

Презентация к уроку по теме «Урок одного уравнения»

Алгебра и начала анализа 10 класс

Учитель математики

Секисова Валентина Васильевна

МБОУ «СОШ № 7»

г Касимов, Рязанская область.

2013г



- Цели: рассмотреть различные методы решения тригонометрического уравнения;
 - развивать умение логически мыслить.
-

- Оборудование:
- интерактивная доска. презентация, чертежные инструменты.,
- тригонометрические формулы.

Уравнение одно – решений
МНОГО.

Выполнили: Баранова Светлана

Езенкова Дарья

Руководитель: Секисова

Валентина Васильевна

МБОУ «СОШ №7»

г. Касимов

*«Знание только тогда знание,
когда оно приобретено
усилиями своей мысли.»*

Лев Толстой

Мудрость гласит:

«Все дороги ведут в

Рим»

$$\sin x - \cos x = 1$$

I способ

Метод разложения на множители, используя формулы двойного угла

$$\sin x - \cos x = 1$$

Применим формулы двойного угла:

$$\sin a = 2\sin a/2\cos a/2$$

$$\cos a = 2\cos^2 a/2 - 1$$

Тогда данное уравнение примет вид:

$$2\sin x/2\cos x/2 - (2\cos^2 x/2 - 1) = 1$$

$$2\sin x/2\cos x/2 - 2\cos^2 x/2 + 1 = 1$$

$$2\sin x/2\cos x/2 - 2\cos^2 x/2 = 0$$

Разложим на множители

$$2\cos x/2(\sin x/2 - \cos x/2) = 0$$

Произведение нескольких множителей равно 0 тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0, а другие при этом определены.

$$\cos x/2 = 0 \quad \text{или} \quad \sin x/2 - \cos x/2 = 0$$

Частный случай.

$$x/2 = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Имеем однородное

уравнение I степени, поделим на $\cos x/2 \neq 0$

$$\operatorname{tg} x/2 - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} x/2 = 1$$

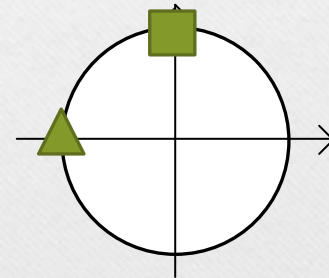
$$x/2 = \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Покажем на окружности

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \blacktriangle$$

$$x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \blacksquare$$



Ответ: $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

II способ

Переход к однородному уравнению, применяя основные тригонометрические формулы

$$\sin x - \cos x = 1$$

Решим уравнение, применим формулу двойного угла:

$$\sin a = 2\sin a/2 \cos a/2$$

$$\cos a = \cos^2 a/2 - \sin^2 a/2$$

$$1 = \cos^2 a/2 + \sin^2 a/2$$

$$2\sin a/2 \cos a/2 - \cos^2 a/2 + \sin^2 a/2 = \cos^2 a/2 + \sin^2 a/2$$

$$2\sin a/2 \cos a/2 - 2\cos^2 a/2 = 0$$

Разложим на множители

$$2\cos x/2(\sin x/2 - \cos x/2) = 0$$

Произведение нескольких множителей равно 0 тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0, а другие при этом определены.

$$\cos x/2 = 0 \quad \text{или} \quad \sin x/2 - \cos x/2 = 0$$

Частный случай.

Имеем однородное уравнение 1 степени, поделим
на $\cos x/2 \neq 0$

$$x/2 = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{tg } x/2 - 1 = 0$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{tg } x/2 = 1$$

$$x/2 = \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

III способ

При применении универсальной тригонометрической подстановки мы можем любое тригонометрическое уравнение свести к алгебраическому, но при этом необходимо помнить, что может произойти потеря корней. Поэтому необходимо выполнить проверку.

$$\sin x - \cos x = 1$$

Применим универсальную подстановку

$$\sin a = (2\operatorname{tg} a/2)/(1+\operatorname{tg}^2 x/2)$$

$$\cos a = (1 - \operatorname{tg}^2 x/2)/(1+\operatorname{tg}^2 x/2)$$

$$(2\operatorname{tg} a/2)/(1+\operatorname{tg}^2 x/2) - (1 - \operatorname{tg}^2 x/2)/(1+\operatorname{tg}^2 x/2) = 1 \quad (\text{доп. множитель } 1+\operatorname{tg}^2 x/2)$$

$$2\operatorname{tg} x/2 - 1 + \operatorname{tg}^2 x/2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x/2$$

$$2\operatorname{tg} x/2 = 2$$

$$\operatorname{tg} x/2 = 1$$

Частный случай.

$$x/2 = \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Проверим, не произошло ли потери корней, это те значения, при которых $\operatorname{tg} x/2$ не имеет смысла:

$$x/2 = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Следовательно, корни $x = \pi + 2\pi n$ потеряны.

$$2 \sin \pi - \cos \pi = 1$$

$$0 - (-1) = 1$$

$$1 = 1 \text{ верно}$$

$$\text{Ответ: } x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

IV способ

Переход к простейшему тригонометрическому уравнению путем применения формул сложения.

$$\sin x - \cos x = 1$$

Применим формулы приведения

$$\cos a = \sin(\pi/2 - a), \text{ тогда}$$

$$\sin x - \sin(\pi/2 - x) = 1$$

Применим формулу разности синусов:

$$\sin x - \sin b = 2\cos(a+b)/2\sin(a-b)/2$$

$$2\sin(x - \pi/2 + x)/2\cos(x + \pi/2 - x)/2 = 1$$

$$2\sin(2x - \pi/2)\cos \pi/4 = 1$$

$$2\sin(x - \pi/4)\sqrt{2}/2 = 1$$

$$\sqrt{2}\sin(x - \pi/4) = 1$$

$$\sin(x - \pi/4) = \sqrt{2}/2$$

Получили простейшее тригонометрическое уравнение.

$$x - \pi/4 = (-1)^n \arcsin \sqrt{2}/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x - \pi/4 = (-1)^n \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \pi/4 + \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

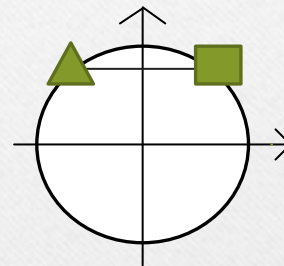
Покажем решение на единичной
окружности.

$$\sin(x - \pi/4) = \sqrt{2}/2$$

$\pi/4$



$3\pi/4$



$$x - \pi/4 = \pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x - \pi/4 = 3\pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

V способ

Метод введения вспомогательного угла намного ускоряет процесс решения уравнения

Уравнение вида

● $a \sin x + b \cos x = c$

1 Найдем $\sqrt{a^2 + b^2}$

2 Раздели почленно $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$(a/\sqrt{a^2 + b^2}) \sin x + (b/\sqrt{a^2 + b^2}) \cos x = c/\sqrt{a^2 + b^2}$$

3 Обозначим

$$\cos \varphi = a/\sqrt{a^2 + b^2} \quad \sin \varphi = b/\sqrt{a^2 + b^2}$$

4 Подставим

$$\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x = c/\sqrt{a^2 + b^2}$$

5 Левую часть свернем по формуле

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(x + \varphi) = c/\sqrt{a^2 + b^2}$$

6 Получили простейшее тригонометрическое уравнение.

$$x + \varphi = (-1)^n \arcsin(c/\sqrt{a^2 + b^2}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \arcsin(c/\sqrt{a^2 + b^2}) - \varphi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x - \cos x = 1$$

$$1 \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$2 (1/\sqrt{2})\sin x - (1/\sqrt{2})\cos x = 1/\sqrt{2}$$

$$3 \cos \varphi = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 \quad \sin \varphi = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$$

$$\varphi = \pi/4$$

$$\varphi = \pi/4$$

4 Свернем по формуле $\sin(a - b)$

$$\sin(x - \pi/4) = \sqrt{2}/2$$

$$x - \pi/4 = (-1)^n \arcsin \sqrt{2}/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x - \pi/4 = (-1)^n \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

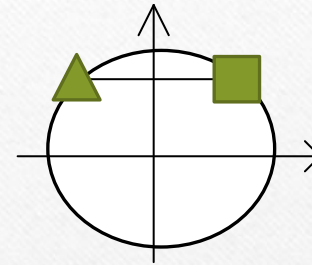
$$x = (-1)^n \pi/4 + \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Запишем в двух сериях

$$\sin(x - \pi/4) = \sqrt{2}/2$$

Корни I серии обозначим \blacksquare $\pi/4$

Корни II серии обозначим \blacktriangle $3\pi/4$



$$x - \pi/4 = \pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x - \pi/4 = 3\pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Решим самостоятельно

Решить каждое уравнение несколькими способами.



(Работа в парах)

1 $\sin x - \cos x = \sqrt{3/2}$

2 2 $\sin x/6 + \sqrt{3\cos x/6} + 1 = 0$

Сверим ответы.

1 $\sin x - \cos x = \sqrt{3/2}$

2 *Ответ: 1) $\pm 5\pi/6 - \pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$*

• $\sin x/6 + \sqrt{3\cos x/6 + 1} = 0$

• *Ответ: 2) $\pm 4\pi + \pi(12n+1)/ n \in \mathbb{Z}$*

Дома.

*Решить два уравнение (по выбору)
всеми способами.*

1 $\cos x + \sqrt{3\sin x} = \sqrt{2}$

2 $\cos(x - \pi/6) - \sin(x - \pi/6)\operatorname{tg} \pi/6 = -(1/\sqrt{3})$

3 $2\sin x = \sqrt{6 + 2\cos x}$

4 $\sqrt{2}\sin x = 2 - \sqrt{2\cos x}$

Спасибо за

внимание

Литература
