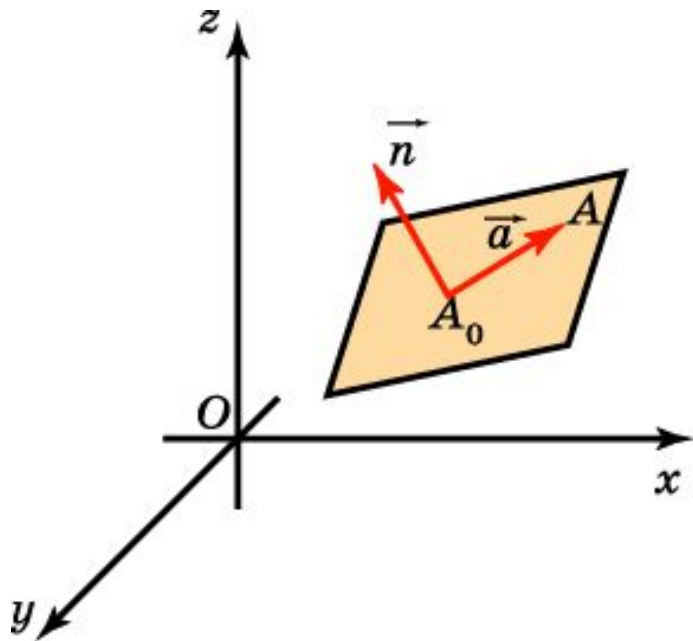


# Уравнение плоскости в пространстве

**Теорема.** Плоскость в пространстве задается уравнением

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  - действительные числа, причем  $a$ ,  $b$ ,  $c$  одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора  $n$ , перпендикулярного этой плоскости и называемого **вектором нормали**.



Угол между двумя пересекающимися плоскостями, заданными уравнениями  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ,  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  можно найти, используя формулу

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

# Упражнение 1

Дана плоскость: а)  $5x - y - 1 = 0$ ; б)  $3x + 18z - 6 = 0$ ; в)  $15x + y - 8z + 14 = 0$ ; г)  $x - 3y + 15z = 0$ . Назовите координаты вектора нормали.

**Ответ:** а)  $(5, -1, 0)$ ; б)  $(3, 0, 18)$ ; в)  $(15, 1, -8)$ ; г)  $(1, -3, 15)$ .

## Упражнение 2

Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(-1, 2, 1)$ , с вектором нормали, имеющим координаты: а)  $(0, -5, 2)$ ; б)  $(6, -1, 3)$ ; в)  $(-4, -2, -1)$ ; г)  $(-3, -8, 0)$ .

**Ответ:** а)  $-5y+2z+8=0$ ;

б)  $6x-y+3z+5=0$ ;

в)  $-4x-2y-z+1=0$ ;

г)  $-3x-8y+13=0$ .

## Упражнение 3

В каком случае два уравнения  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ,  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  задают: а) одну плоскость; б) две параллельные плоскости?

**Ответ:** а) Если для некоторого числа  $t$  выполняются равенства  $a_2=ta_1$ ,  $b_2=tb_1$ ,  $c_2=tc_1$ ,  $d_2=td_1$ ;

б) Если для некоторого числа  $t$  выполняются равенства  $a_2=ta_1$ ,  $b_2=tb_1$ ,  $c_2=tc_1$  и неравенство  $d_2 \neq td_1$ ;

## Упражнение 4

В каком случае две плоскости, заданными уравнениями  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ,  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ , перпендикулярны?

**Ответ:** Если выполняется равенство  $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ .

# Упражнение 5

Найдите уравнения координатных плоскостей  $Oxy$ ,  $Oxz$ ,  $Oyz$ .

Ответ:  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .

## Упражнение 6

Дана плоскость  $x + 2y - 3z - 1 = 0$ . Найдите ее точки пересечения с осями координат.

Ответ:  $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{3}$ .

## Упражнение 7

Точка  $H(-2, 4, -1)$  является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Напишите уравнение этой плоскости.

Ответ:  $2x - 4y + z + 21 = 0$ .



## Упражнение 8

Напишите уравнение плоскости, которая: а) проходит через точку  $M(1, -2, 4)$  и параллельна координатной плоскости  $Oxz$ ; б) проходит через точку  $M(0, 2, 0)$  и перпендикулярна оси ординат; в) проходит через точки  $A(3, 0, 0)$ ,  $B(0, 3, 0)$  и параллельна оси аппликат.

**Ответ:** а)  $y = -2$ ; б)  $y = 2$ ; в)  $x + y = 3$ .

# Упражнение 9

Определите, какие из перечисленных ниже пар плоскостей параллельны между собой:

а)  $x + y + z - 1 = 0$ ,  $x + y + z + 1 = 0$ ;

б)  $x + y + z - 1 = 0$ ,  $x + y - z - 1 = 0$ ;

в)  $-7x + y + 2z = 0$ ,  $7x - y - 2z - 5 = 0$ ;

г)  $2x + 4y + 6z - 8 = 0$ ,  $-x - 2y - 3z + 4 = 0$ .

**Ответ:** а), в).

# Упражнение 10

Как расположены относительно друг друга следующие плоскости: а)  $5x - y + 7z - 8 = 0$  и  $5x - 2y + 14z - 16 = 0$ ; б)  $x - y + z = 0$  и  $-6x + 12y - 24z = 0$ ; в)  $15x + 9y - 30z + 12 = 0$  и  $-10x - 6y + 20z - 8 = 0$ ; г)  $-2x - 2y + 4z + 14 = 0$  и  $3x + 3y - 6z + 21 = 0$ ?

**Ответ:** а) Пересекаются; б) пересекаются;  
в) совпадают; г) параллельны.

# Упражнение 11

Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(1,3,-1)$  параллельно плоскости: а)  $3x + y - z + 5 = 0$ ; б)  $x - y + 5z - 4 = 0$ .

**Ответ:** а)  $3x + y - z - 7 = 0$ ; б)  $x - y + 5z + 7 = 0$ .

## Упражнение 12

Перпендикулярны ли плоскости: а)  $2x - 5y + z + 4 = 0$  и  $3x + 2y + 4z - 1 = 0$ ; б)  $7x - y + 9 = 0$  и  $y + 2z - 3 = 0$ ?

Ответ: а) Да;

б) нет.

## Упражнение 13

Найдите угол  $\varphi$  между плоскостями, заданными уравнениями:

а)  $x + y + z + 1 = 0$ ,  $x + y - z - 1 = 0$ ; б)  $2x + 3y + 6z - 5 = 0$ ,  $4x + 4y + 2z - 7 = 0$ .

Ответ: а)  $\cos \varphi = \frac{1}{3}$ ;      б)  $\cos \varphi = \frac{16}{21}$ .

## Упражнение 14

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки: а)  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$  и  $C(0,0,1)$ ; б)  $M(3,-1,2)$ ,  $N(4,1,-1)$  и  $K(2,0,1)$ .

**Ответ:** а)  $x+y+z-1=0$ ; б)  $x+4y+3z-5=0$ .

# Упражнение 15

Плоскость задана уравнением  $ax + by + cz + d = 0$ . Напишите уравнение плоскости, симметричной данной относительно: а) координатных плоскостей; б) координатных прямых; в) начала координат.

**Ответ:** а)  $ax + by - cz + d = 0$ ,  $ax - by + cz + d = 0$ ,  $-ax + by + cz + d = 0$ ;

б)  $ax - by - cz + d = 0$ ,  $-ax + by - cz + d = 0$ ,  $-ax - by + cz + d = 0$ ; в)  $-ax - by - cz + d = 0$ .



## Упражнение 16

Вычислите расстояние от начала координат до плоскости: а)  $2x - 2y + z - 6 = 0$ ; б)  $2x + 3y - 6z + 14 = 0$ .

Ответ: а) 2; б) 2.

# Упражнение 17

Составьте уравнение плоскости, касающейся сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  в точке с координатами: а)  $(0,3,0)$ ; б)  $(2,-2,1)$ .

Ответ: а)  $y=3$ ;

б)  $2x-2y+z-9=0$ .