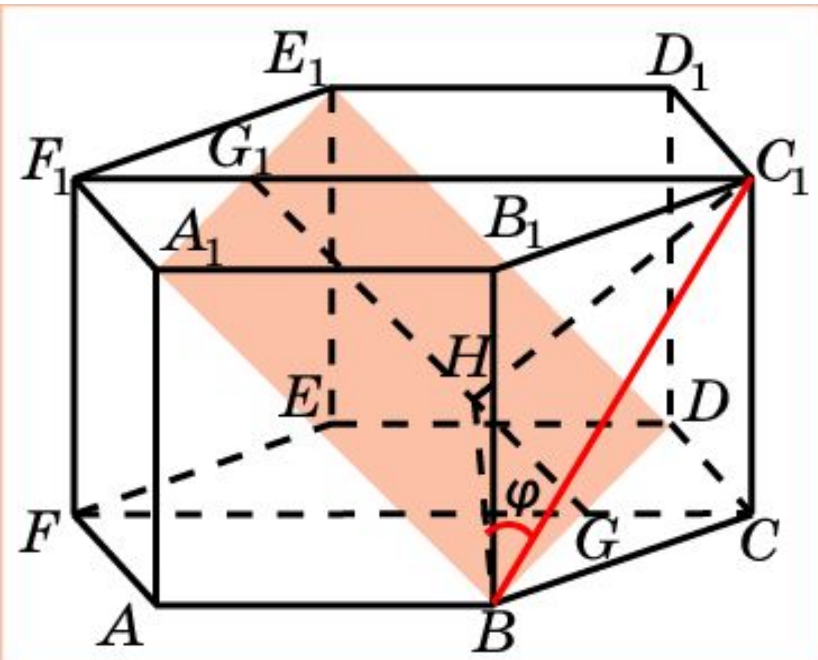
В прямоугольном треугольнике AB_1H имеем $B_1H = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$, $AB_1 = \sqrt{2}$.

Следовательно, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

Ответ: $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

Призма 18*

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BC_1 и плоскостью BDE_1.



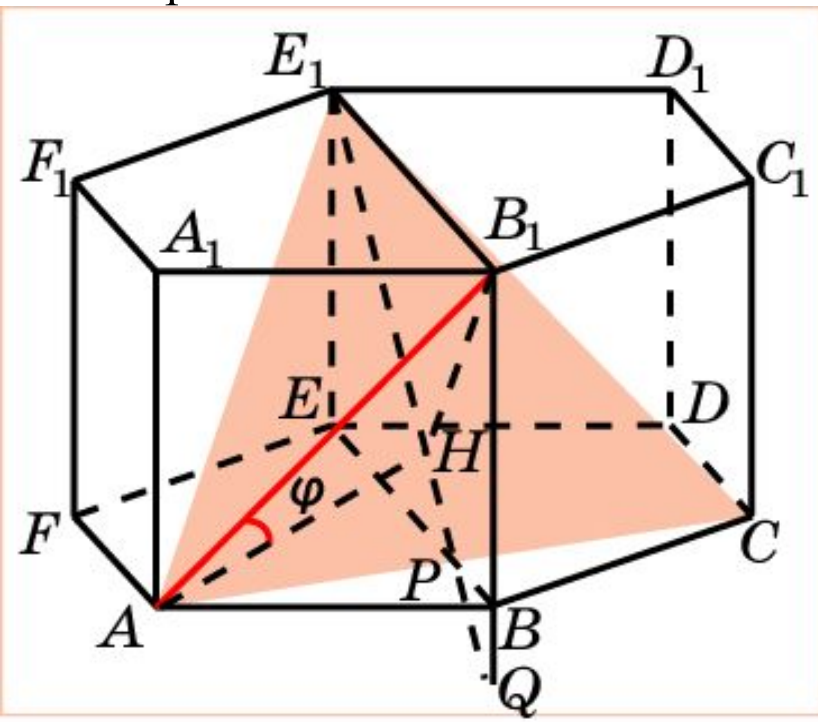
Решение: Плоскость CFF_1 перпендикулярна плоскости BDE_1 и пересекает ее по прямой GG_1. Прямая GG_1 образует с прямой C_1F_1 угол 45°. Из вершины C_1 опустим перпендикуляр C_1H на прямую GG_1. В прямоугольном треугольнике C_1G_1H имеем: $C_1G_1 = \frac{3}{2}$, $\angle\ C_1G_1H = 45°$. Следовательно, $C_1H = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

В прямоугольном треугольнике BC_1H имеем: $BC_1 = \sqrt{2}$; $C_1H = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Следовательно, $\sin\varphi = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\sin\varphi = \frac{3}{4}$.

Призма 19*

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AB_1 и плоскостью ACE_1.



Решение: Плоскость BB_1E_1 перпендикулярна плоскости ACE_1 и пересекает ее по прямой QE_1. В прямоугольном треугольнике QB_1E_1 имеем: $QB_1 = \frac{4}{3}$, $B_1E_1 = 2$.

Высота B_1H этого треугольника равна $\frac{4\sqrt{13}}{13}$.

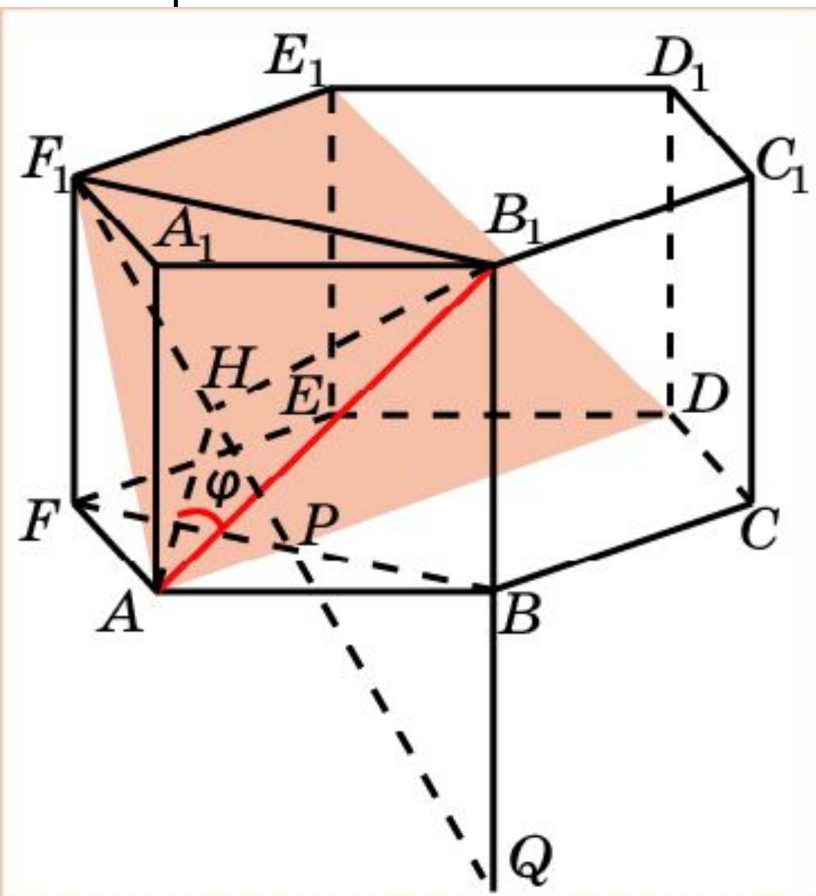
В прямоугольном треугольнике AB_1H имеем: $AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1H = \frac{4\sqrt{13}}{13}$.

Следовательно, $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{26}}{13}$.

Ответ: $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{26}}{13}$.

Призма 20*

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AB_1 и плоскостью ADE_1.



Решение: Плоскость BB_1F_1 перпендикулярна плоскости ADE_1 и пересекает ее по прямой QF_1. В прямоугольном треугольнике QB_1F_1 имеем: $QB_1 = 2$, $B_1F_1 = \sqrt{3}$. Высота B_1H этого треугольника равна $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

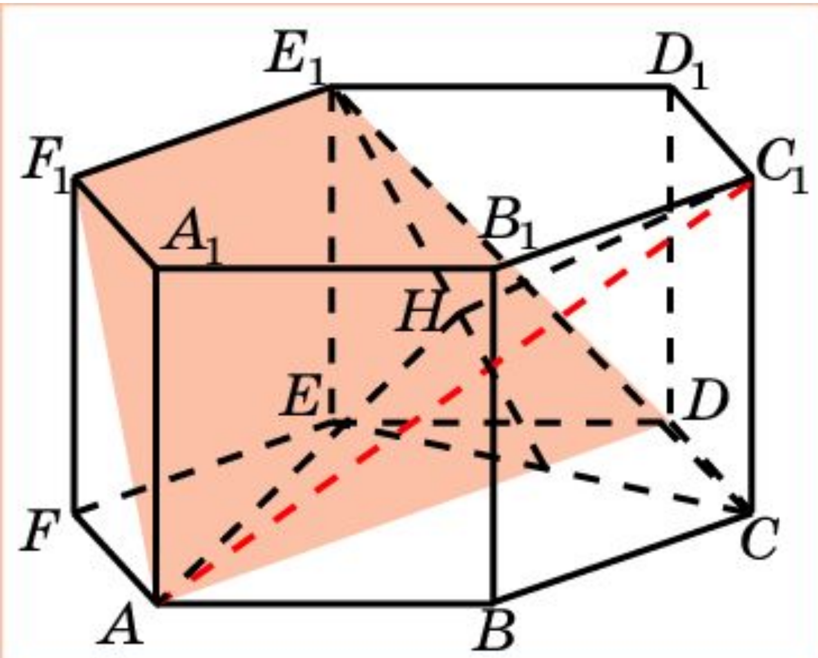
В прямоугольном треугольнике AB_1H имеем: $AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1H = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$,

Следовательно, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

Ответ: $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

Призма 21*

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AC_1 и плоскостью ADE_1.



Решение: Прямая B_1C_1 параллельна плоскости ADE_1. Следовательно, расстояние от точки C_1 до плоскости ADE_1 равно расстоянию от точки B_1 до этой плоскости и равно $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

В прямоугольном треугольнике AC_1H имеем: $AC_1 = 2$, $C_1H = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

Следовательно, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.