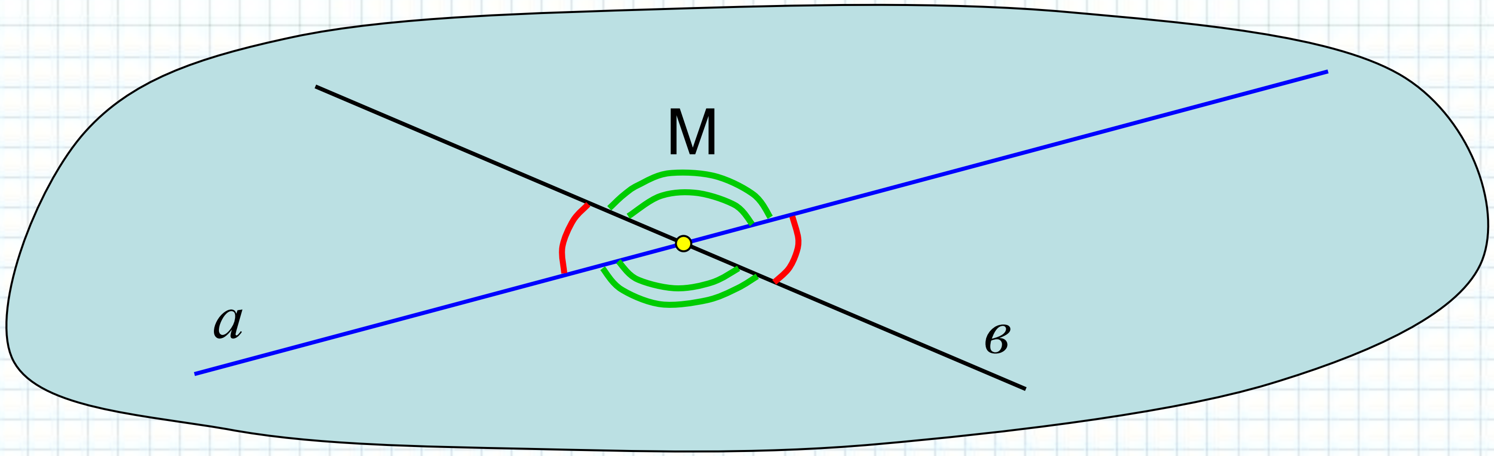
Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Геометрия, *10* **класс**.

Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

Две пересекающиеся прямые в пространстве определяют единственную плоскость, поэтому угол между пересекающимися прямыми в пространстве определяется так же как в плоскости. Вспомним это определение:



Определение . Меньший из неразвернутых углов, полученных при пересечении двух прямых, называется углом между данными прямыми.

Из определения следует, что угол между двумя пересекающимися прямыми не может превышать 90^0 т.е.

$$\widehat{a,b} \in \left(0^0;90^0\right]$$

Если прямые параллельные, то величина угла между ними считается равной 0^0.

Пример 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите углы между прямыми: 1) CC_1 и BC_1; 2) BC_1 и CB_1; 3) AA_1 и CC_1; 4) A_1C_1 и BC_1.

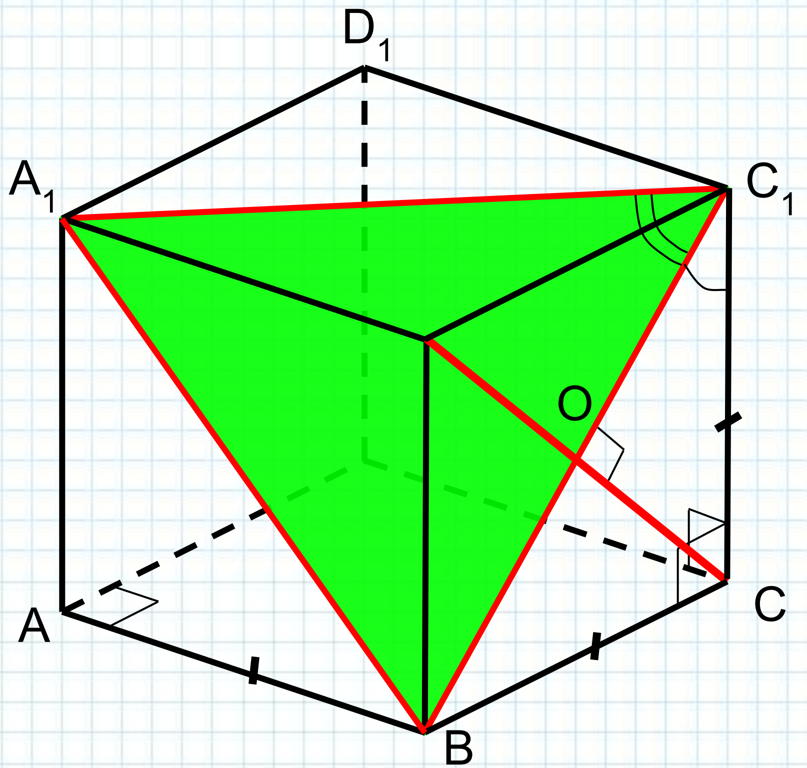
Решение.

1) $\widehat{CC_1, BC_1} = \angle BC_1C = 45^0$ (по свойству диагоналей квадрата);

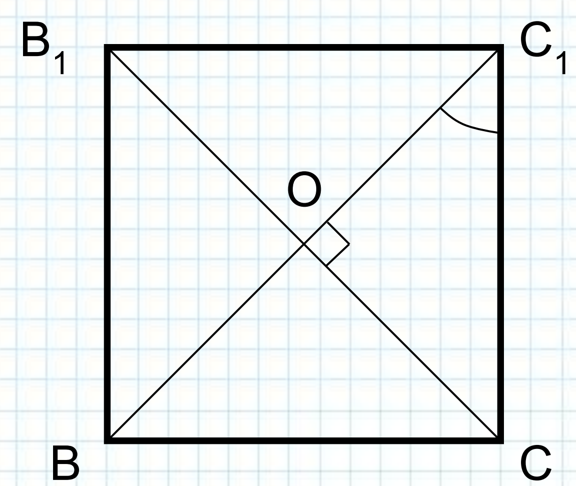
2) $\widehat{BC_1, CB_1} = \angle C_1OC = 90^0$ (по свойству диагоналей квадрата);

3) $\widehat{AA_1, CC_1} = 0^0$, т.к. $AA_1 \parallel CC_1$;

4) $\widehat{A_1C_1, BC_1} = \angle A_1C_1B = 60^0$ (по свойству равностороннего треугольника ΔA_1C_1B);



Ответ: 1) 45^0; 2) 90^0; 3) 0^0; 4) 60^0.

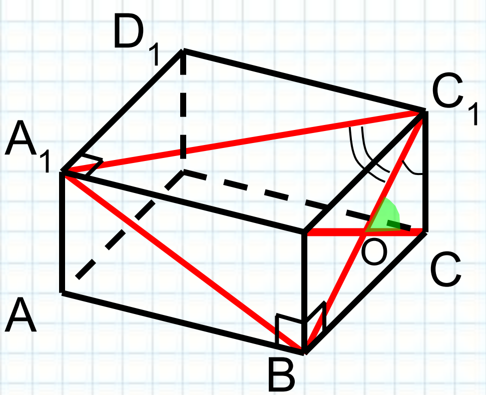


В общем случае, для нахождения угла между пересекающимися прямыми обычно рассматривают треугольник, в который входит интересующий нас угол. В прямоугольном треугольнике необходимо выразить какую-либо тригонометрическую функцию этого угла, в произвольном треугольнике – косинус данного угла (по следствию из теоремы косинусов). Далее сам угол находят с помощью обратных тригонометрических функций.

Пример 2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, AB=4 см, BC=3 см, BB_1=2 см. Найдите углы между прямыми: 1) CC_1 и BC_1; 2) BC_1 и CB_1; 3) AA_1 и CC_1; 3) A_1C_1 и BC_1.

Решение.

1) $\widehat{CC_1, BC_1} = \angle BC_1C$. Из ΔBC_1C, $\angle C=90^0$: $tg\angle BC_1C=1,5 \Rightarrow \angle BC_1C=arctg1,5\approx 56^018'$;



2) $\widehat{BC_1, CB_1} = \angle C_1OC$. Из ΔOC_1C, $OC=OC_1$: $\angle O = 180^0 - 2\cdot\angle C_1 =$

$= 180^0 - 2arctg1,5 \approx 180^0 - 112^036' = 67^024'$;(по теореме о сумме углов треугольника и свойству равнобедренного тр-ка)

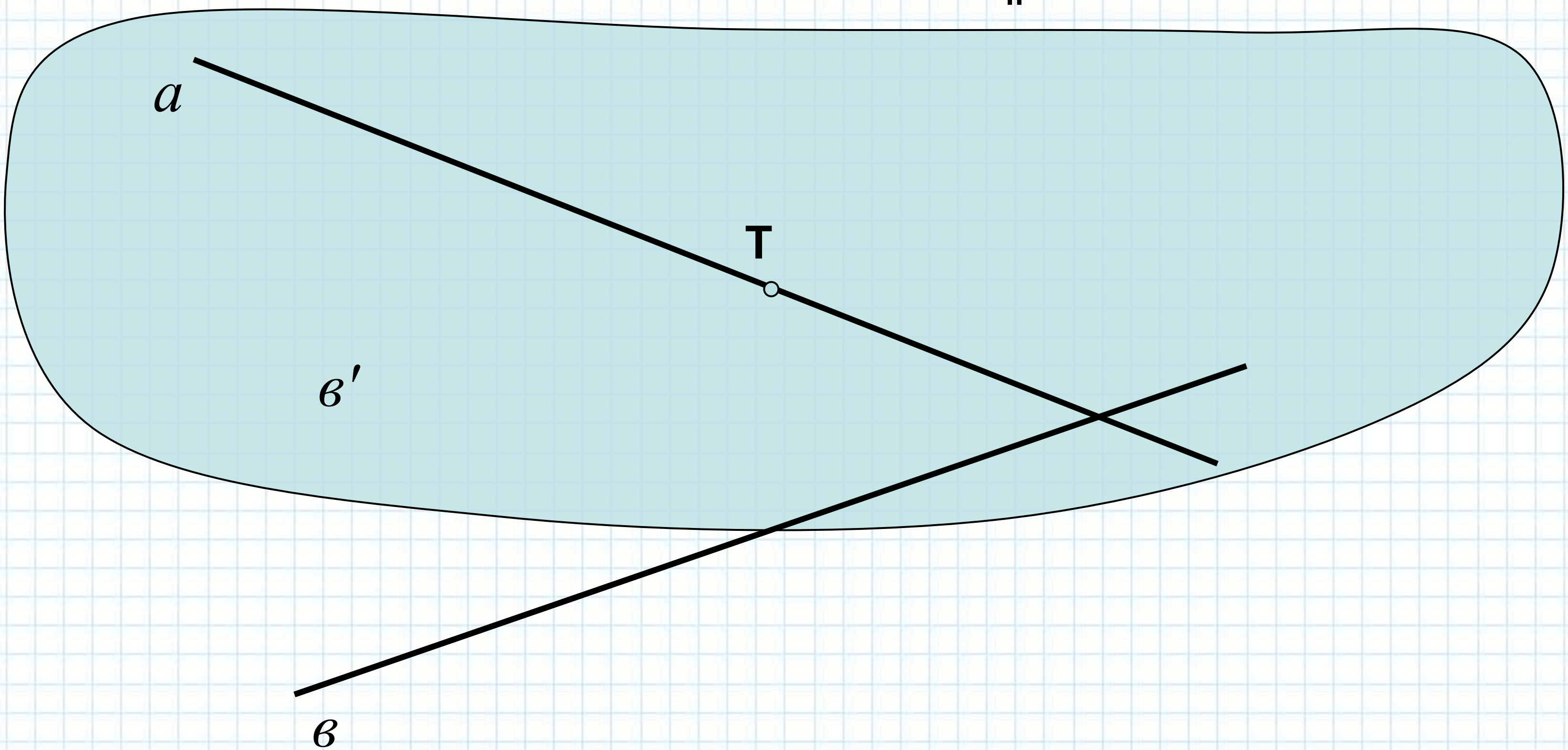
3) $\widehat{AA_1, CC_1} = 0^0$, т.к. $AA_1 \parallel CC_1$;

4) $\widehat{A_1C_1, BC_1} = \angle A_1C_1B$. Стороны ΔA_1C_1B находим из прямоугольных треугольников $\Delta A_1C_1D_1$, ΔAA_1B , ΔCC_1B по теореме Пифагора: A_1C_1=5 см, $A_1B = 2\sqrt{5}$ см, $BC_1 = \sqrt{13}$ см. Теперь, по следствию из теоремы косинусов:

$$cos\angle C_1 = \frac{25+13-20}{2\cdot 5\cdot\sqrt{13}} = \frac{9}{5\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{65} \Rightarrow \angle C_1 = arccos\frac{9\sqrt{13}}{65} \approx 60^03'.$$

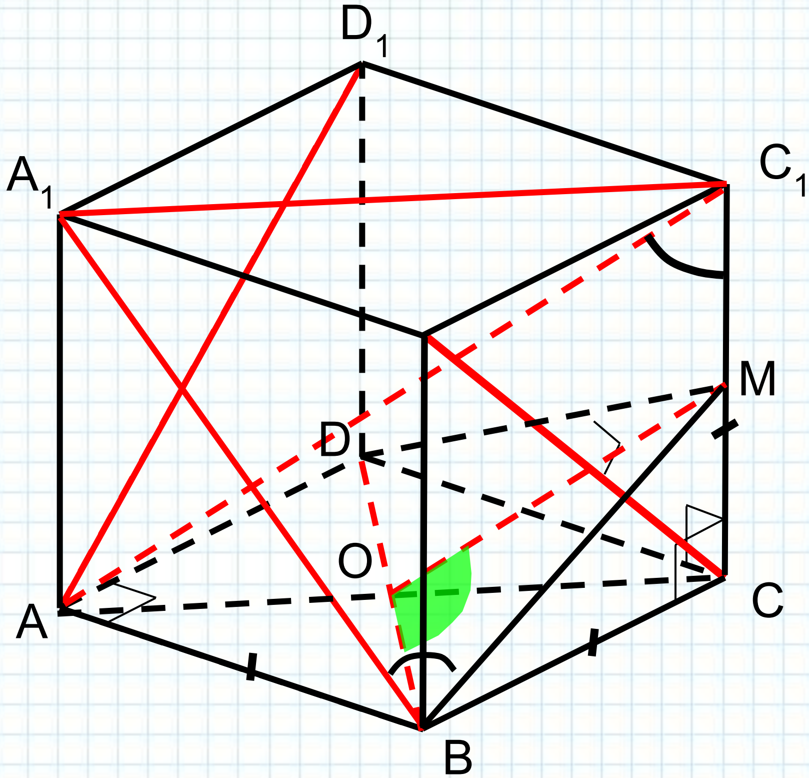
Определение. Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между соответственно параллельными им пересекающимися прямыми:

$$\angle a, b = \angle a, b' \qquad a, b' \subset \square, \quad b \parallel b', \quad \text{Т} \in a, b'$$



Обратите внимание, что плоскость, образованная пересекающимися прямыми ***a*** и ***b′*** параллельна прямой ***b*** (по признаку параллельности прямой и плоскости).

Пример 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите углы между прямыми: 1) CC_1 и AB; 2) AD_1 и CB_1; 3) AD_1 и BA_1; 4) AC_1 и BB_1; 5) AC_1 и BD.



Решение.

1) $\widehat{CC_1, AB} = \widehat{CC_1, DC}$=$90^0$ (по определению квадрата);

2) $\widehat{AD_1, CB_1} = \widehat{BC_1, CB_1} = 90^0$ (по свойству диагоналей квадрата);

3) $\widehat{AD_1, BA_1} = \widehat{BC_1, BA_1} = 60^0$ (по свойству равностороннего треугольника ΔA_1C_1B);

4) $\widehat{AC_1, BB_1} = \widehat{AC_1, CC_1}$ = $\angle AC_1C$.

В ΔACC_1, $\angle C=90^0$ можно выразить любую из тригонометрических функций, т.к. известны все его стороны: $CC_1=a$, $AC= a\sqrt{2}$, $AC_1= a\sqrt{3}$.

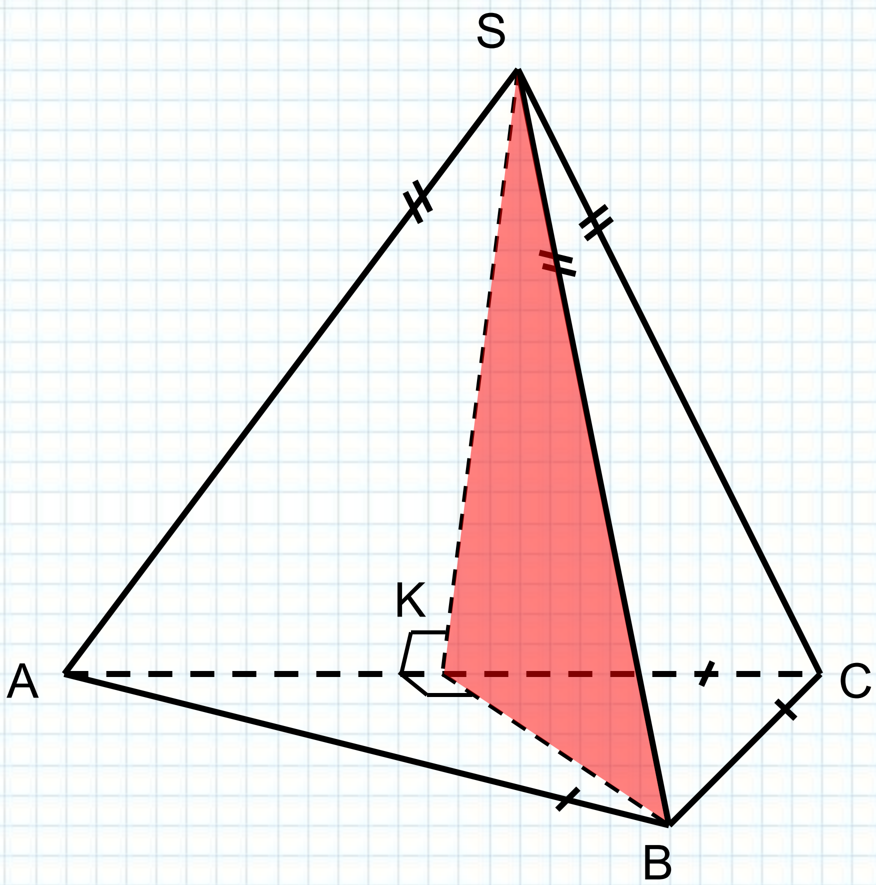
Например,

$$\cos\angle C_1 = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle C_1 = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54^0 42'.$$

5) $\widehat{AC_1, BD} = \widehat{OM, BD} = \angle MOB$, где $O \in BD$, AC и M – середина CC_1.

ΔBMD – равнобедренный с основанием BD, MO – медиана, а значит и высота, т.е. $\angle MOB=90^0$.

Задание. Докажите, что все скрещивающиеся ребра правильной треугольной пирамиды попарно взаимно перпендикулярны.



Дано: SABC – треугольная пирамида, SA=SB=SC, AB=BC=AC.

Доказать: $AC \perp BS$.

Доказательство.

1) Построим сечение тетраэдра, проходящее через ребро BS и точку К – середину ребра АС.

2) По свойству медианы, проведённой к основанию равнобедренного треугольника $AC \perp SK$ и $AC \perp BK$.

Перед заключительным этапом доказательства вспомните определение и признак перпендикулярных прямой и плоскости.

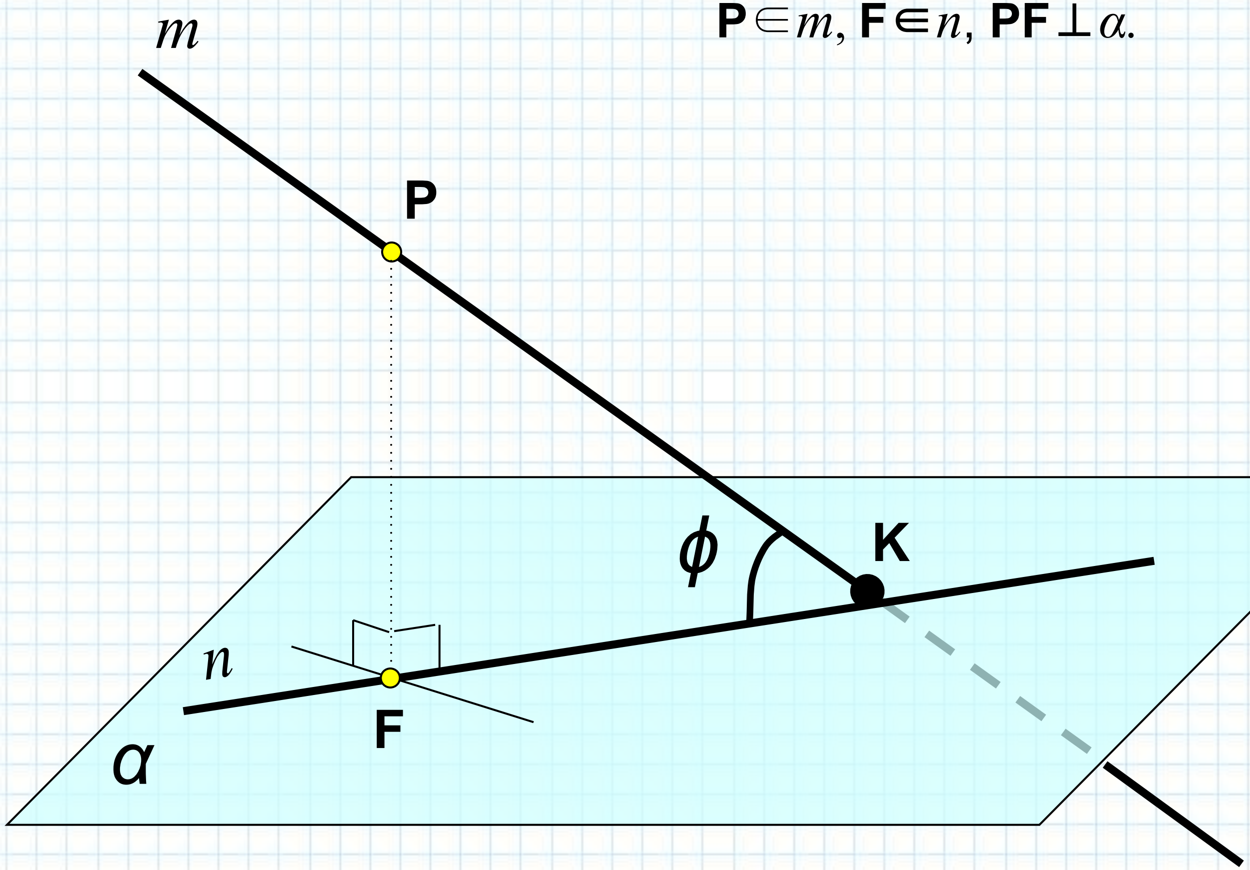
3) Т.к. $AC \perp SK$ и $AC \perp BK$, то $AC \perp (BKS)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

А значит, $AC \perp BS \subset (BKS)$ (по определению перпендикулярности прямой и плоскости)

Определение. Углом между плоскостью и пересекающей её прямой называется угол между данной прямой и её прямоугольной(ортогональной) проекцией на данную плоскость.

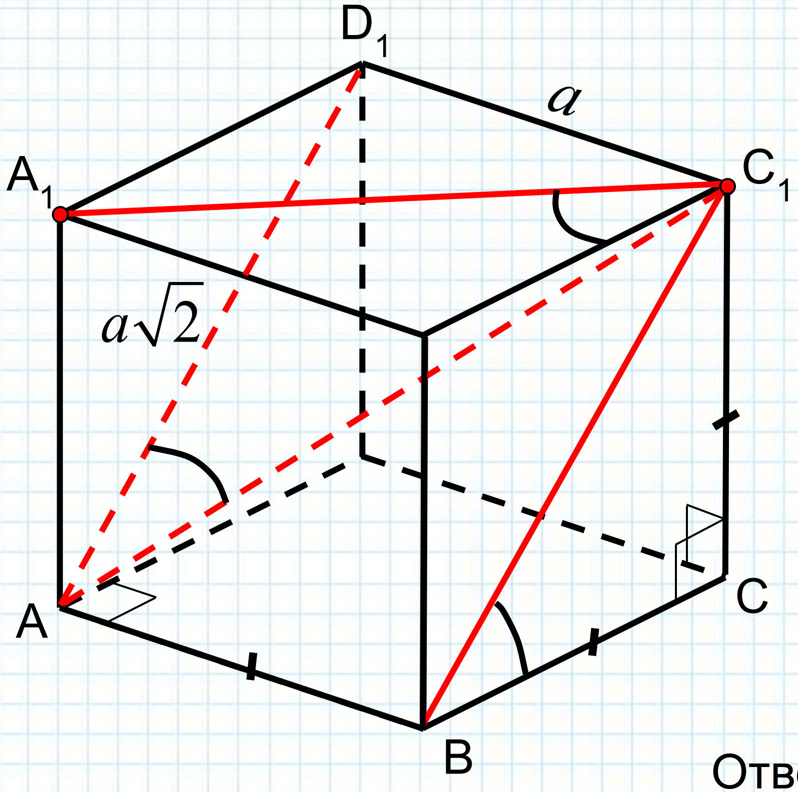
$\widehat{\alpha, m} = \widehat{n, m} = \varphi$, где $m \cap \alpha$=**K**, $m \cap n$=**K**, $n \subset \alpha$,

P$\in m$, **F**$\in n$, **PF**$\perp \alpha$.



Обратите внимание, что понятия угла между скрещивающимися прямыми и угла между прямой и плоскостью сводятся к понятию угла между пересекающимися прямыми.

Пример 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите углы между : 1) BC_1 и (ABC); 2) A_1C_1 и (CBB_1); 3) AC_1 и (AA_1D_1).



Решение.

1) $\angle\left(BC_1,(ABC)\right) = \angle\left(BC_1, BC\right) = 45^0$ (по свойству диагоналей квадрата);

2) $\angle\left(A_1C_1,(CBB_1)\right) = \angle\left(A_1C_1, B_1C_1\right) = 45^0$ (по свойству диагоналей квадрата);

3) $\angle\left(AC_1,(AA_1D_1)\right) = \angle\left(AC_1, AD_1\right) = arctg\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: 1) 45^0; 2) 45^0; 3) $arctg\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.