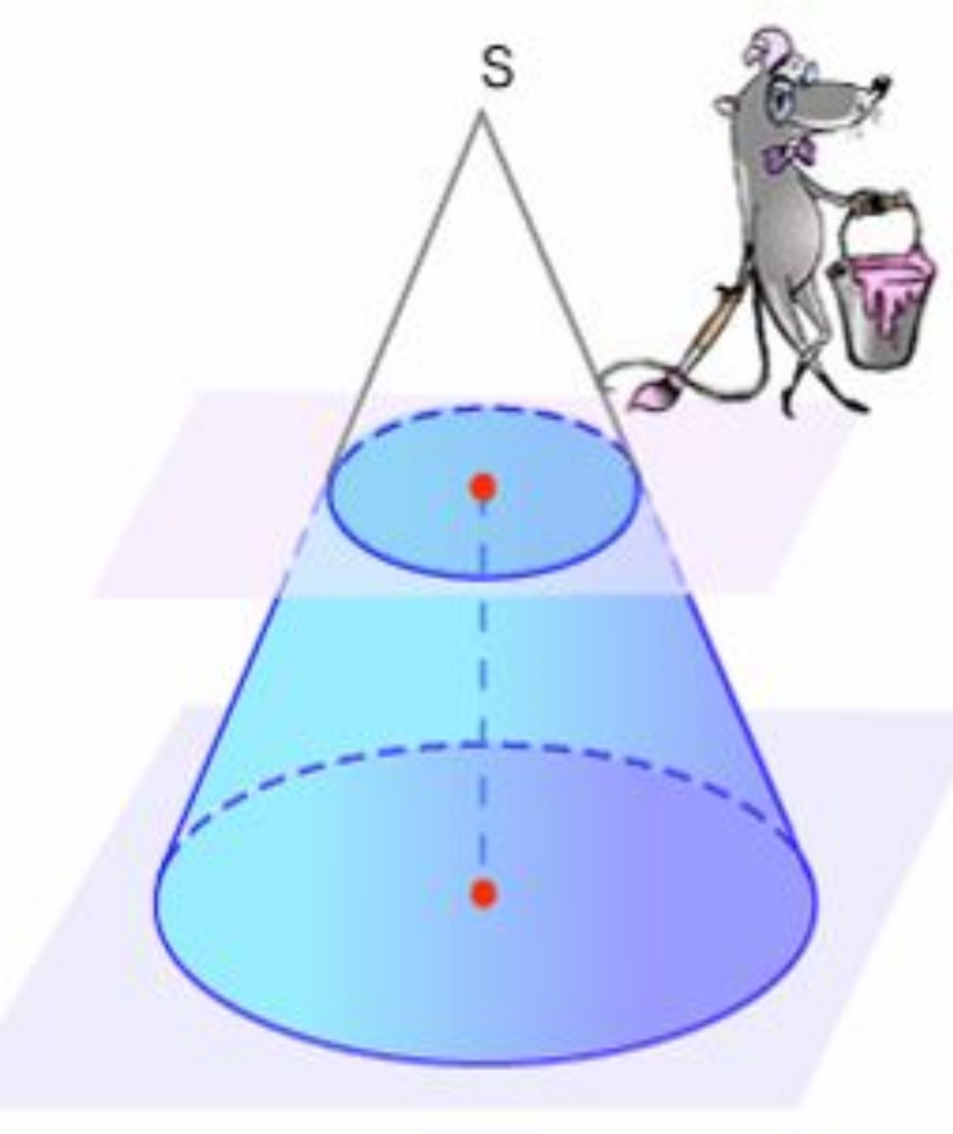
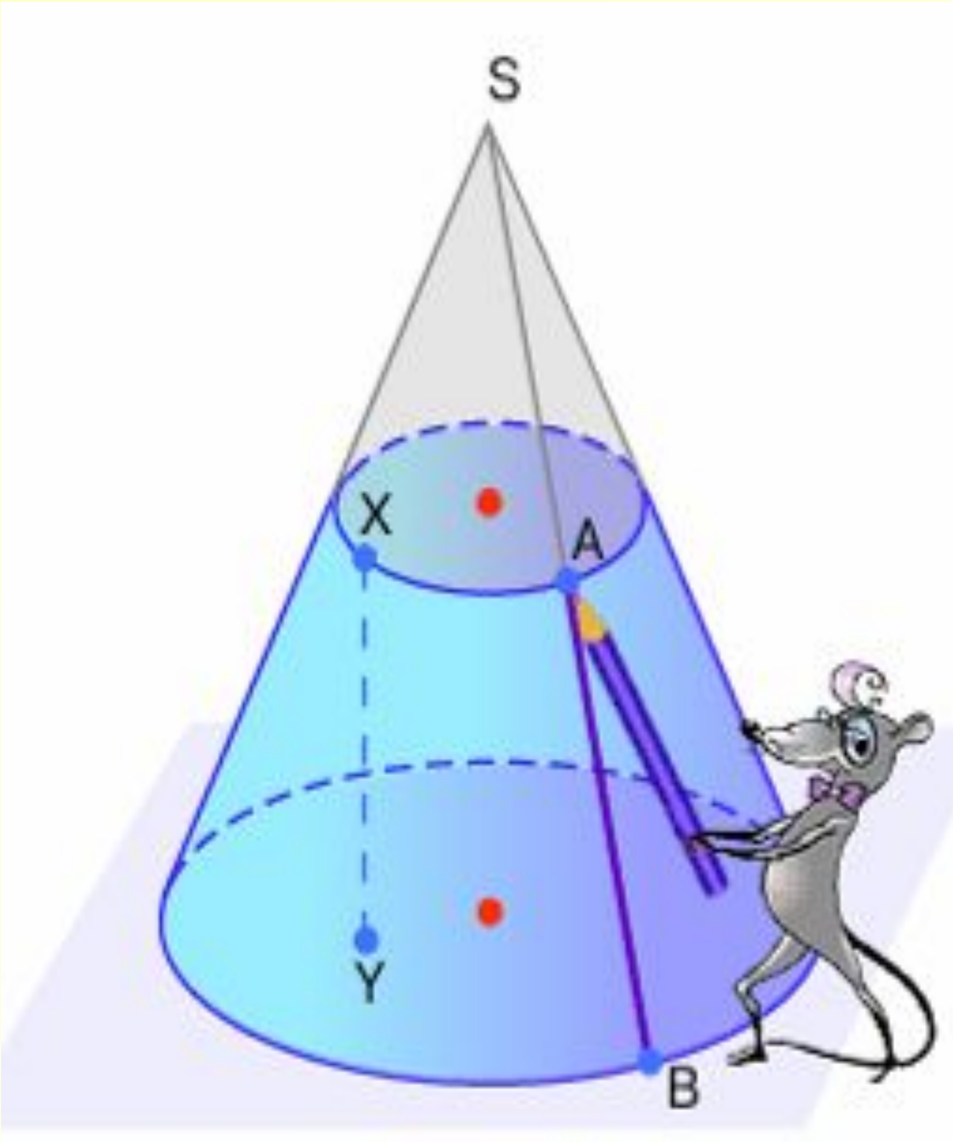
# Усеченный конус.

МОУ СОШ №256 г. Фокино




**Усеченным конусом** называется часть полного конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. Круги, лежащие в параллельных плоскостях, называются **основаниями** усеченного конуса.

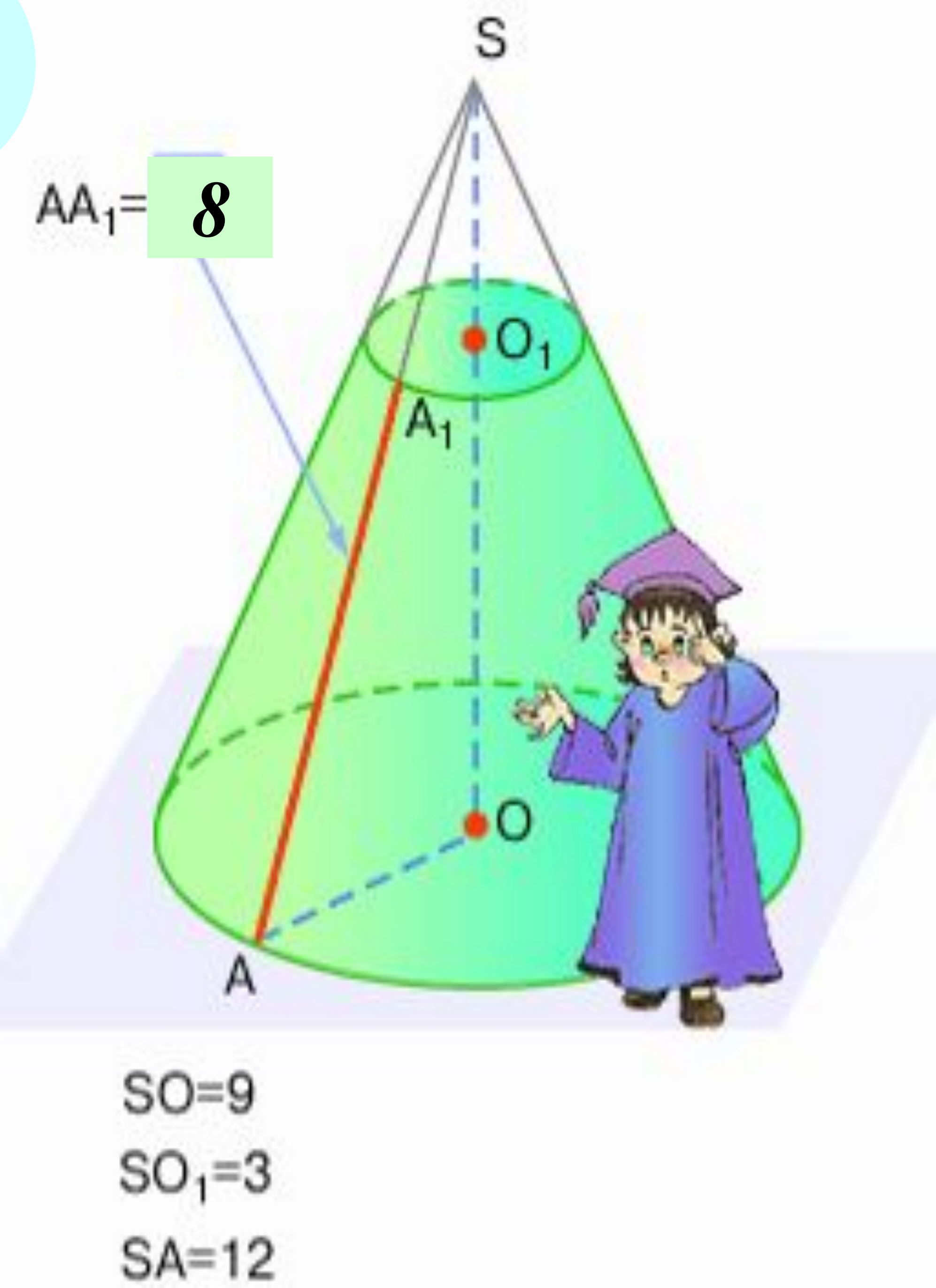


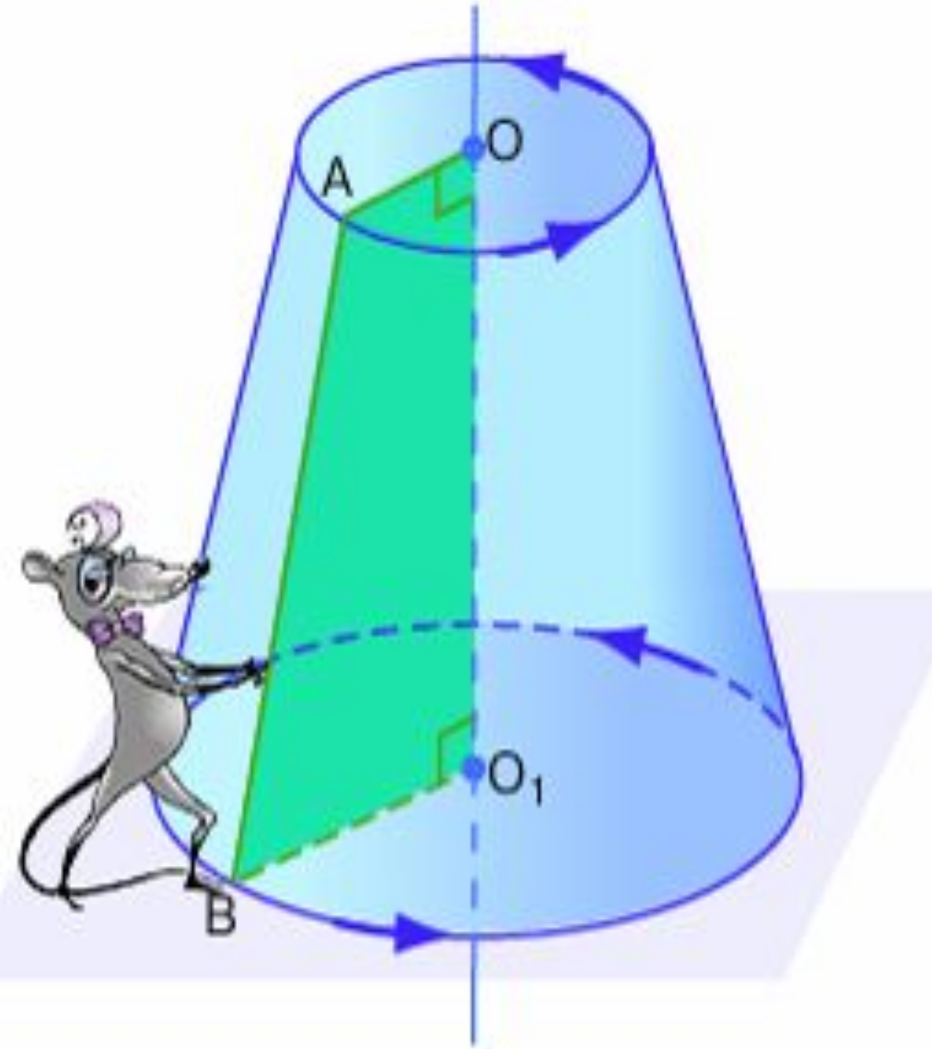

**Образующей** усеченного конуса называется часть образующей полного конуса, заключенная между основаниями.

**Высотой** усеченного конуса называется расстояние между основаниями.

?

**Пусть в конусе, высота которого известна, проведено сечение, находящееся на расстоянии три от вершины. Чему равна образующая получившегося усеченного конуса, если известна образующая полного конуса?**



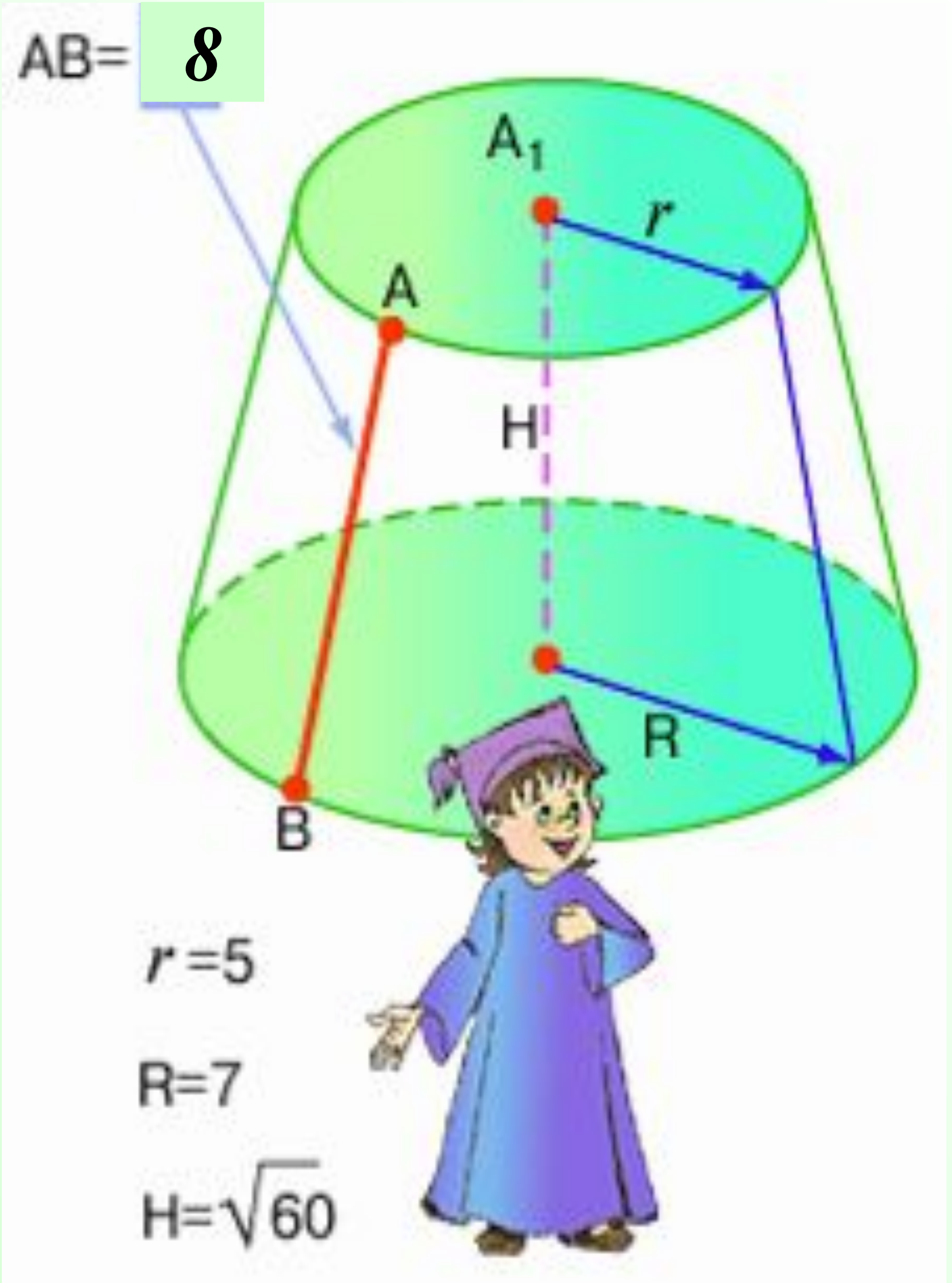


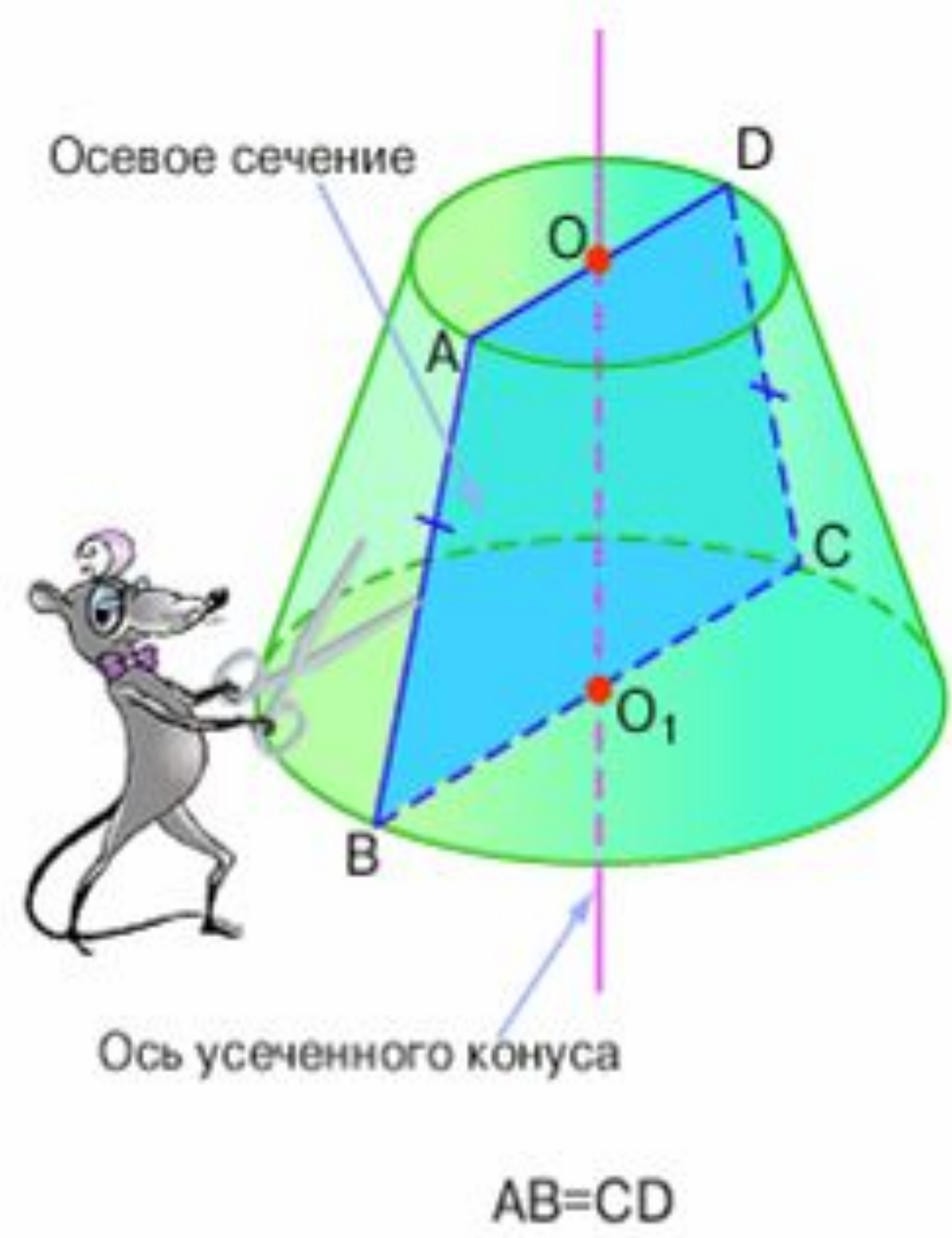
$ABO_1O$ – прямоугольная трапеция

**Усеченный конус можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной основанию.**

?

**Пусть дан усеченный конус, радиусы оснований и высота которого известны. Найдите образующую усеченного конуса.**

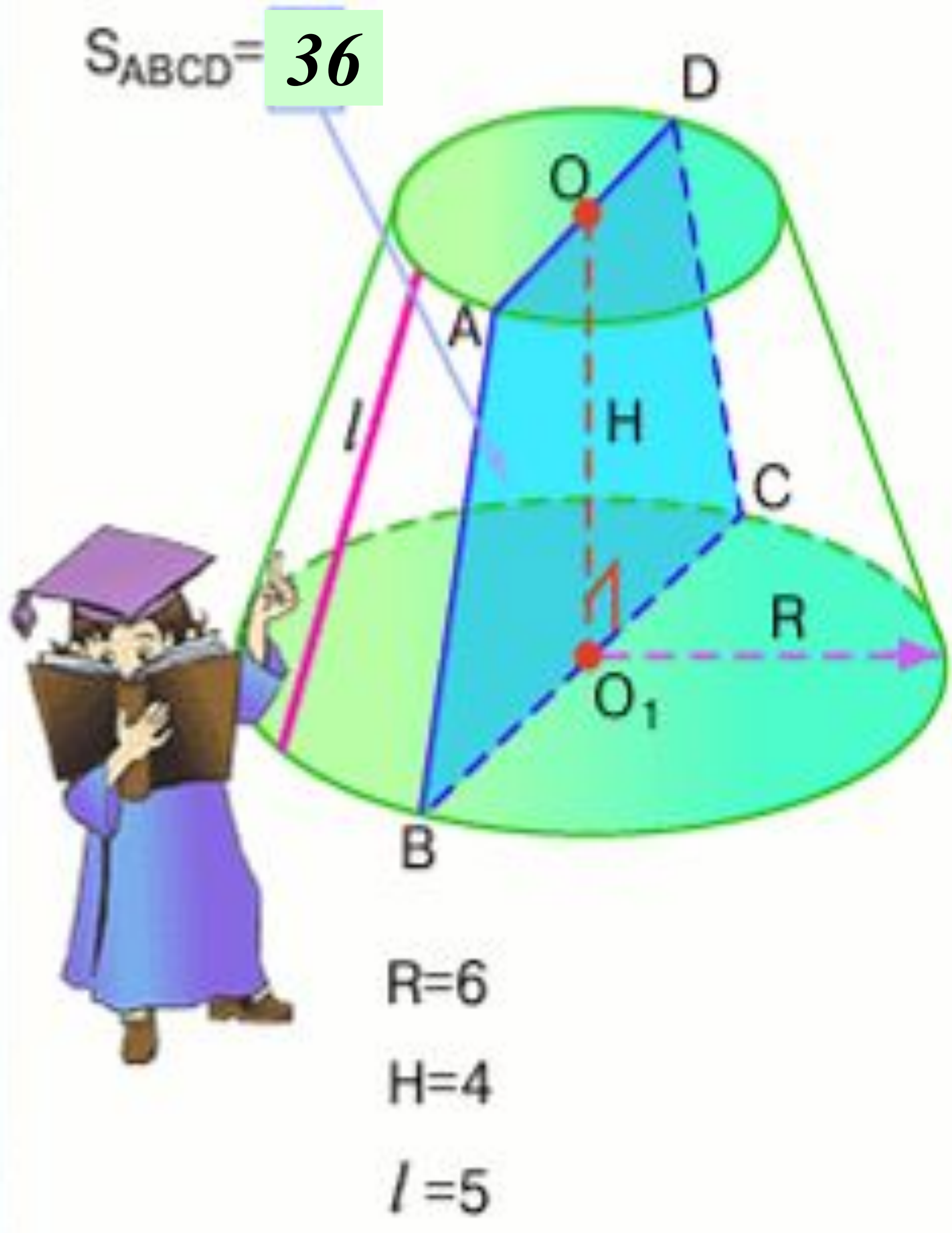





**Прямая, соединяющая центры оснований, называется осью усеченного конуса. Сечение, проходящее через ось, называется осевым. Осевое сечение является равнобедренной трапецией.**

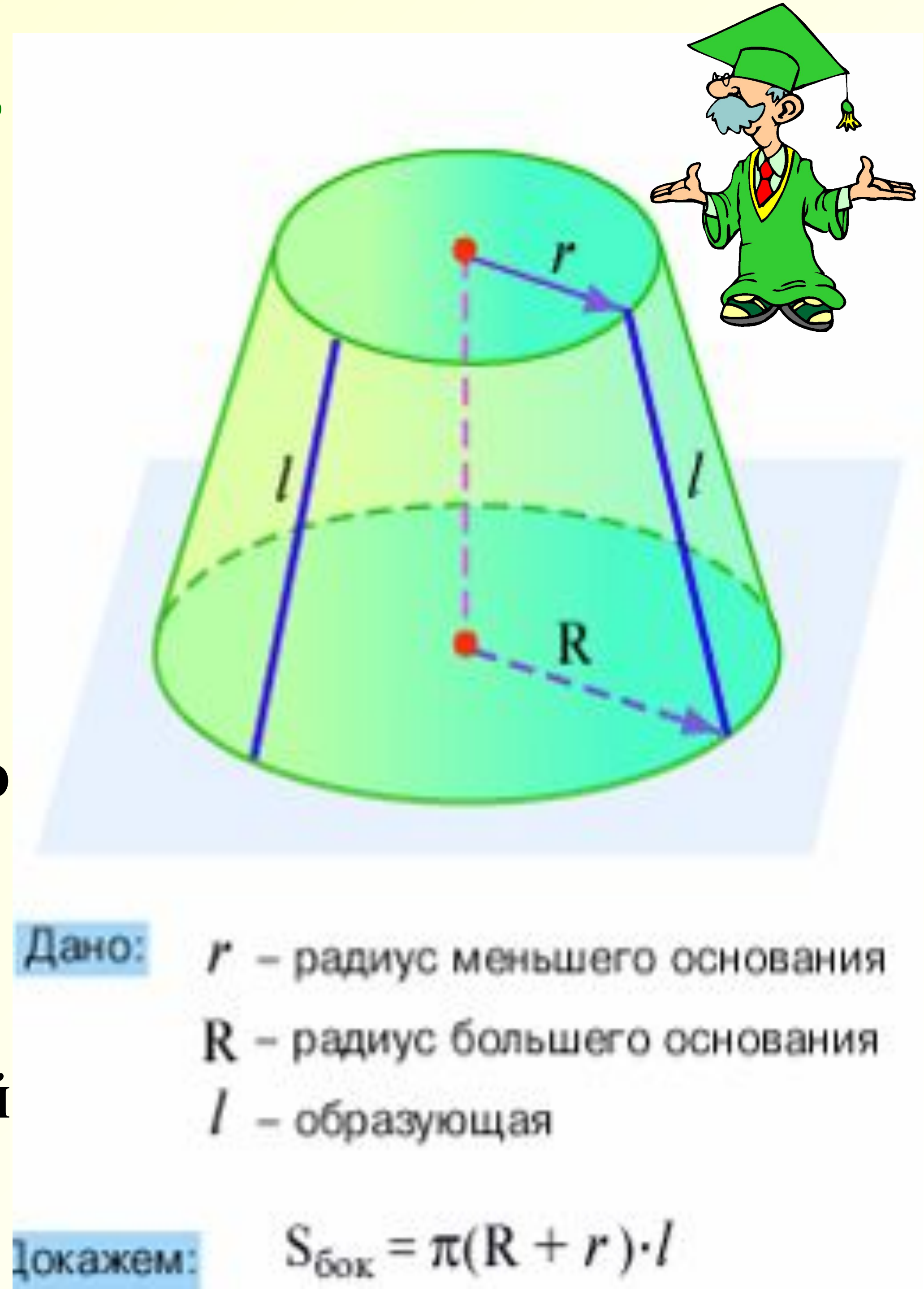
?

**Найдите площадь осевого сечения, если известны радиус нижнего основания, высота и образующая.**



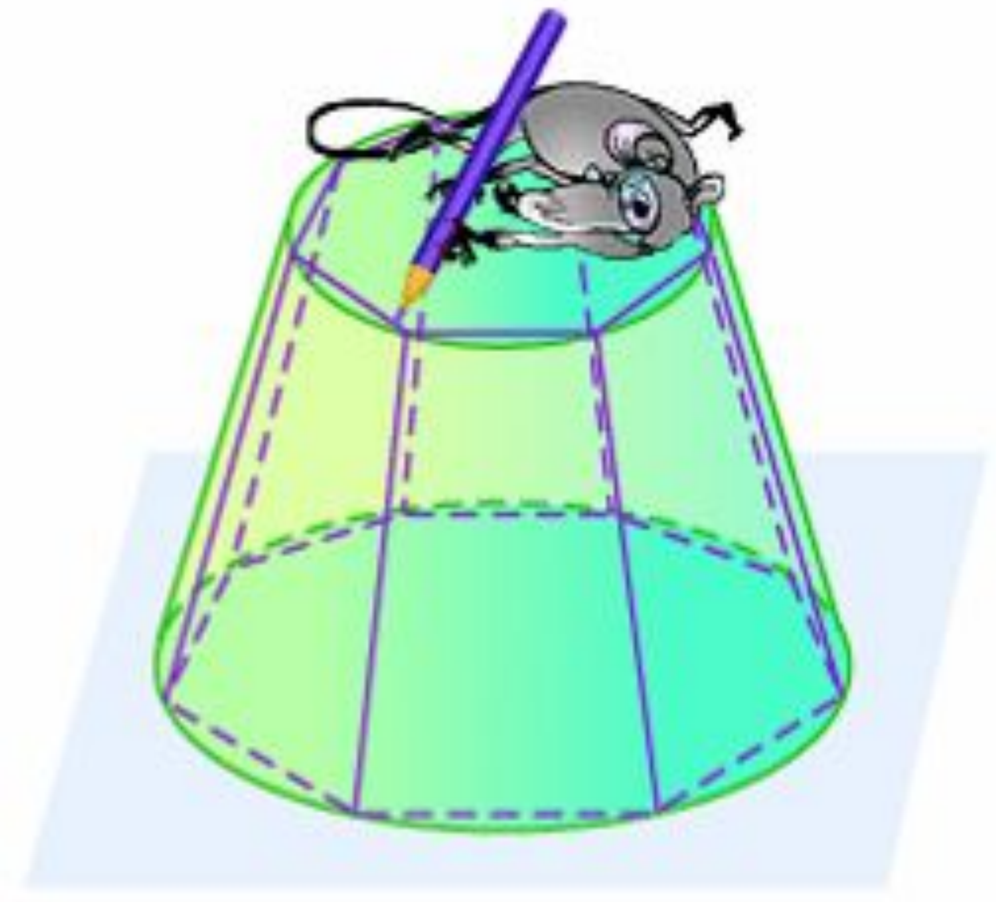
# Боковая поверхность усеченного конуса. Площадь боковой поверхности усеченного конуса.

**Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.**



# Доказательство:

**Боковую поверхность усеченного конуса будем понимать как предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот конус правильной усеченной пирамиды, когда число боковых граней неограниченно увеличивается.**



$S_{бок.пирамиды} \rightarrow S_{бок.конуса}$

# Доказательство:

**Впишем в конус правильную пирамиду. Ее боковая поверхность состоит из трапеций.**

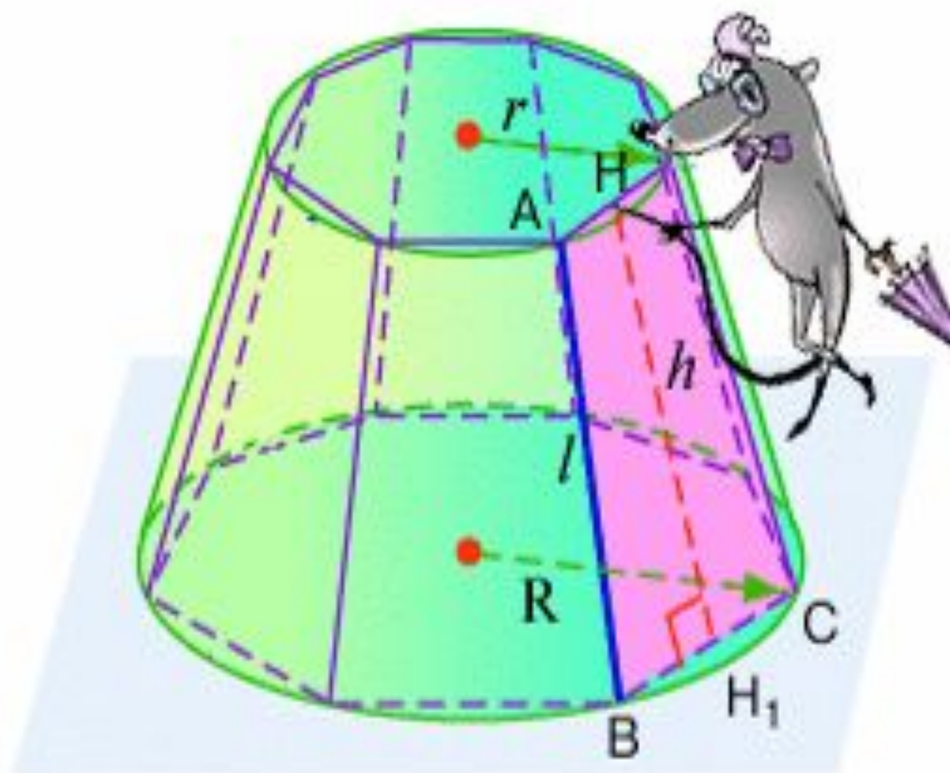
$$s_{бок.пир}=\frac{(p+P)}{2}h$$

$$S_{бок.пир}\to S_{бок.кон}$$

$$p\to c \quad P\to C \quad h\to l$$

$$c=2\pi r \quad C=2\pi R$$

$$\frac{2\pi(R+r)}{2}l=\underline{\pi(R+r)l}$$

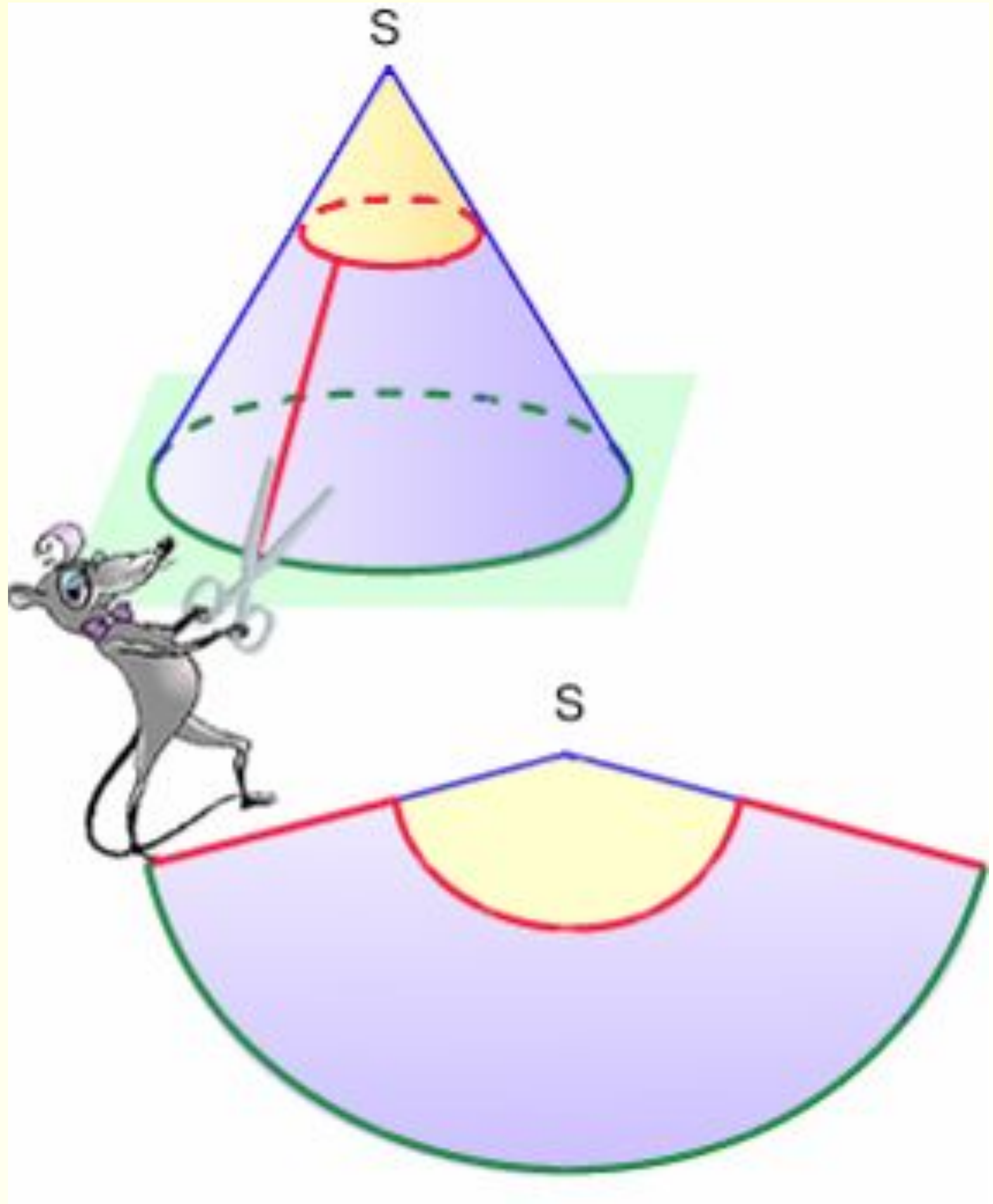



$p$ – периметр меньшего основания

$\mathbf{P}$ – периметр большего основания

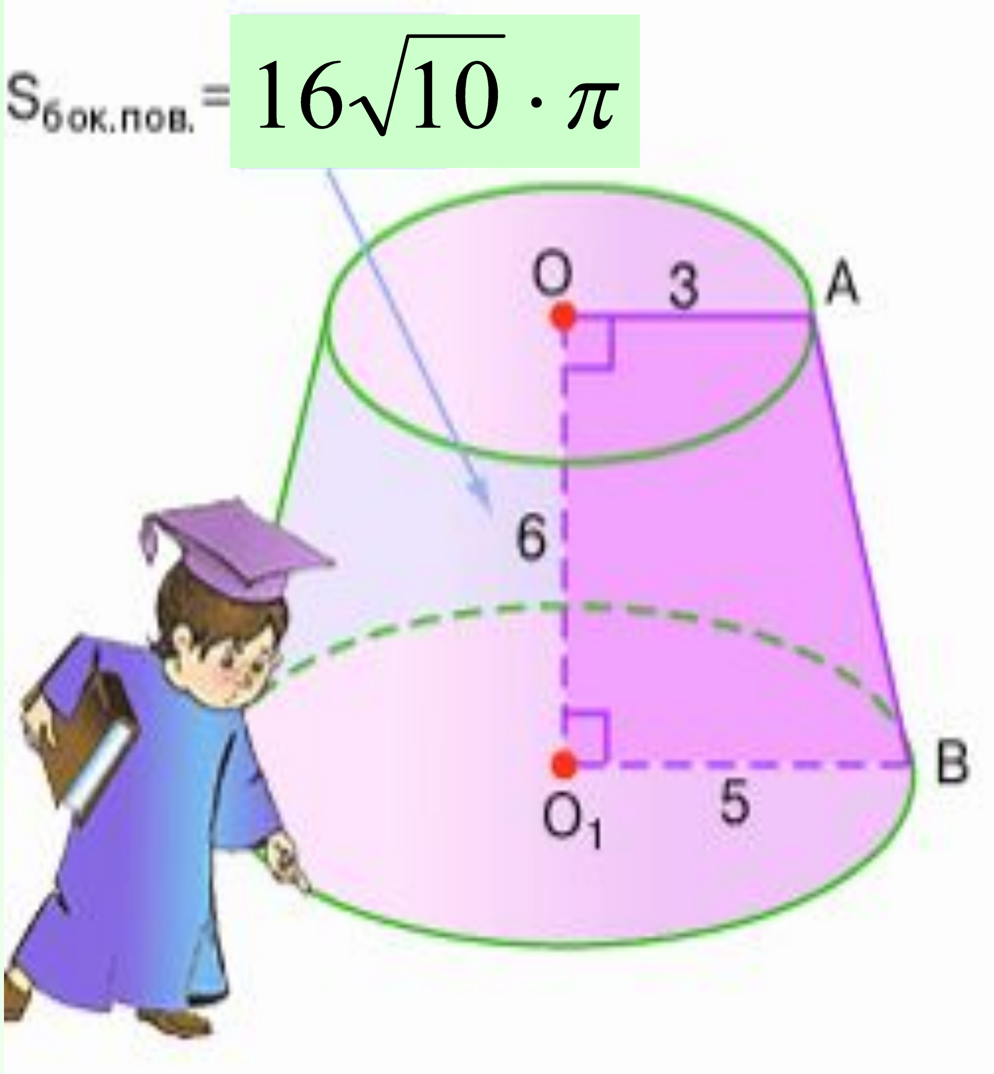
# Замечание:

Площадь боковой поверхности усеченного конуса можно рассматривать как разность между площадями боковых поверхностей двух конусов. Поэтому развертка усеченного конуса – это часть круглого кольца.



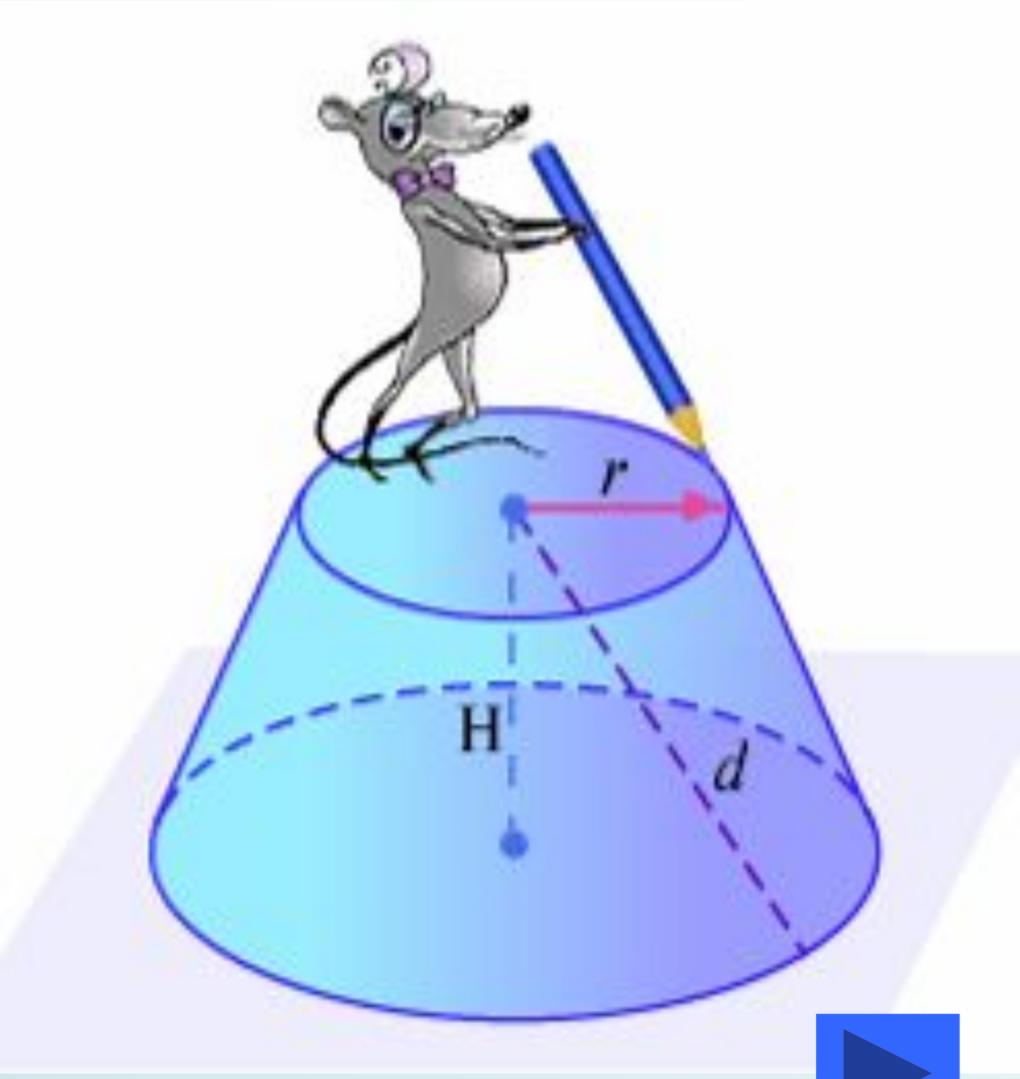
?

**Усеченный конус получен от вращения прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной основаниям, Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если известны основания и боковая сторона трапеции.**



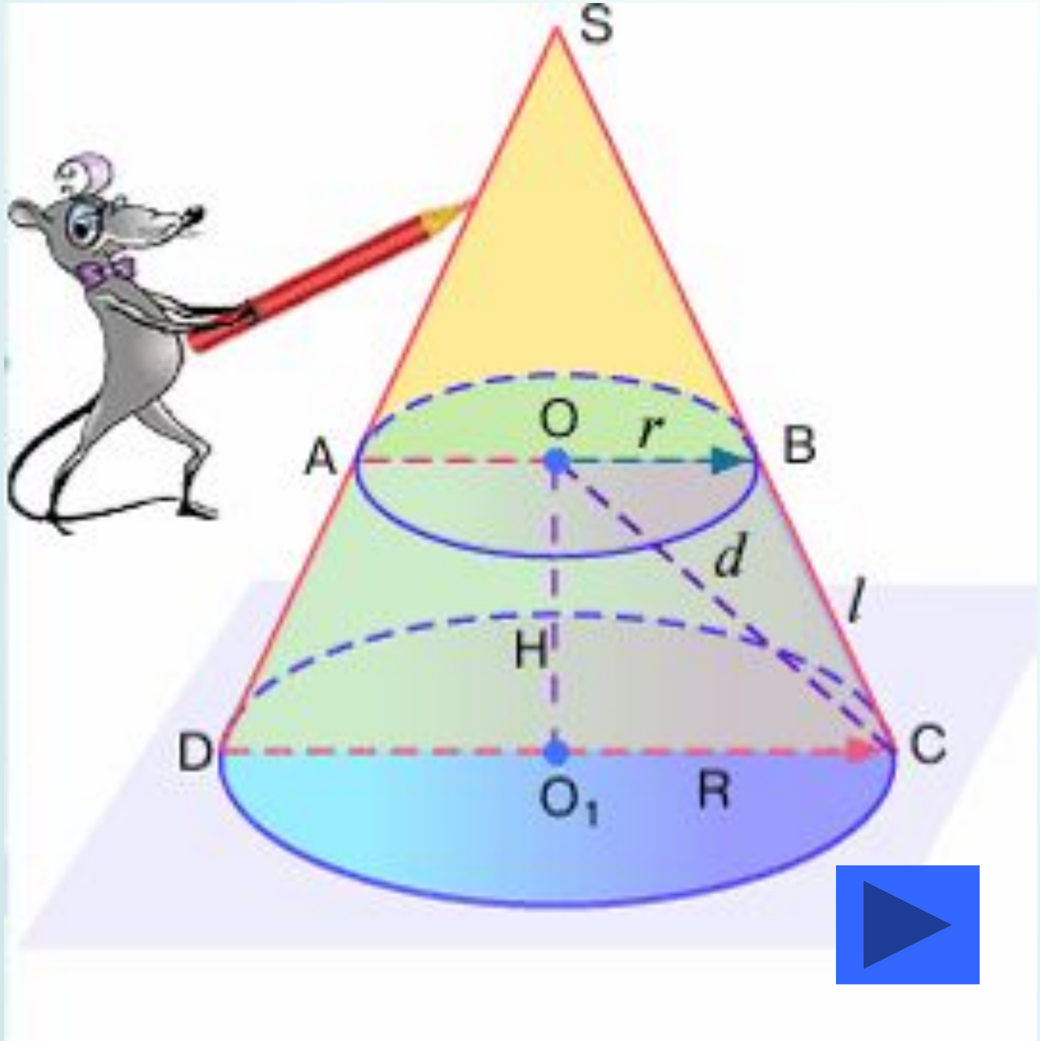
# Задача.

- **Радиус меньшего основания усеченного конуса равен 5, высота равна 6, а расстояние от центра меньшего основания до окружности большего основания равно 10. Найдите площадь боковых поверхностей усеченного и полного конусов.**



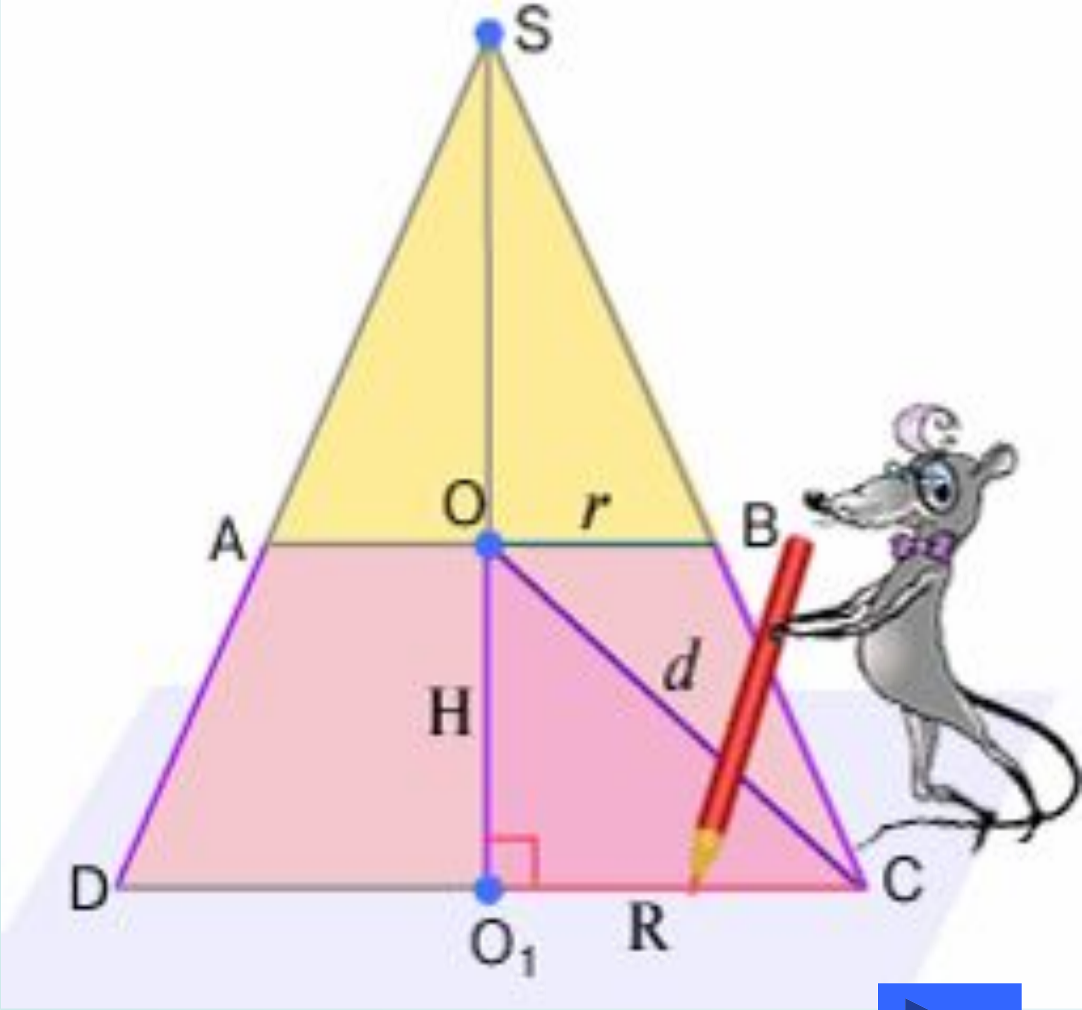
# Решение:

Достроим усеченный конус до полного и проведем осевое сечение.



# Решение:

**1) Вычислим радиус большего основания.**




$\Delta OO_1C:$

$$d^2 = H^2 + R^2$$

$$R = \sqrt{d^2 - H^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

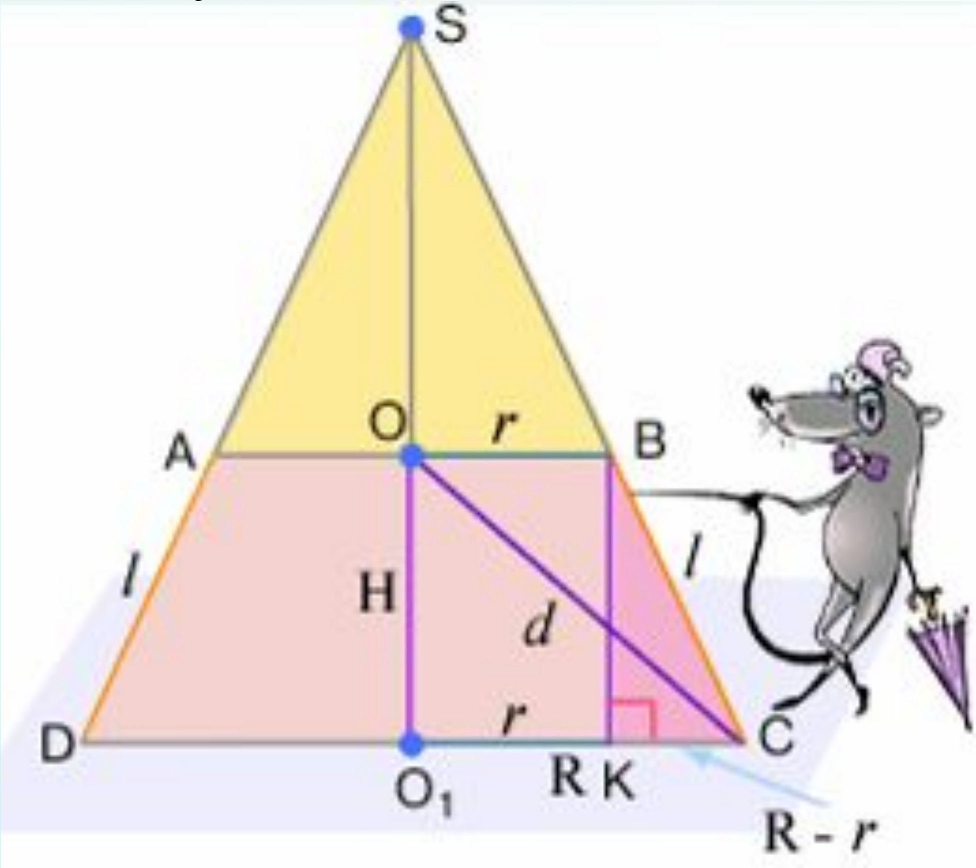
# Решение:

**2) Найдем боковую сторону трапеции – образующую усеченного конуса.**

$$\Delta BKC:$$

$$CK = R - r = 3$$

$$BC^2 = BK^2 + CK^2$$




$$l = \sqrt{H^2 + CK^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$

# Решение:

**3) Используя подобие треугольников, найдем образующую полного конуса.**

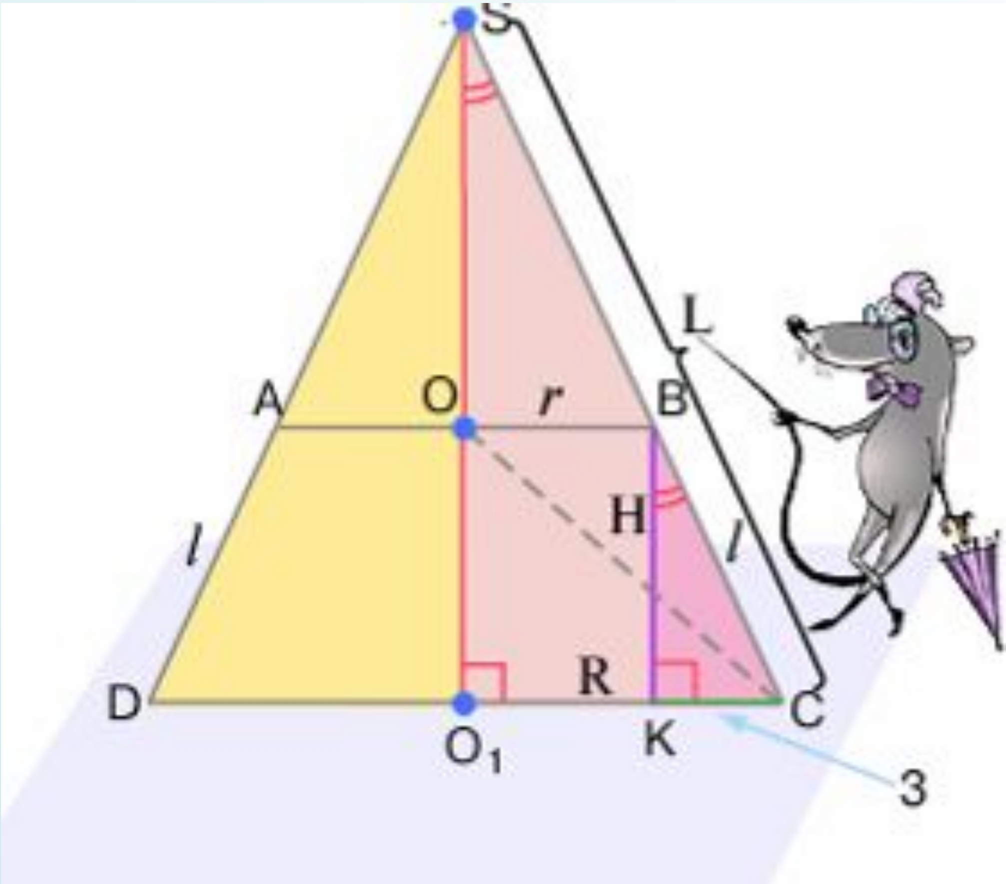
$$SC = L$$

$$\Delta SO_1C \sim \Delta BKC$$

$$\frac{SC}{BC} = \frac{O_1C}{KC}$$

$$\frac{L}{3\sqrt{5}} = \frac{8}{3}$$

$$L = 8\sqrt{5}$$



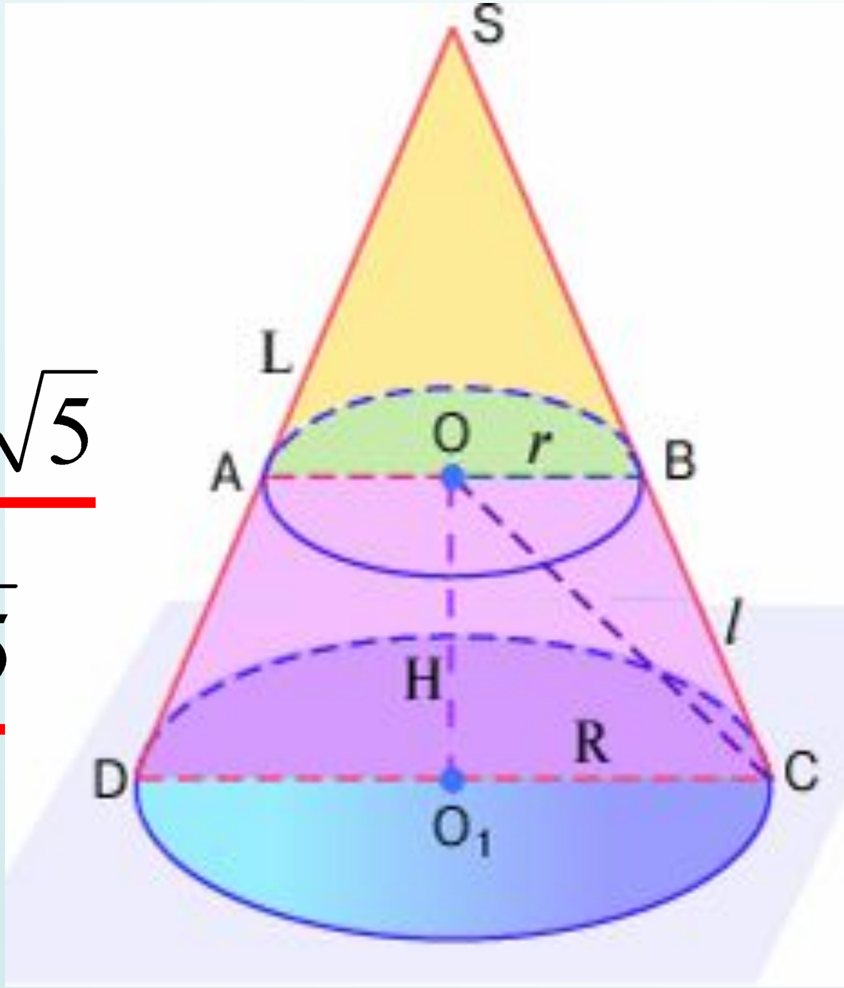
# Решение:

***4) Подставим найденные значения в формулы для площадей боковой поверхности полного и усеченного конусов.***

$$L = 8\sqrt{5} \qquad l = 3\sqrt{5}$$

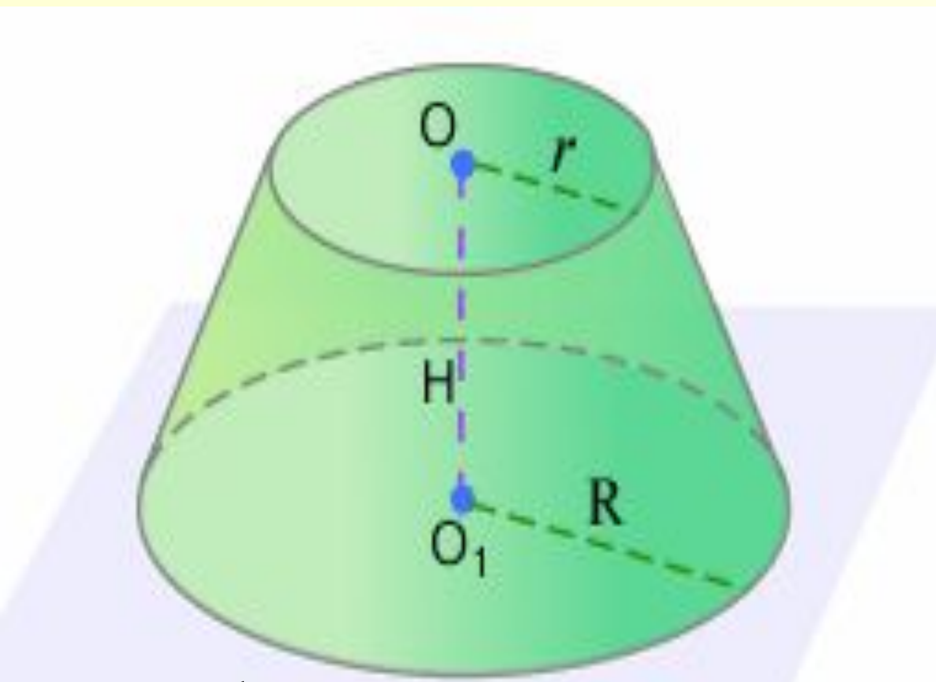
$$S_{усеч} = \pi(R + r)\cdot l = \underline{\pi \cdot 39\sqrt{5}}$$

$$S_{полн} = \pi(RL) = \underline{\pi \cdot 64\sqrt{5}}$$



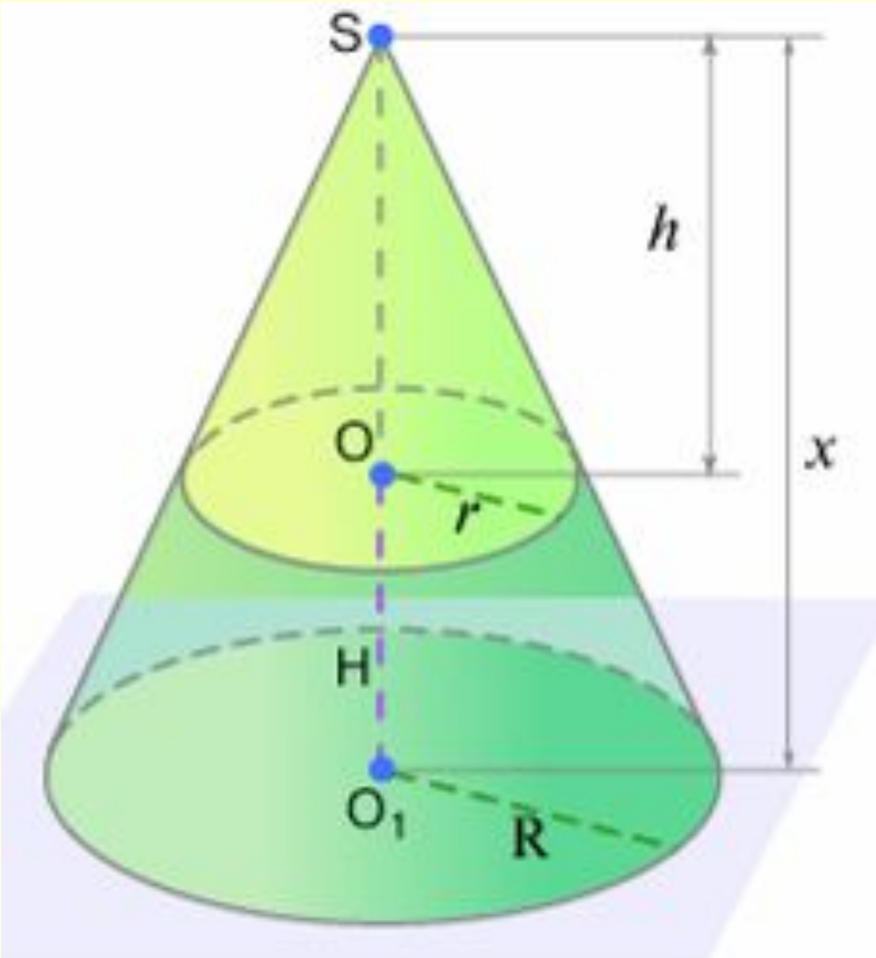
# Формула объема усеченного конуса.

- Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих одинаковую высоту с усеченным конусом, а основаниями: один – нижнее основание этого конуса, другой – верхнее, а третий – круг, радиус которого есть среднее геометрическое между радиусами верхнего и нижнего оснований.




$$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$$

# Доказательство:

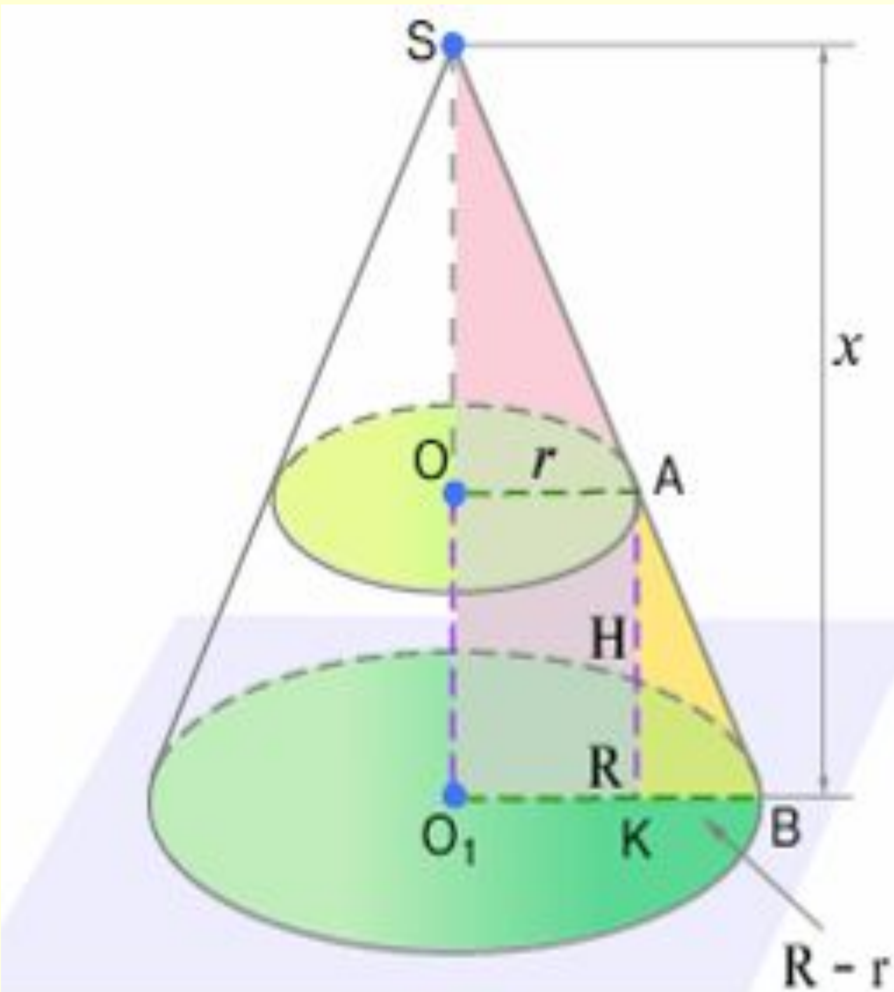



**Поместим на верхнем основании усеченного конуса малый конус, дополняющий его до полного и рассмотрим объем его как разность объемов двух конусов.**

$$V_{усеч.кон} = V_{полн} - V_{доп} = \frac{1}{3}\pi R^2 x - \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

# Доказательство:

***Вычислим высоту полного конуса из подобия треугольников.***

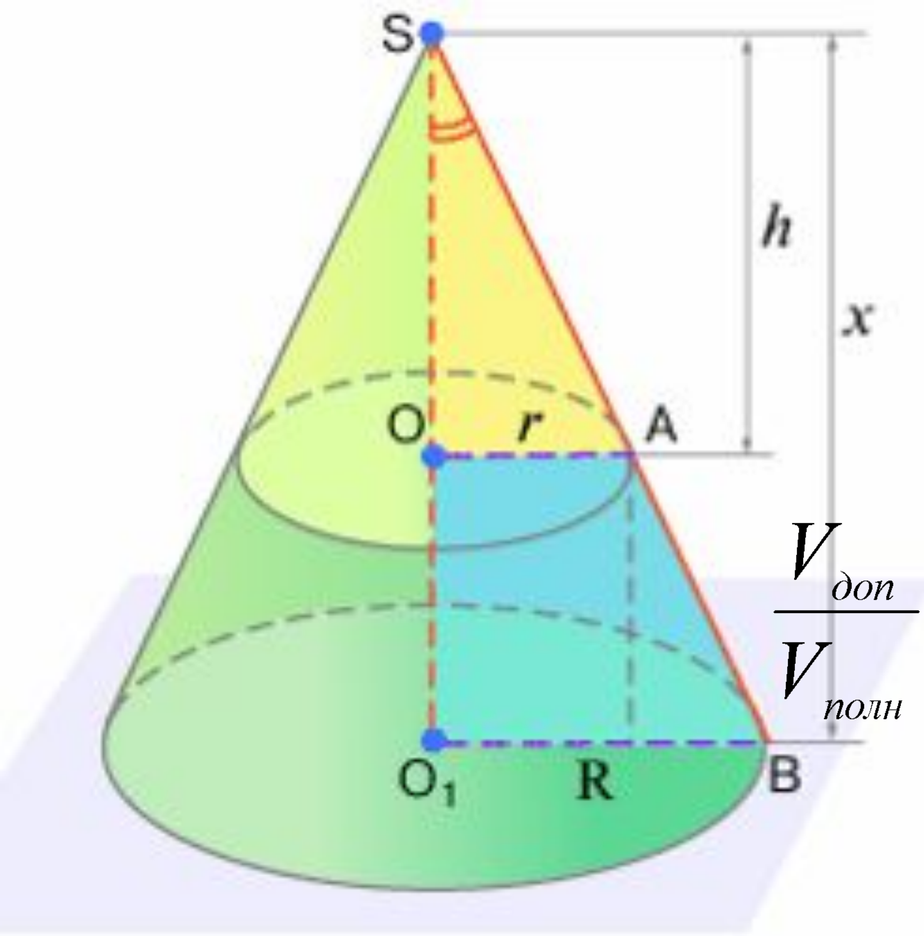



$$\Delta SO_1B \sim \Delta AKB$$

$$\frac{x}{R} = \frac{H}{R-r}$$

$$x = H\frac{R}{R-r}$$

# *Доказательство:*




$$\Delta SOA \sim \Delta SO_1B$$

$$\frac{h}{x} = \frac{r}{R}$$

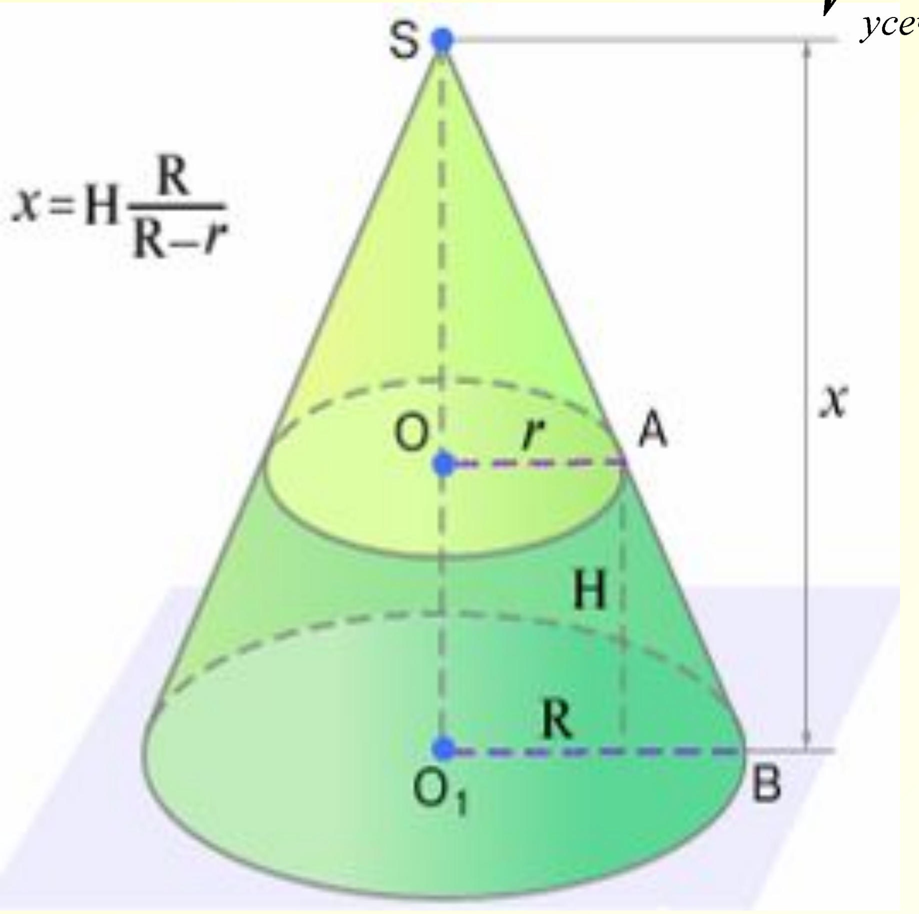
$$\frac{V_{доп}}{V_{полн}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi R^2 x} = \frac{r^2 h}{R^2 x} = \frac{r^2}{R^2}\frac{r}{R} = \frac{r^3}{R^3}$$

**Объемы полного и дополнительного конусов относятся как кубы радиусов оснований.**

# Доказательство:

**Вычтем из объема большого конуса объем малого конуса.**

$$V_{усеч} = V_{полн} - V_{доп} = V_{полн} - \frac{r^3}{R^3} V_{полн} =$$




$$= \frac{1}{3}\pi R^2 x \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) =$$

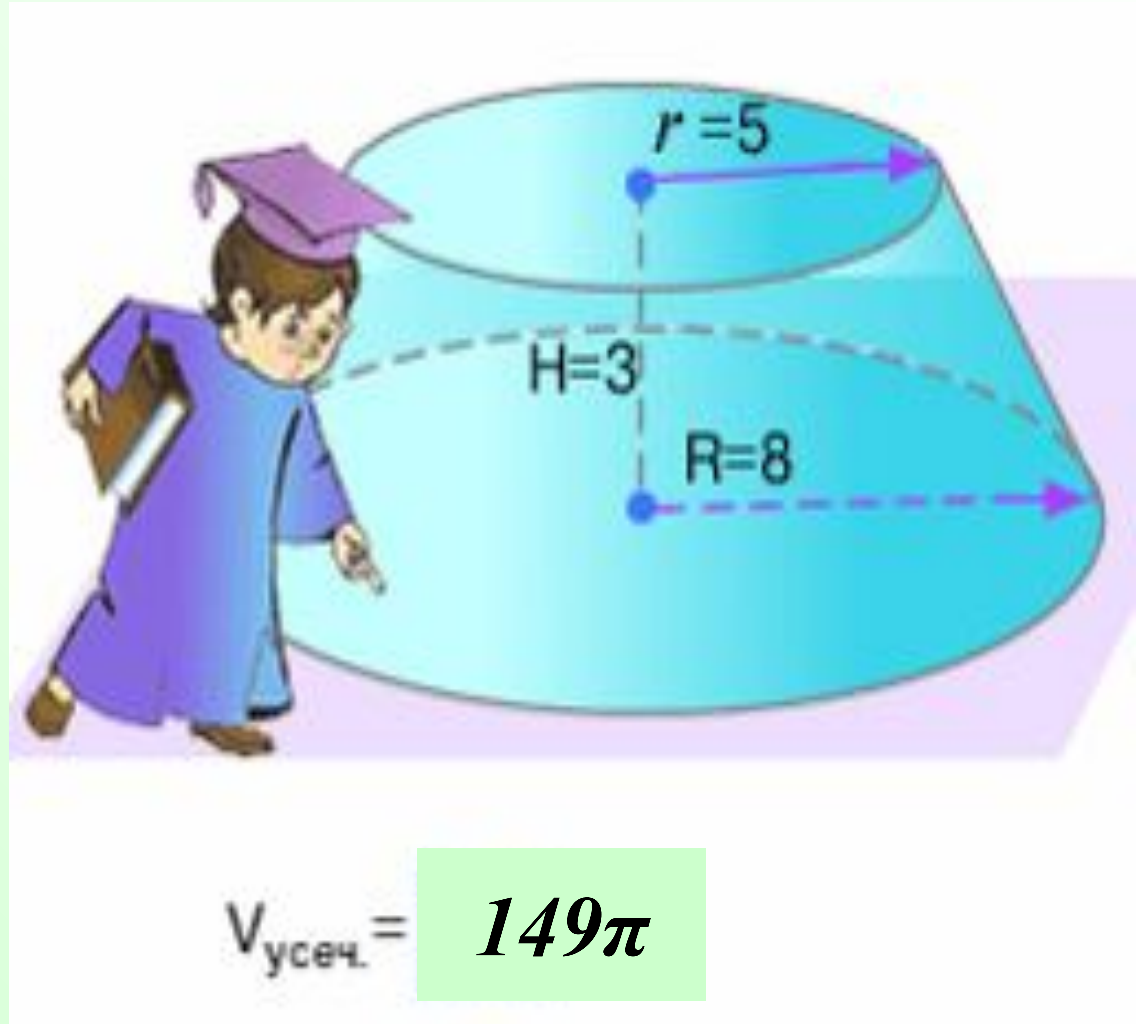
$$= \frac{1}{3}\pi \frac{R^2 HR}{R-r} \left(\frac{R^3 - r^3}{R^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi H \frac{(R-r)(R^2 + Rr + r^2)}{R-r} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi H \left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

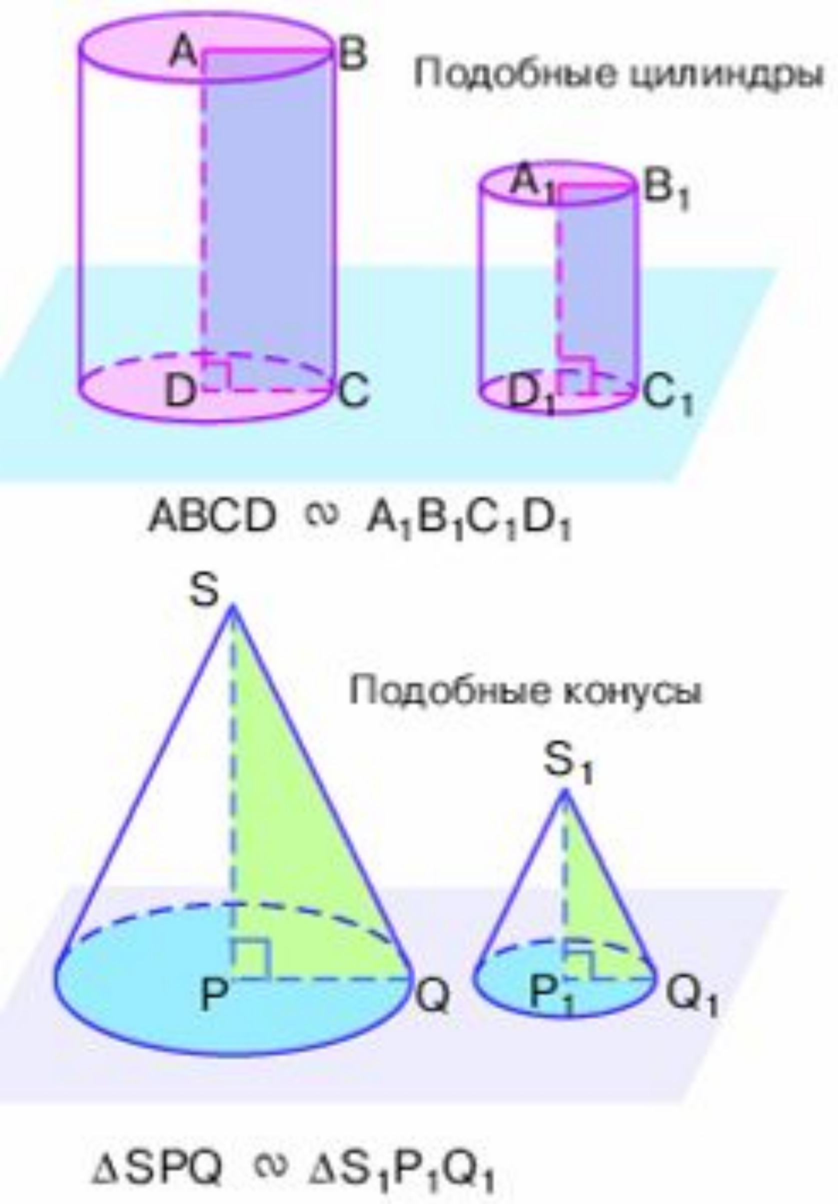
?

**Найдите объем усеченного конуса, если известны его высота и радиусы оснований.**



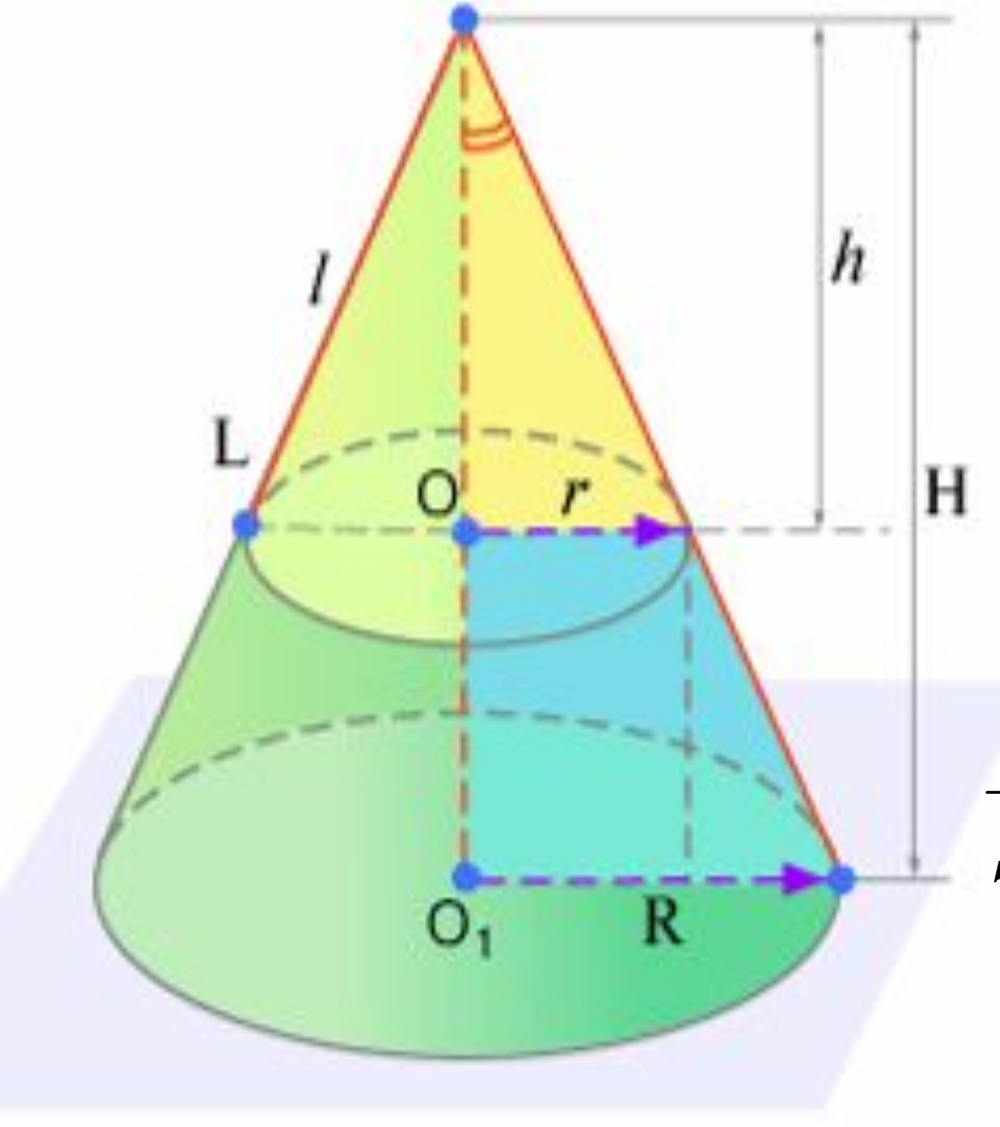

***149π***

# Подобные цилиндры и конусы.




- **Подобные цилиндры или конусы можно рассматривать как тела, полученные от вращения подобных прямоугольников или прямоугольных треугольников.**

**Сечение, параллельное основанию конуса, отсекает от него малый конус, подобный большому.**



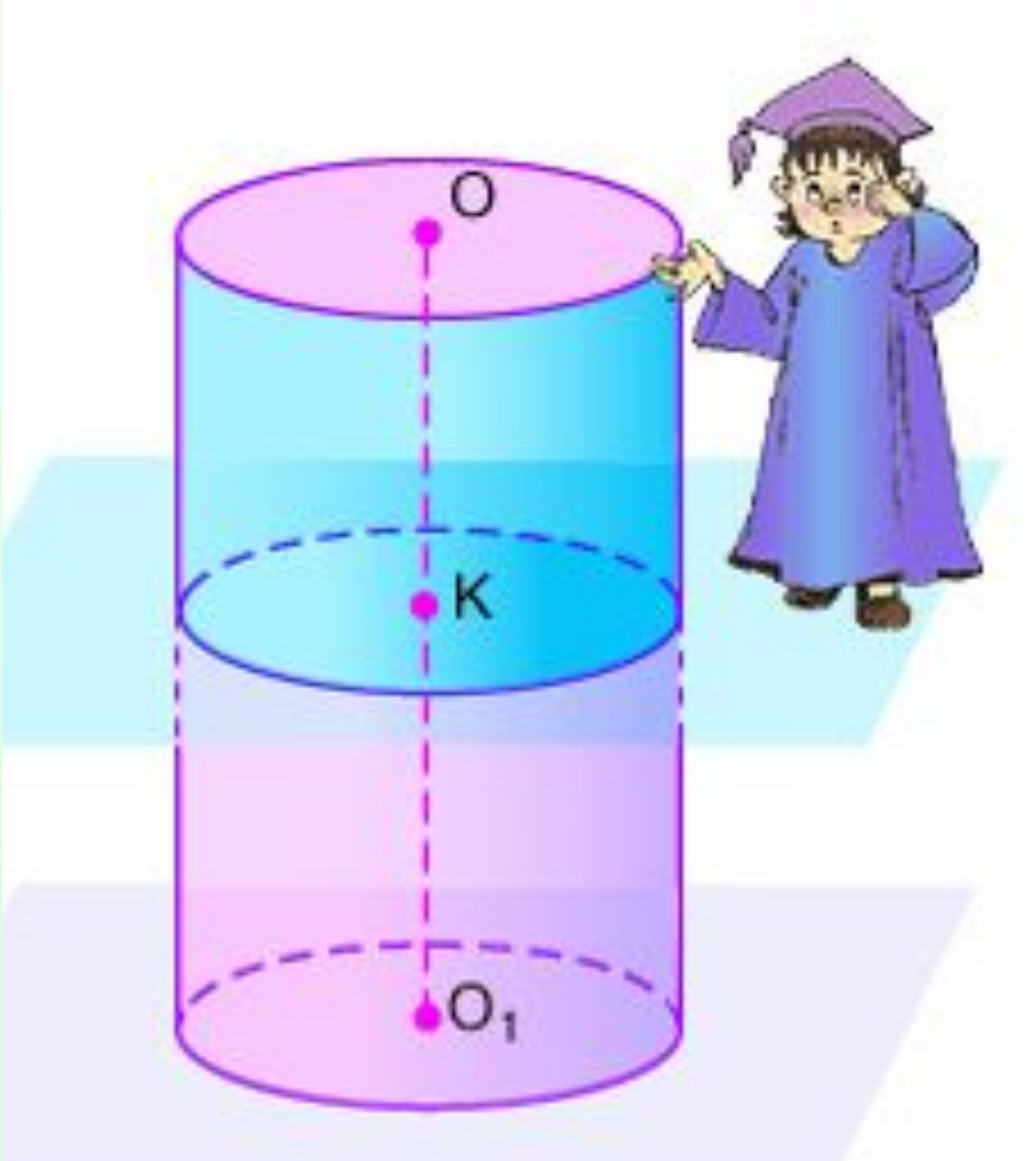

$$\frac{r}{R}=\frac{h}{H}=\frac{l}{L}$$

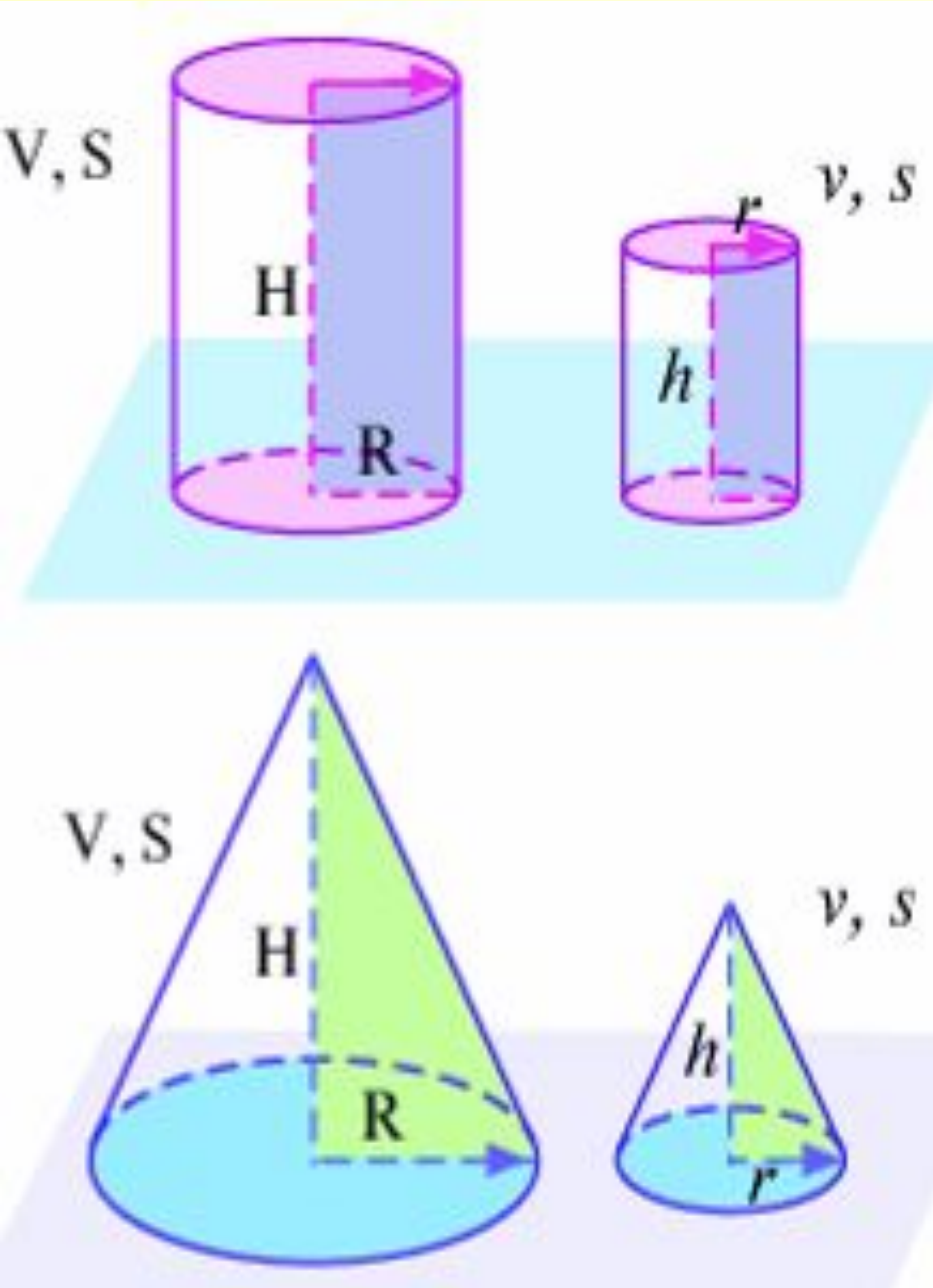
$$\frac{V_{доп.}}{V_{полн.}}=\frac{r^3}{R^3}=\frac{h^3}{H^3}$$

$$\frac{S_{бок.доп}}{S_{бок.полн}}=\frac{2\pi rl}{2\pi RL}=\frac{r^2}{R^2}=\frac{h^2}{H^2}$$

?

В цилиндре проведено сечение, параллельное основанию. Будет ли малый цилиндр, который отсекается этим сечением, подобен большому?





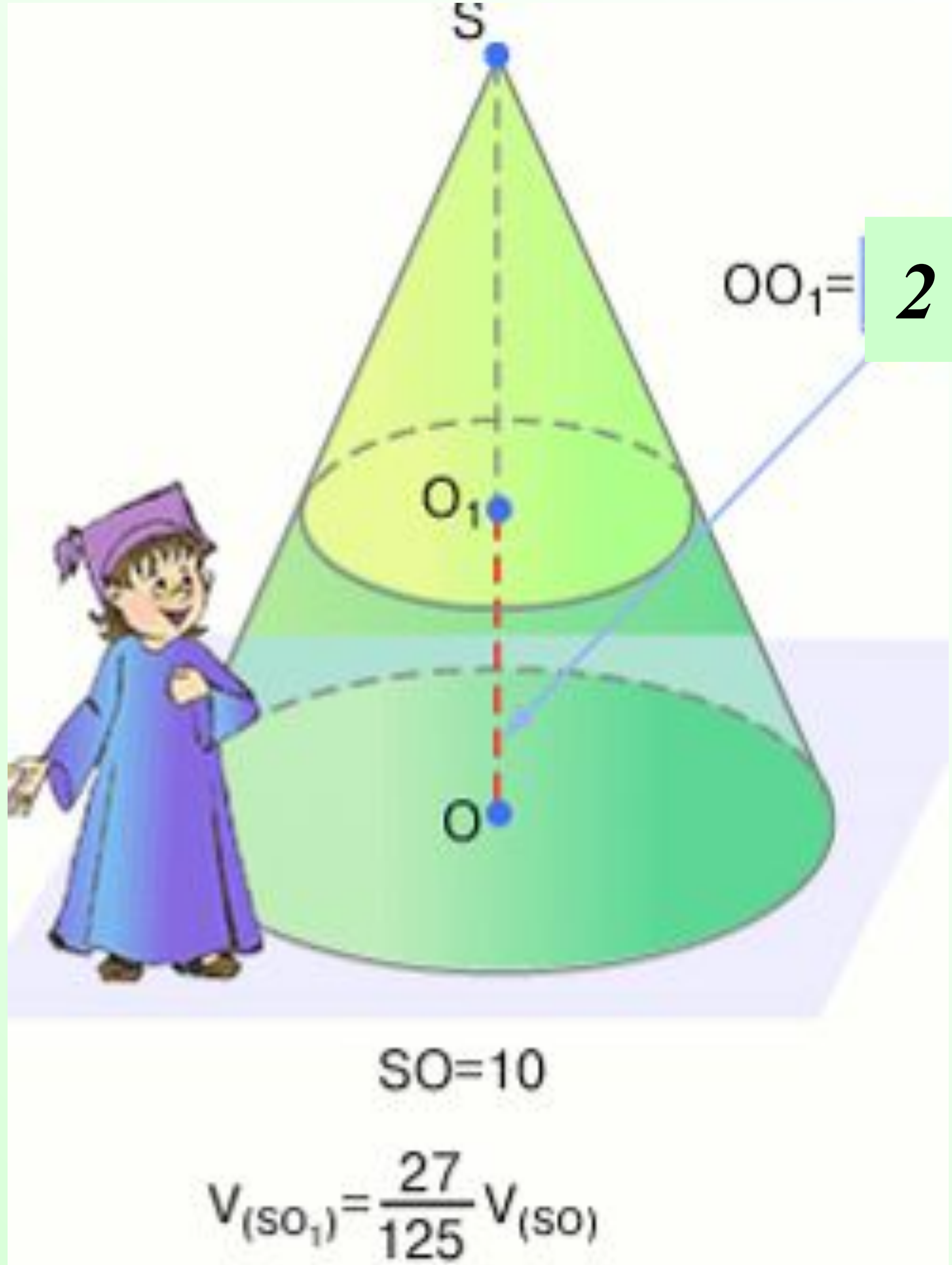

**Площади боковых поверхностей подобных цилиндров и конусов относятся как квадраты радиусов или высот, а объемы – как кубы радиусов или высот.**

$$\frac{s}{S} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{h^2}{H^2}$$

$$\frac{v}{V} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{h^3}{H^3}$$

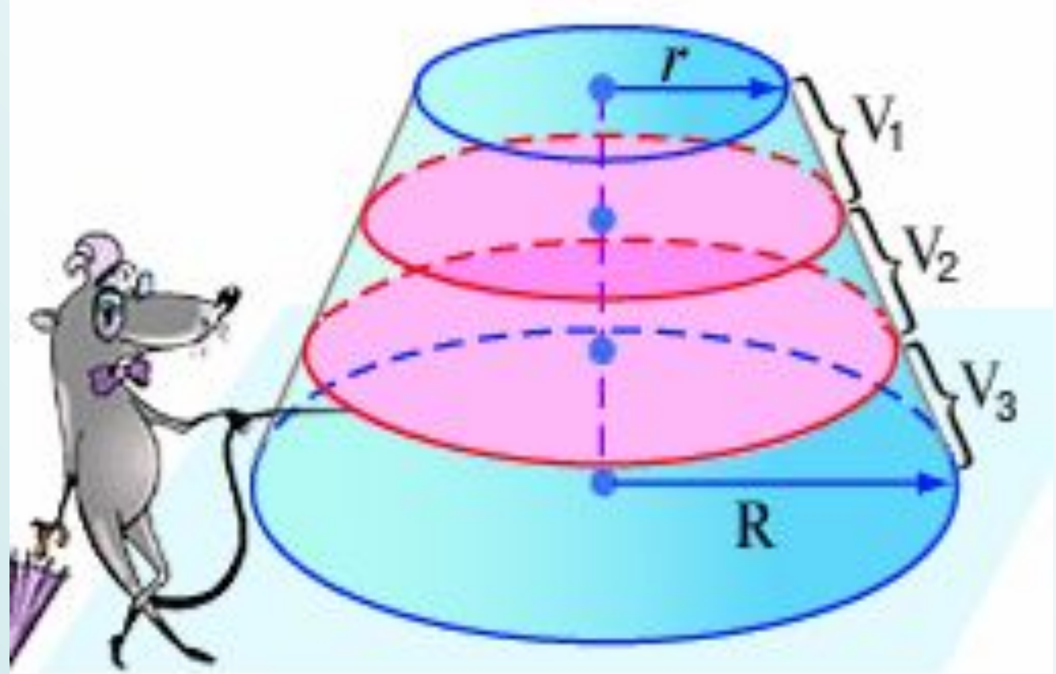
?

В конусе, высота которого известна, проведено сечение, параллельное основанию. Известно также соотношение объемов малого и большого конусов. На каком расстоянии от основания находится сечение?



## Задача.

Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 2:3. Высота конуса разделена на три равные части, и через точки деления проведены плоскости, параллельные основаниям. Найти, в каком отношении разделился объем усеченного конуса.




Дано: $\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$

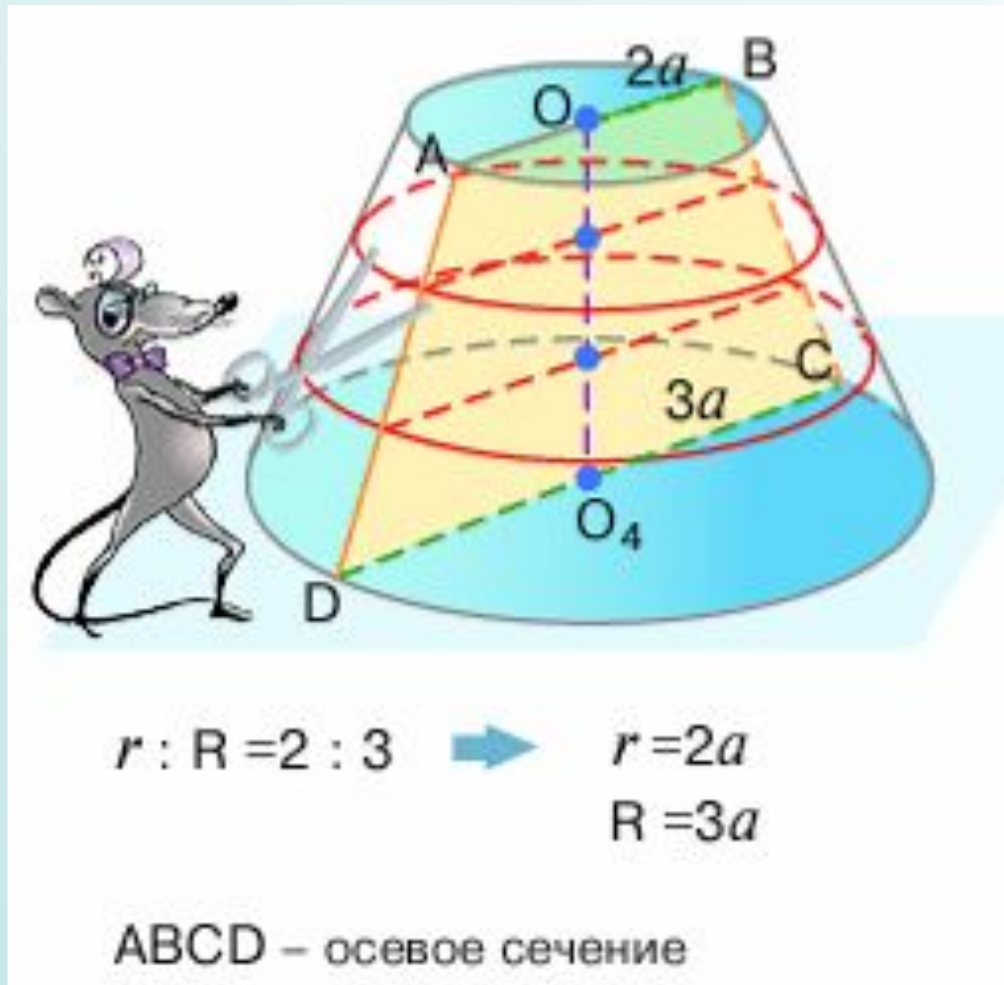
H разделена на 3 части

$V_1, V_2, V_3$ – объемы слоев

Найти: $V_1 : V_2 : V_3$

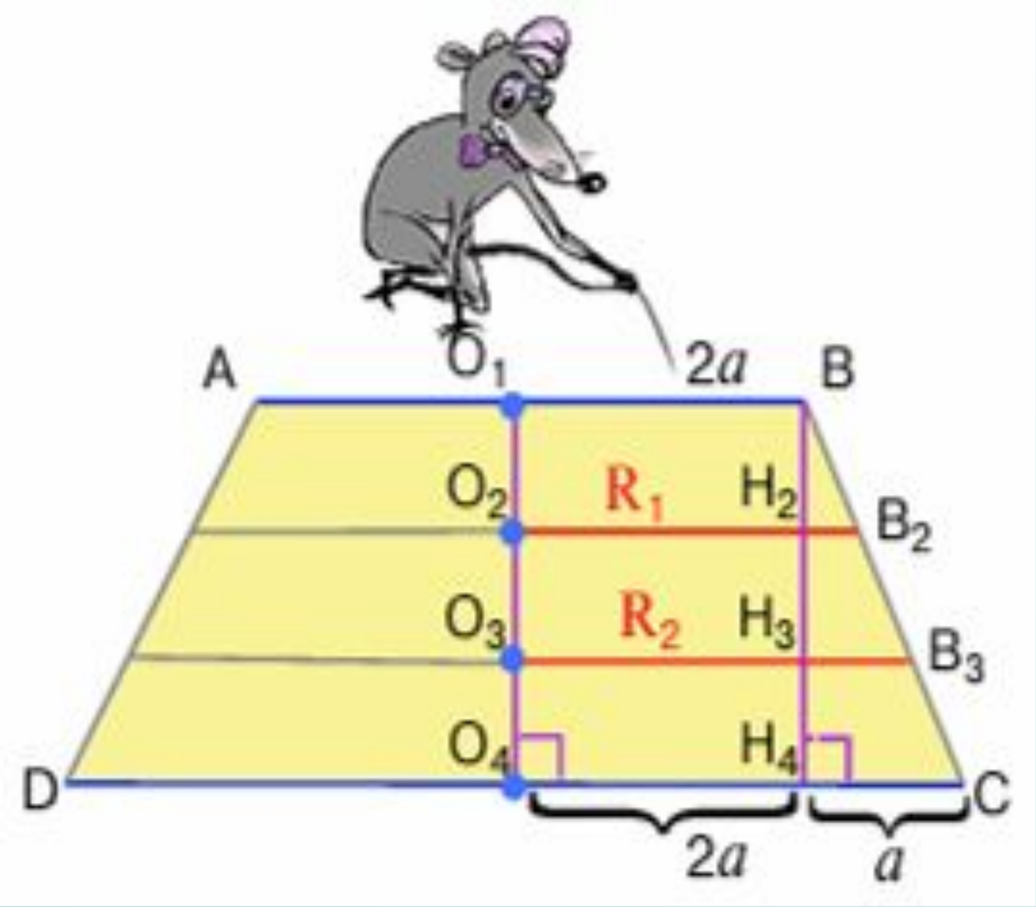
# Решение:

***Зная, что радиусы оснований конуса относятся как два к трем, обозначим радиусы как 2а и 3а и рассмотрим осевое сечение конуса.***



# Решение:

1) Используя подобие, найдем радиусы проведенных сечений.




$$CH_4 = 3a - 2a = a$$

$$H_2B_2 = \frac{1}{3}CH_4 = \frac{a}{3}$$

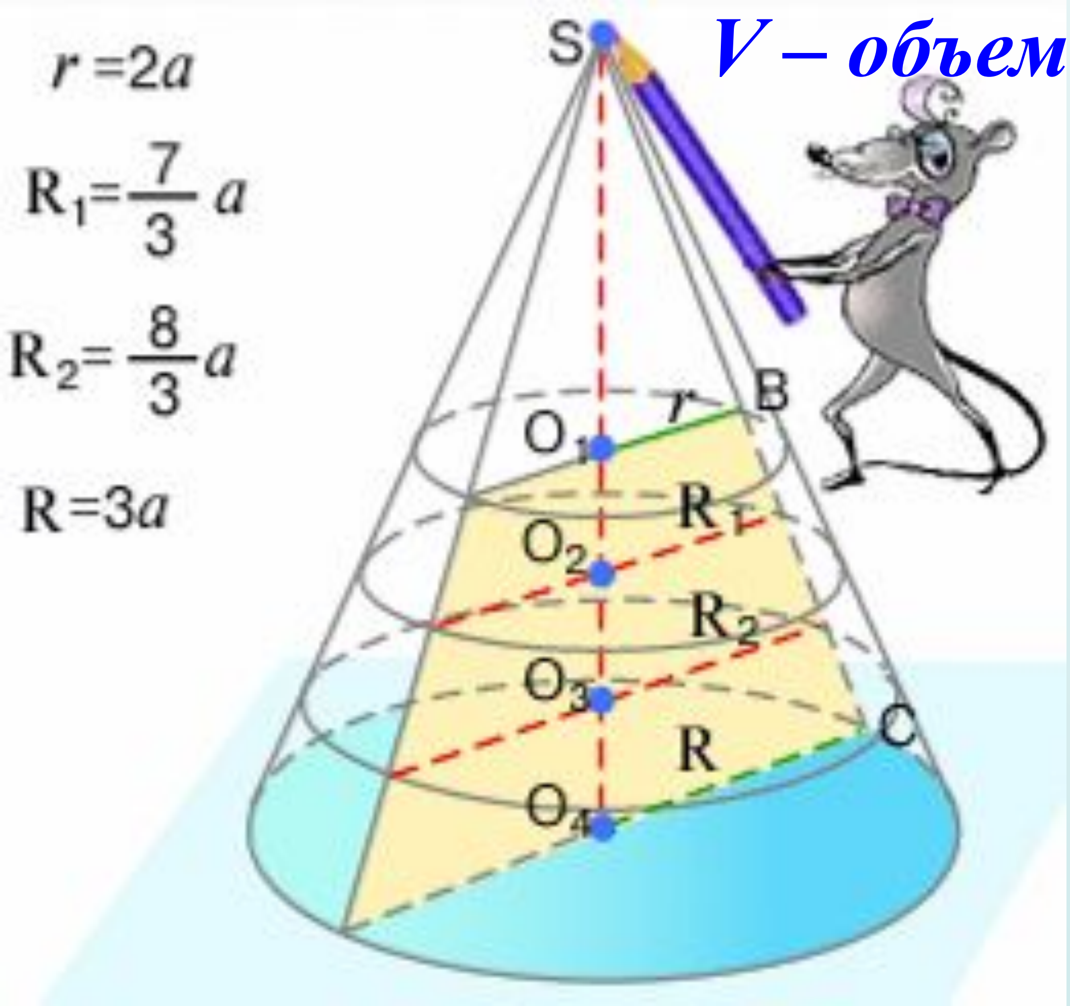
$$H_3B_3 = \frac{2}{3}CH_4 = \frac{2a}{3}$$

$$R_1 = 2a + \frac{a}{3} = \frac{7}{3}a$$

$$R_2 = 2a + \frac{2a}{3} = \frac{8}{3}a$$

# Решение:

**2) Достроив усеченный конус до полного, найдем, какую часть от полного конуса составляют меньшие конусы.**




*V – объем наибольшего конуса*

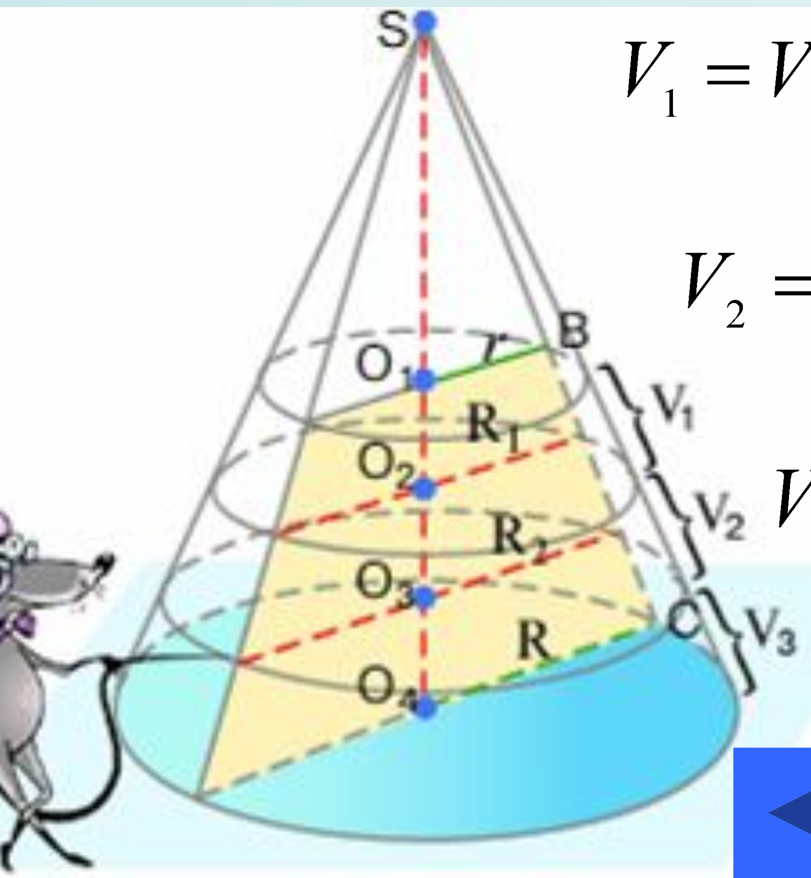
$$\frac{V_{(SO_1)}}{V}=\frac{(2a)^3}{(3a)^3}=\frac{2^3}{3^3}=\frac{6^3}{9^3}$$

$$\frac{V_{(SO_2)}}{V}=\frac{\left(\frac{7}{3}a\right)^3}{(3a)^3}=\frac{7^3}{9^3}$$

$$\frac{V_{(SO_3)}}{V}=\frac{\left(\frac{8}{3}a\right)^3}{(3a)^3}=\frac{8^3}{9^3}$$

# Решение:

***3) Определим, какую часть от объема полного конуса составляют усеченные конусы, расположенные между соседними сечениями и найдем отношение объемов этих конусов.***




$$V_1 = V_{(SO_2)} - V_{(SO_1)} = \frac{7^3 - 6^3}{9^3}V = \frac{127}{9^3}V$$

$$V_2 = V_{(SO_3)} - V_{(SO_2)} = \frac{8^3 - 7^3}{9^3}V = \frac{169}{9^3}V$$

$$V_3 = V - V_{(SO_3)} = \frac{9^3 - 8^3}{9^3}V = \frac{217}{9^3}V$$

***Ответ:***

$$V_1 : V_2 : V_3 = 127 : 168 : 217$$