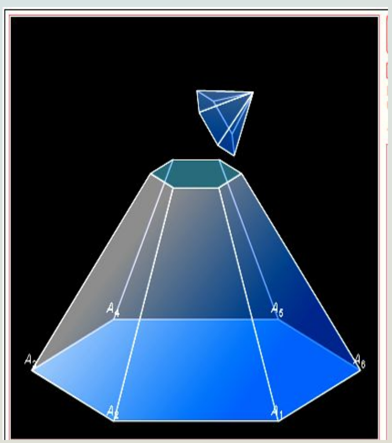
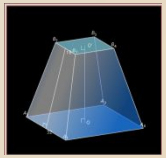
УСЕЧЁННАЯ ПИРАМИДА

СТЕРЕОМЕТРИЯ 10 КЛАСС



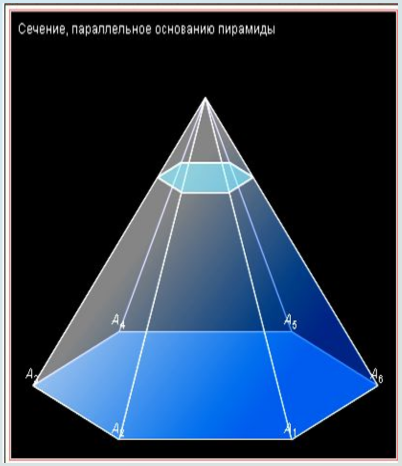
КУРСОВАЯ РАБОТА
УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ
ГИМНАЗИИ № 171
Анны Евгеньевны
КИРЬЯНОВОЙ

ПИРАМИДА



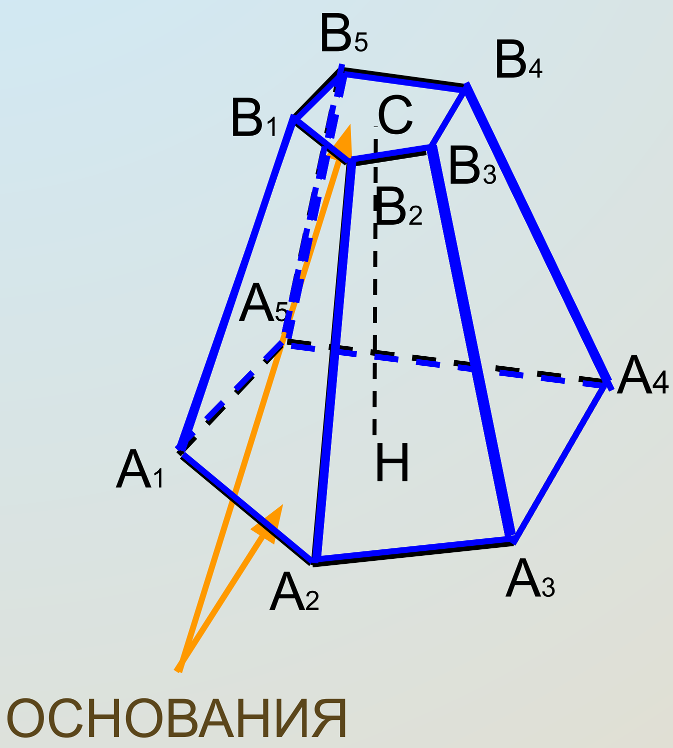
- ПОНЯТИЕ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ
- ПРАВИЛЬНАЯ УСЕЧЁННАЯ ПИРАМИДА
- ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ УСЕЧЁННОЙ ПИРАМИДЫ
- ЗАДАЧИ

ПОНЯТИЕ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ



- Плоскость параллельная основанию пирамиды, разбивает её на два многогранника. Один из них является пирамидой, а другой называется усечённой пирамидой.
- *Усеченная пирамида* – это часть полной пирамиды, заключенная между её основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию данной пирамиды

ПОНЯТИЕ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ

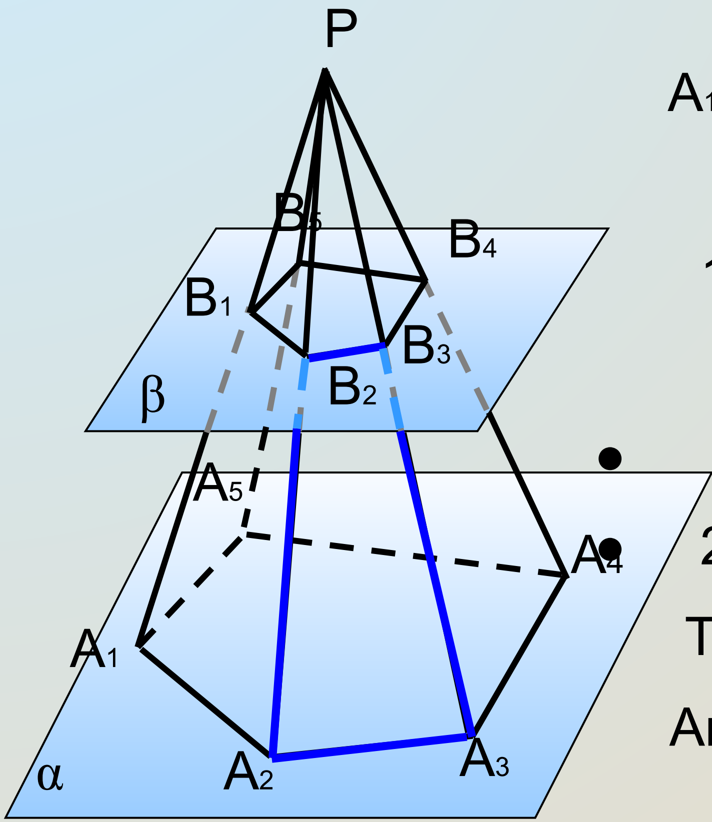


- Многоугольники $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$ *- нижнее и верхнее основания* усечённой пирамиды
- Отрезки A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3… - *боковые ребра* усечённой пирамиды
- Четырёхугольники $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$ … - *боковые грани* усечённой пирамиды. Можно доказать, что все они являются трапециями.
- Отрезок СН – перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки верхнего основания к нижнему основанию – называется *высотой* усечённой пирамиды.

ПИРАМИДА

СОДЕРЖАНИЕ

УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА



Докажем, что боковые грани $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2B_3B_4B_5$ являются трапециями.

Рассмотрим четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \alpha \parallel \beta \\ (PA_2A_3) \cap \alpha = A_2A_3 \\ (PA_2A_3) \cap \beta = B_2B_3 \end{array}\right\} \text{ значит } A_2A_3 \parallel B_2B_3$$

2. $A_2P \cap A_3P = P$, значит $A_2B_2 \nparallel A_3B_3$

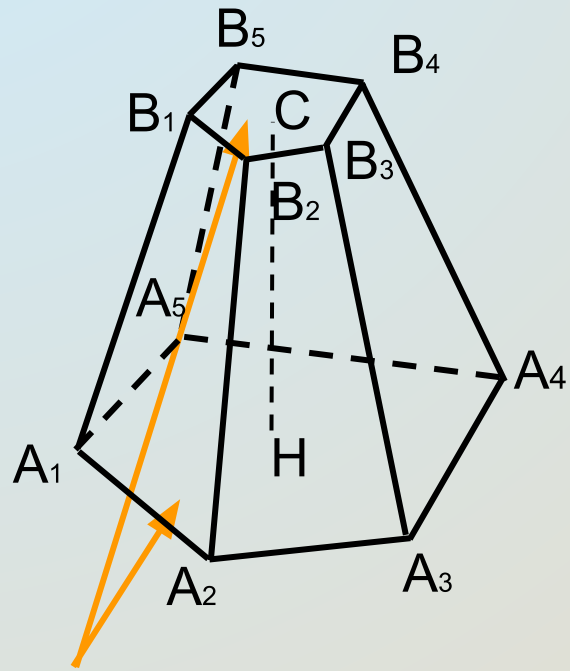
Т.о. $A_1B_1B_2A_2$ – трапеция по определению

Аналогично доказывается и про остальные боковые грани.

ПИРАМИДА

СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЕ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ

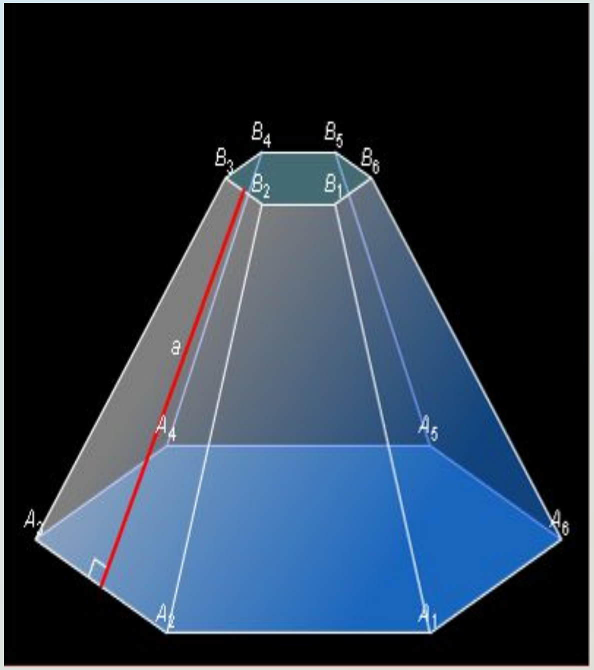


- Многоугольники $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$ - *нижнее и верхнее основания* усечённой пирамиды
- Отрезки A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3… - *боковые ребра* усечённой пирамиды
- Четырёхугольники $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$ … - боковые грани усечённой пирамиды. Можно доказать, что все они являются трапециями.
- Отрезок CH – перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки верхнего основания к нижнему основанию – называется *высотой* усечённой пирамиды

ПИРАМИДА

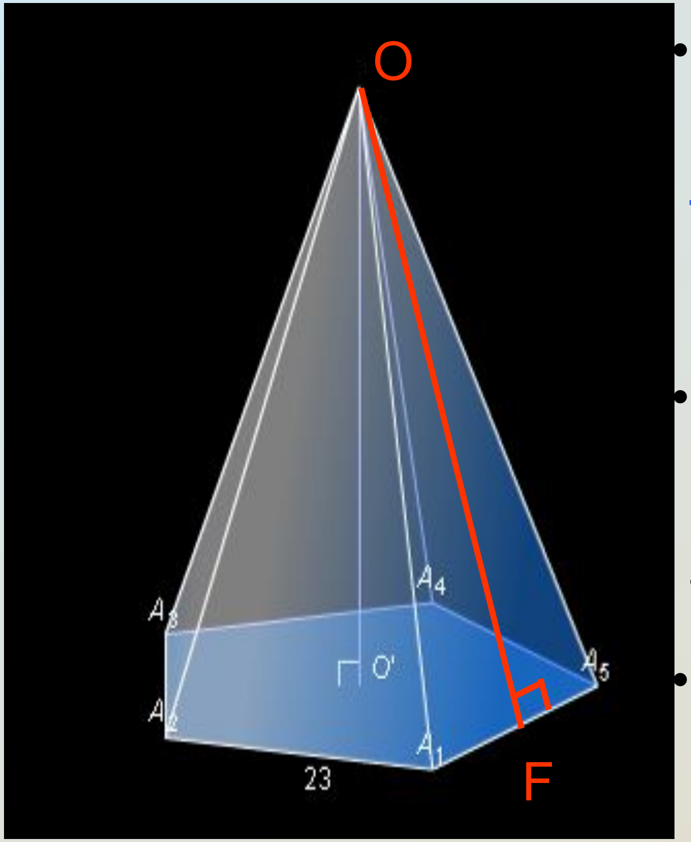
СОДЕРЖАНИЕ

ПРАВИЛЬНАЯ УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА



- Усеченная пирамида называется *правильной*, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию.
- Основания - правильные многоугольники .
- Боковые грани – равные равнобедренные трапеции (?).
- Высоты этих трапеций называются *апофемами*.

ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

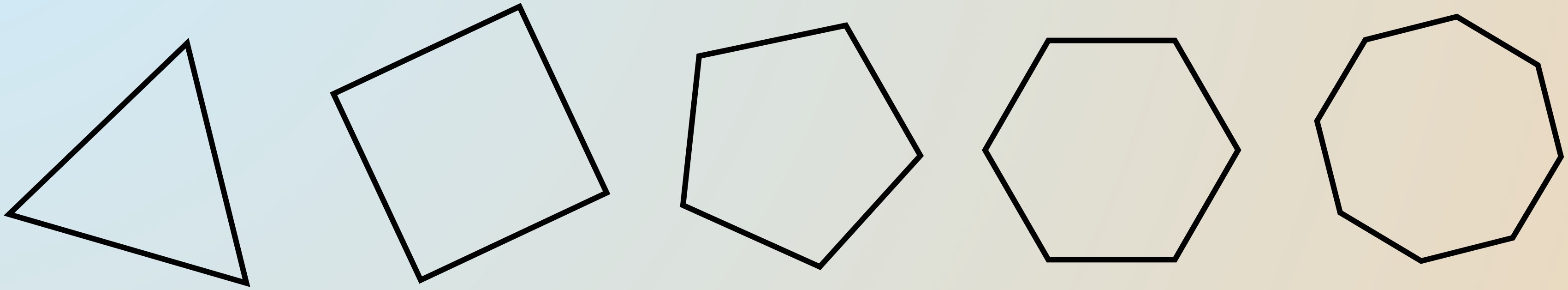


- Пирамида называется *правильной*, если её основание – правильный многоугольник, а отрезок , соединяющий вершину с центром основания, является её высотой.
- Все боковые рёбра правильной пирамиды равны, а грани являются равными равнобедренными треугольниками.
- Высота боковой грани правильной пирамиды называется апофемой. Все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.

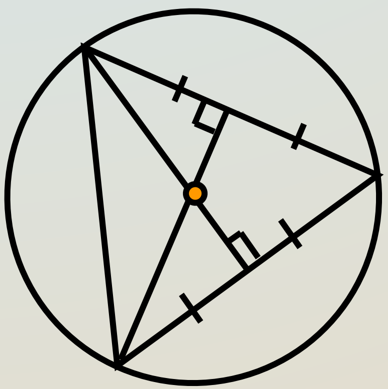
ПИРАМИДА

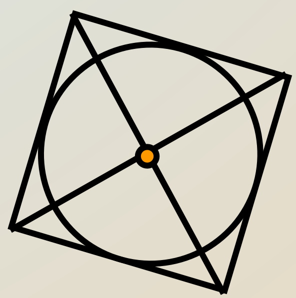
СОДЕРЖАНИЕ

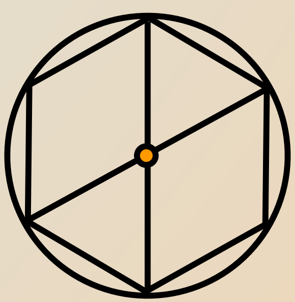
Правильным многоугольником называется многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.



Центр окружности, описанной около правильного многоугольника совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник, и называется *центром правильного многоугольника*. Для его нахождения достаточно определить в какой точке находится центр либо вписанной либо описанной окружности.

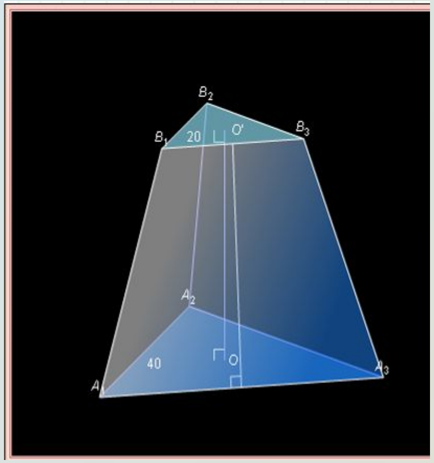


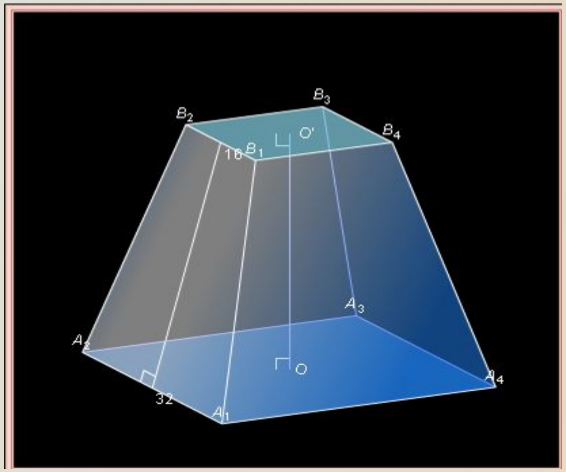


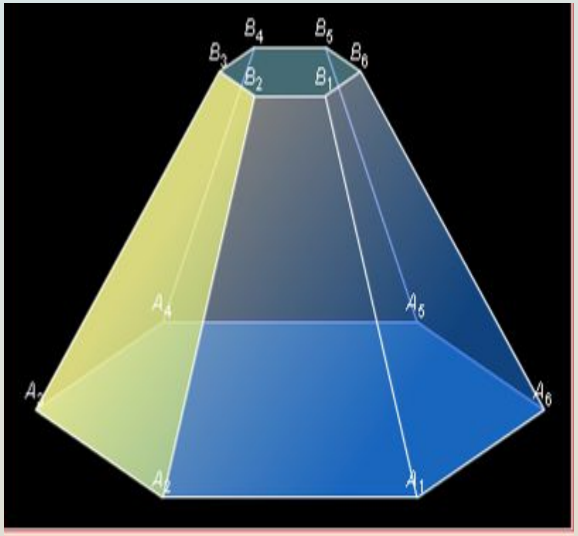


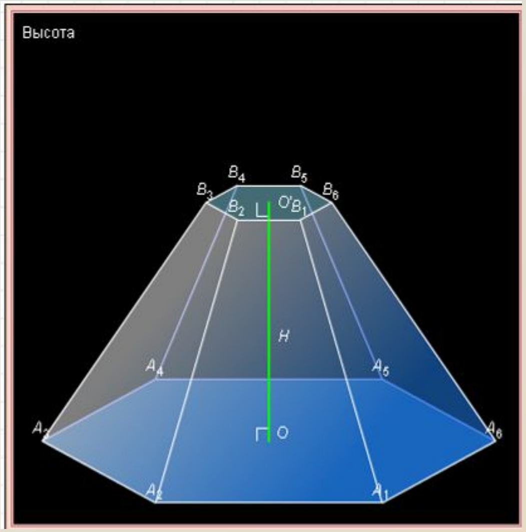
ПИРАМИДА

УСЕЧЕННЫЕ ПИРАМИДЫ









ПИРАМИДА

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ УСЕЧЁННОЙ ПИРАМИДЫ

- *Площадью полной поверхности* (Sполн) пирамиды называется сумма площадей всех её граней: основания и всех боковых граней.
- *Площадью боковой поверхности* (Sбок) пирамиды называется сумма площадей её боковых граней.

Sполн =Sбок+Sосн

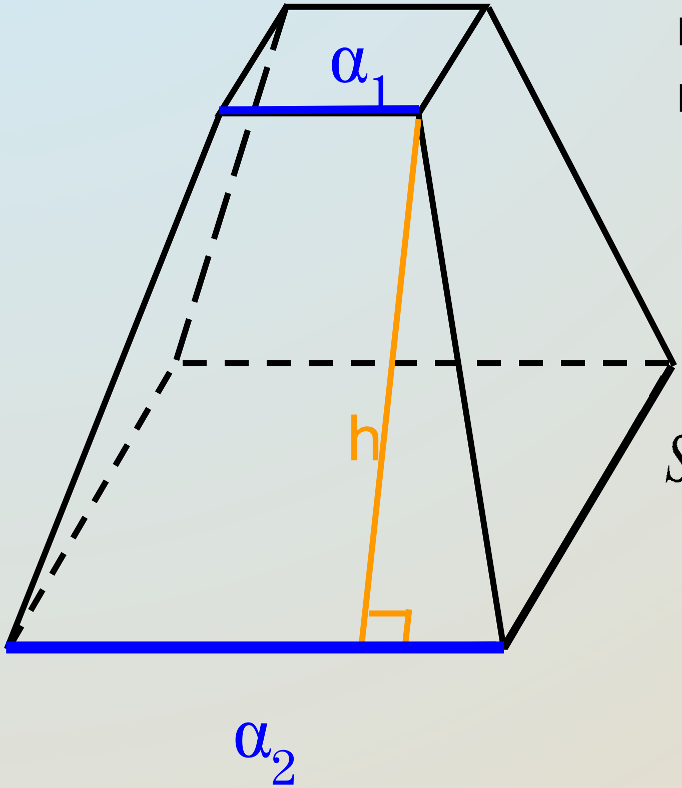
- *Площадь боковой поверхности правильной пирамиды* равна половине произведения периметра основания на апофему.
- *Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды* равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему. Доказать.

$$S_{\text{полн.усеч.}}=S_{\text{бок}}+S_{\text{верхн.осн.}}+S_{\text{нижн.осн.}}$$

ПИРАМИДА

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ УСЕЧЁННОЙ ПИРАМИДЫ



Найдем площадь одной из граней правильной n-угольной усечённой пирамиды.

$$S_{грани} = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h$$

Т.к. эта усечённая пирамида правильная, то

$$S_{бок} = S_{грани} \cdot n = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h \cdot n = \frac{a_1 n + a_2 n}{2} \cdot h = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot h$$

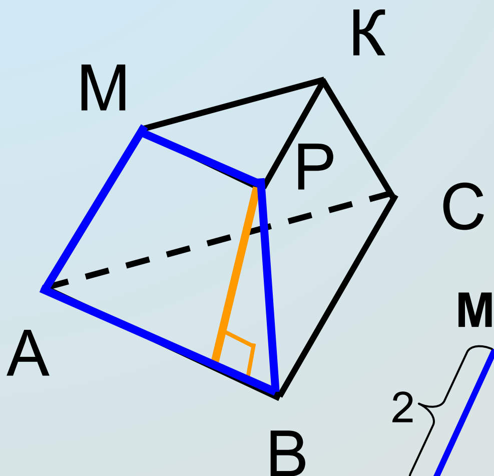
$$\boxed{S_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot h}$$

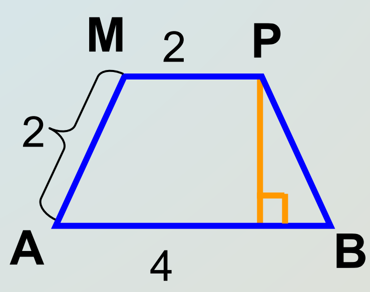
ЗАДАЧА 1

Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 4 см и 2 см, а боковое ребро равно 2 см.

Найдите: 1. апофему пирамиды;
2. площадь полной поверхности.

Ход решения задачи.





Дано: *АВСМРК – правильная усечённая пирамида;*

∆АВС – нижнее основание;

∆МРК – верхнее основание;

АВ = 4 см, МР = 2 см, АМ = 2 см.

Найти: *1. апофему;*

2. $S_{полн}$*.*

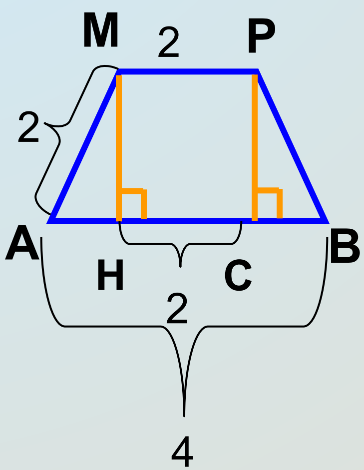
План решения:

1. *Сделать чертеж.*
2. *Построить апофему и определить многоугольник, из которого можно её найти.*
3. *[Произвести необходимые вычисления.]*

ПИРАМИДА

СОДЕРЖАНИЕ

РЕШЕНИЕ



$$\left.\begin{aligned}&AB=AH+AC+CB\\&CB=AH\\&HC=MP\end{aligned}\right\}\ AB=2AH+MP$$

Т.о. 2AH=2, AH=1

ΔAMH – *прямоугольный,* $\angle AHM=90°$

AH= $\sqrt{3}$ *по теореме Пифагора.*

$$S_{полн}=S_{бок}+S_{верхн.осн.}+S_{нижн.осн.}$$

$$S_{бок}=\frac{3\cdot2+3\cdot4}{2}\cdot\sqrt{3}=9\sqrt{3}$$

$$S_{осн}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$ *т.к. в основании правильные треугольники*

ПИРАМИДА

СОДЕРЖАНИЕ

РЕШЕНИЕ

$$S_{верхн.осн.} = \sqrt{3}$$

$$S_{нижн.осн.} = 4\sqrt{3}$$

$$S_{полн} = 9\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 14\sqrt{3}\left(см^2\right)$$

Ответ: $\sqrt{3}см,\ 14\sqrt{3}см^2.$

СОДЕРЖАНИЕ

ПИРАМИДА

ЗАДАЧА 2

Плоскость, параллельная плоскости основания правильной четырехугольной пирамиды, делит высоту пирамиды в отношении 1:2, считая от вершины пирамиды. Апофема полученной усеченной пирамиды равна 4 см, а площадь её полной поверхности равна 186 см^2.

Найдите высоту усечённой пирамиды.

ПИРАМИДА

СОДЕРЖАНИЕ

СПАСИБО ЗА ТЕРПЕНИЕ

ПИРАМИДА