

Уравнения



Определения

- Равенство с переменной $g(x) = f(x)$ называется *уравнением с одной переменной x* .
 - Всякое значение переменной, при котором $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные числовые значения, называется *корнем уравнения*.
 - Решить уравнение - это значит найти все его корни или доказать, что их нет.
-

Равносильные уравнения

- Уравнения, имеющие одни и те же корни, называются *равносильными*.
- Равносильными считаются и уравнения, у которых нет корней.
- Например, уравнения $x + 2 = 5$ и $x + 5 = 8$ равносильны;
- уравнения $x^2 + 5 = 0$ и $3x^2 + 1 = 0$ равносильны, так как корней не имеют.

Теорема 1

- Если в уравнении какое-нибудь слагаемое перенести из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному.
-

Теорема 2

- Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.
-

Линейные уравнения

- Линейным уравнением с одной переменной x называют уравнение вида $ax = b$, где $a, b \in R$; a называют коэффициентом при переменной, b - свободным членом.

Три случая для линейного уравнения $ax = b$

- 1) $a \neq 0$; в этом случае корень равен b/a ;
 - 2) $a = 0, b = 0$; в этом случае уравнение принимает вид $0x = 0$, что верно при любом x , т. е. корнем уравнения является любое действительное число;
 - 3) $a = 0, b \neq 0$; в этом случае уравнение принимает вид $0x = b$, оно не имеет корней.
-

Квадратное уравнение

- Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0,$$

где $a, b, c \in R$ ($a \neq 0$).

Числа a, b, c носят следующие названия: a - первый коэффициент, b - второй коэффициент, c - свободный член.

Дискриминант

- Выражение $D=b^2-4ac$ называется **дискриминантом** квадратного уравнения.
- Если $a = 1$, то квадратное уравнение вида $x^2+px+q=0$ называется **приведенным**, а его дискриминант $D=p^2-4q$.

Теорема 3: $D \geq 0$

- Если $D \geq 0$, то квадратное уравнение имеет корни $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, причем если $D = 0$, то уравнение имеет два совпадающих корня, а если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня, определяемых формулой:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Теорема 3: $D < 0$

- Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Корни приведенного уравнения

- В случае приведенного квадратного уравнения и формулы корней имеют вид:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$
$$x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$