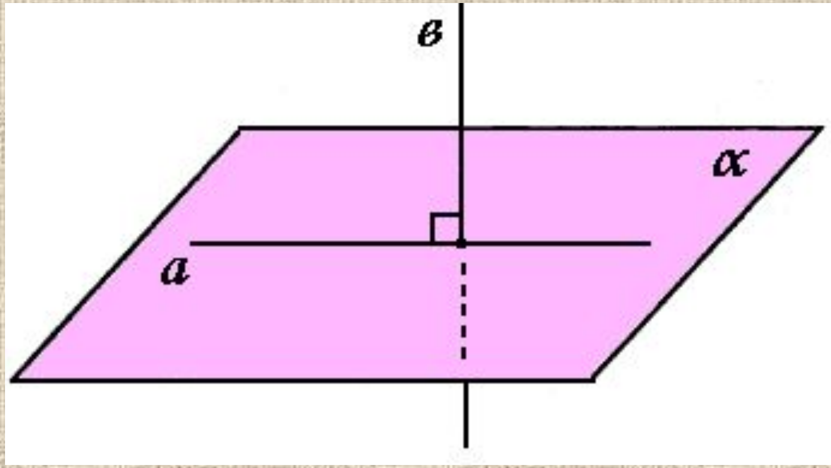
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ



УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 10 КЛАССА

ВЫПОЛНИЛА

УЧЕНИЦА 10'Б' КЛАССА

ГИМНАЗИИ №4

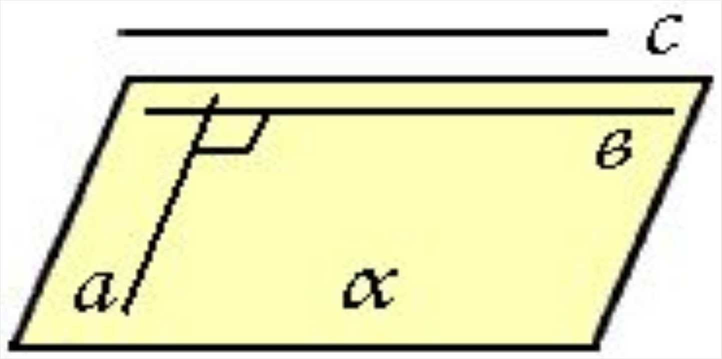
ИНШИНА МАША

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

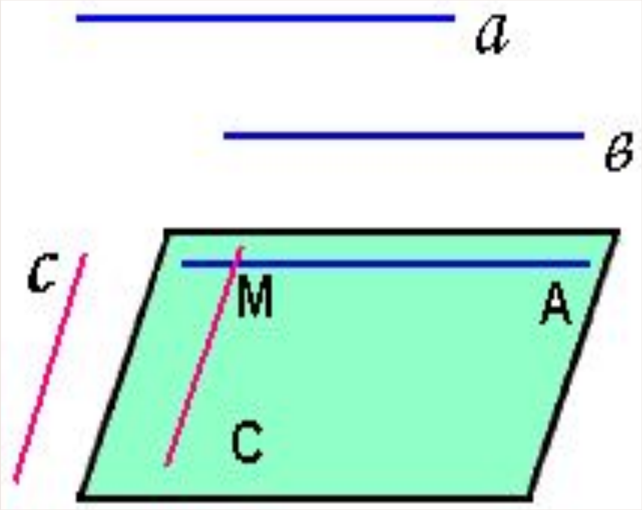
Две прямые в пространстве называются взаимно перпендикулярными,если угол между ними равен 90°.

Перпендикулярные прямые могут пересекаться $(a$ и $в)$ и скрещиваться $(a$ и $c)$



ЛЕММА О ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ К ТРЕТЬЕЙ ПРЯМОЙ

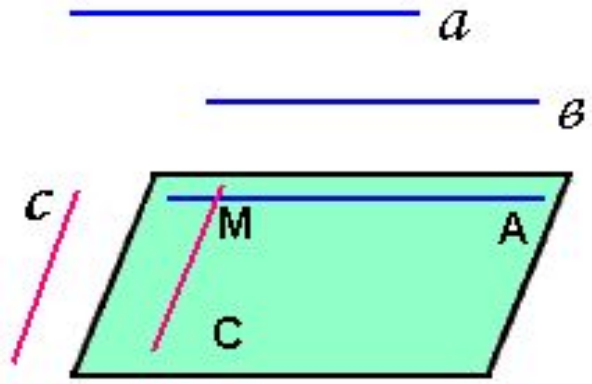
Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой,то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой



Дано:а ІІв , а$\perp c$

Доказать:в $\perp c$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

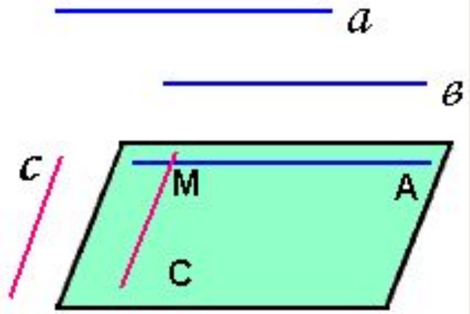


1)Через произвольную точку М пространства,не лежащую на данных прямых,проведем прямые МА и МС, параллельные соответственно прямым а и с.Так как $a \perp c$, то $\angle$ АМС =90°

2)По условию в || а, а по построению а || МА,потому в || МА. Итак,

прямые в и с параллельны соответственно прямым МА и МС, угол между которыми равен 90°.Это означает, что угол между прямыми в и с также равен 90°.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



1) МА II *a*, *a* II в => МА II в

2) а ⊥ *c*, МС II С => МА ⊥ МС

3) МА ⊥ МС, МА II в, МС II С => в ⊥ С.

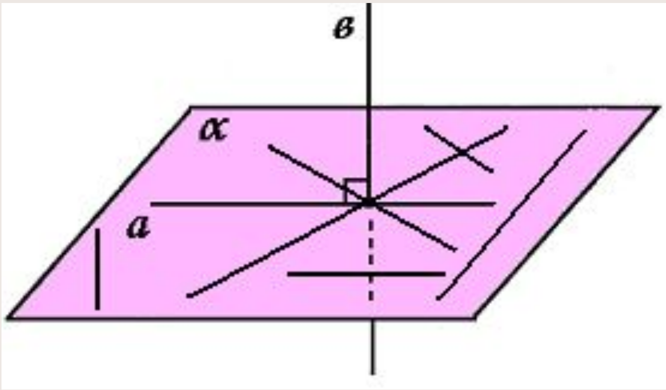
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ К ПЛОСКОСТИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Прямая называется перпендикулярной к плоскости,если она перпендикулярна к любой прямой,лежащей в этой плоскости

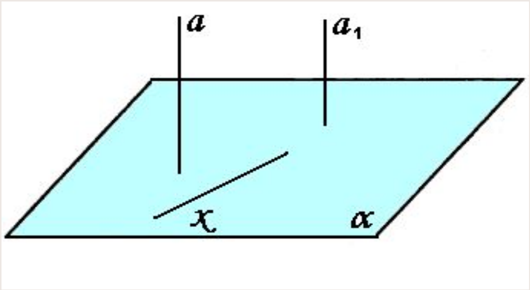
Перпендикулярность прямой и плоскости обозначается: $a \perp \alpha$.

Если прямая перпендикулярна к плоскости,то она пересекает её.

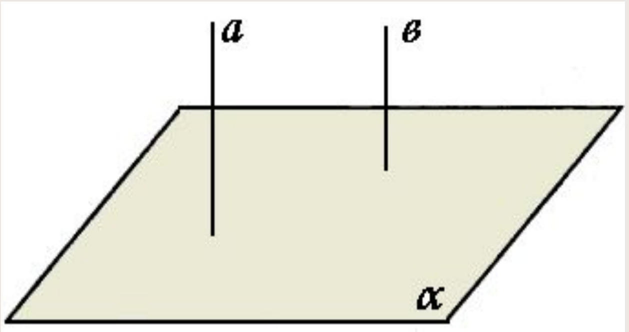


ТЕОРЕМЫ,УСТАНАВЛИВАЮЩИЕ СВЯЗЬ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬЮ ПРЯМЫХ И ИХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬЮ К ПЛОСКОСТИ

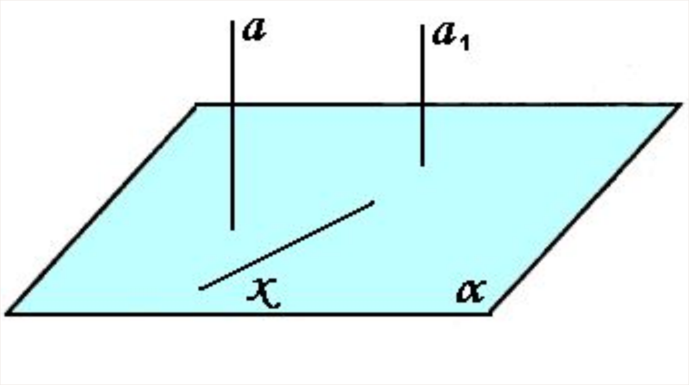
Терема 1:Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости,то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости



Теорема 2:Если две прямые перпендикулярны к плоскости,то они параллельны между собой.



ТЕОРЕМА О ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ, ОДНА ИЗ КОТОРЫХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА К ПЛОСКОСТИ



Дано: $a \perp \alpha$, $a \parallel a_1$

Доказать: $a_1 \perp \alpha$

Доказательство:

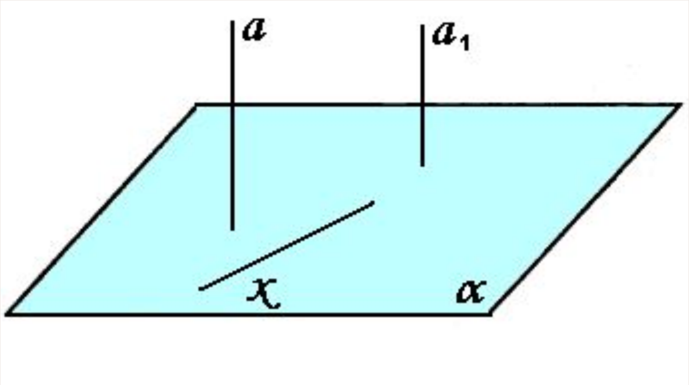
Проведем какую-нибудь прямую x в плоскости α.Так как $a \perp \alpha$,то

$a \perp x$.По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к

третьей $a_1 \perp x$.Таким образом,прямая a_1 перпендикулярна к любой

прямой, лежащей в плоскости α,т.е. $a_1 \perp \alpha$

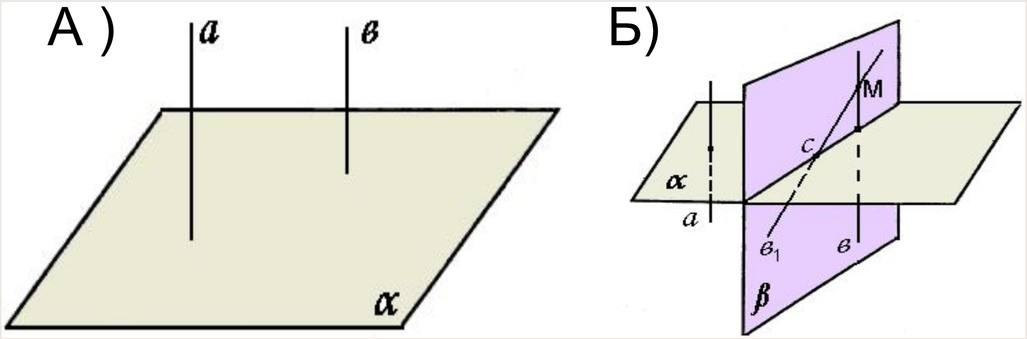
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



1) $a \perp \alpha$, $x \subset \alpha \Rightarrow a \perp x$

2) $a \parallel a_1$, $a \perp x \Rightarrow a_1 \perp x \Rightarrow a_1 \perp \alpha$, т.к. x – произвольная прямая плоскости α.

ТЕОРЕМА О ДВУХ ПРЯМЫХ, ПЕРПЕНДУКУЛЯРНЫХ К ПЛОСКОСТИ



Дано: $a \perp \alpha$, $в \perp \alpha$

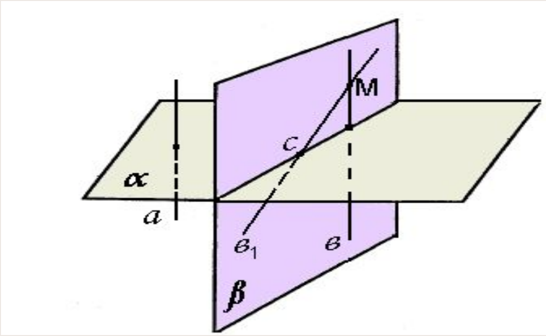
Доказать: $a \parallel в$

Доказательство:

1)Через какую-нибудь точку М прямой **В** проведём прямую **В**$_1$, параллельную прямой **а**. По предыдущей теореме **В**$_1 \perp \alpha$.Докажем, что **В**$_1$совпадает с прямой **В**. Тем самым будет доказано,что $a \parallel в$.

2)Допустим,что прямые **В** и **В**$_1$ не совпадают.Тогда в плоскости β, содержащей прямые **В** и **В**$_1$,через точку М проходят две прямые, перпендикулярные к прямой **С** , по которой пересекаются плоскости α и β.Но это невозможно,следовательно, $a \parallel в$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



1) Пусть в не $\parallel$ а. Проведем $в_1 \parallel а$ ($М \in в$, $М \in в_1$)

2) $в \perp \alpha$, $с \subset \alpha \Rightarrow в \perp с$

3) $а \perp \alpha$, $с \subset \alpha \Rightarrow а \perp с$

4) $а \perp с$, $в_1 \parallel а \Rightarrow в_1 \perp с$

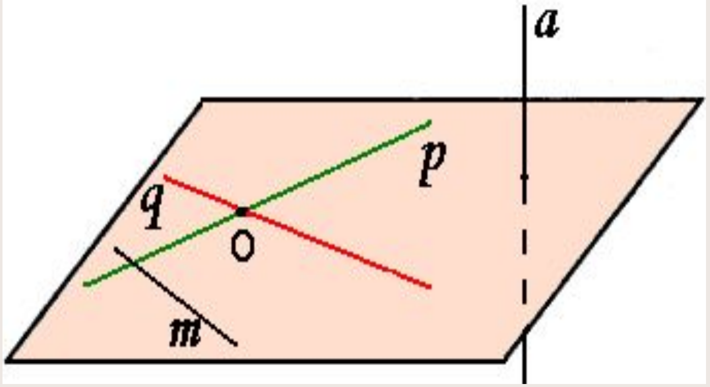
5) $в \perp с$, $в_1 \perp с$, $М \in в$, $М \in в_1 \Rightarrow в \equiv в_1$

6) $в_1 \parallel а$, $в \equiv в_1 \Rightarrow а \parallel в$

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

ТЕОРЕМА:

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым,лежащим в плоскости,то она перпендикулярна к этой плоскости

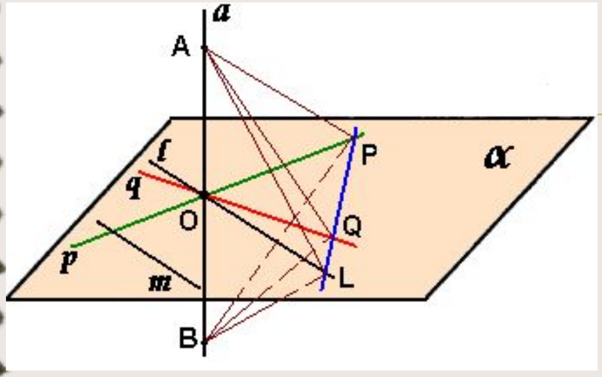


Дано: $a \perp p$, $a \perp q$, $p \subset \alpha$,

$q \subset \alpha$, $p \cap q = 0$

Доказать: $a \perp \alpha$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

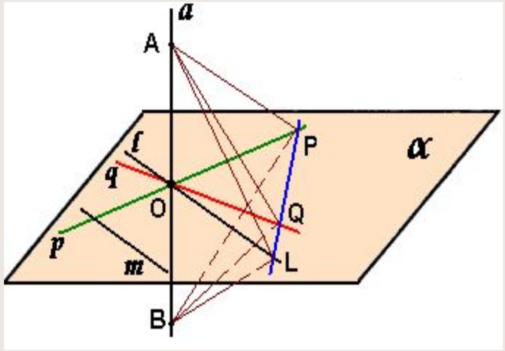


Докажем,что прямая а перпендикулярна к произвольной прямой m плоскости α. Рассмотрим случай,когда прямая m проходит через точку О.Проведем через точку О прямую ℓ,параллельную прямой m.Отметим на прямой точки А и В так,чтобы точка О была серединой отрезка АВ,и проведем в плоскости α прямую,пересекающую прямые p , q и ℓ соответственно в точках P,Q и L.

Так как прямые p и q - серединные перпендикуляры к отрезку АВ , то АР=ВР и AQ=BQ. Следовательно, △APQ=△BPQ по трём сторонам. Поэтому ∠APQ=∠BPQ. Рассмотрим △APL и △BPL.Они равны по двум сторонам и углу между ними (АР=ВР,PL- общая сторона, ∠APL= ∠BPL), поэтому AL=BL. Но это означает, что треугольник ABL равнобедренный и его медиана LO является высотой, т.е. $\ell \perp$ а.Так как и $\ell \parallel m$, то $m \perp$ а (по лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей). Итак, прямая перпендикулярна к любой прямой m плоскости α, т.е. а ⊥ а .

Рассмотрим теперь случай,когда прямая не проходит через точку О. Проведем через точку О прямую $а_1$, параллельную прямой а. По упомянутой лемме $а_1 \perp p$ и $а_1 \perp q$, поэтому по доказанному в первом случае $а_1 \perp \alpha$.Отсюда (по теореме о двух параллельных прямых,одна из которых перпендикулярна плоскости) следует, что а ⊥ а .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Этап 1:

1) AO = BO

2) AP =BP, AQ = BQ

3) ∆ APQ = ∆ BPQ => ∠ APQ = ∠ BPQ

4) ∆ APL = ∆ BPL => AL = BL

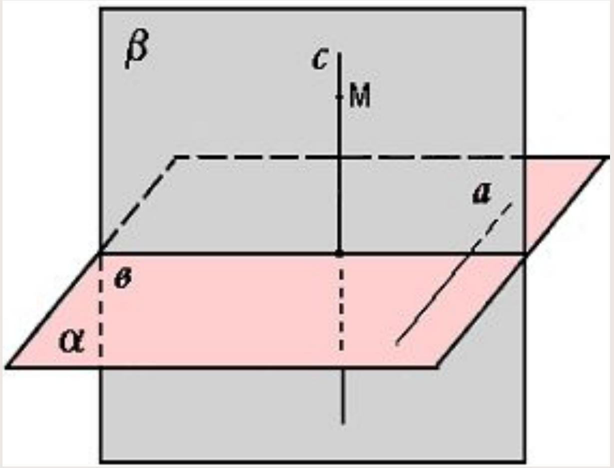
5) Медиана OL ∆ ABL – высота, т.е. AB ⊥ OL или **а** ⊥ OL

Этап 2: m – произвольная прямая плоскости α, OL II m. Т.к. **а** ⊥ OL, то **а** ⊥ m => **а** ⊥ α.

ТЕОРЕМА О ПРЯМОЙ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ПЛОСКОСТИ

ТЕОРЕМА:

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости,и притом только одна



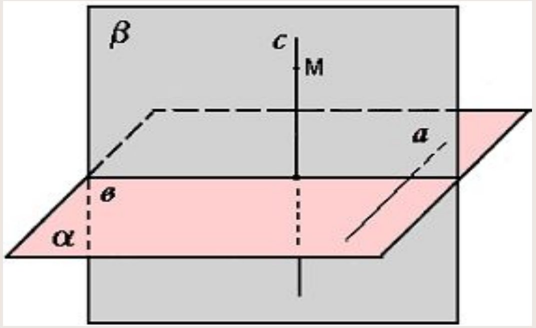
Дано: M, α

Доказать: 1)через точку M проходит

прямая, перпендикулярная α

- 2)такая прямая только одна

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

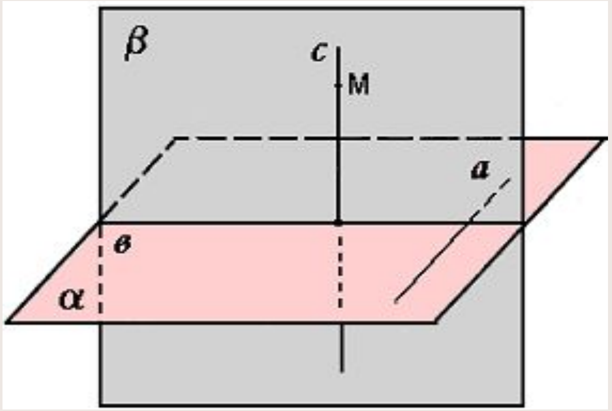


1) Проведем в плоскости α произвольную прямую а и рассмотрим плоскость β, проходящую через точку М и перпендикулярную к прямой а. Обозначим буквой в прямую, по которой пересекаются плоскости α и β.

В плоскости β через точку М проведем прямую с, перпендикулярную к прямой в. Прямая с и есть искомая прямая. В самом деле, она перпендикулярна к плоскости α, так как перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости($c \perp в$, $c \perp a$, т.к. $\beta \perp a$).

2) Предположим, что через точку М проходит ещё одна прямая (обозначим её через c_1), перпендикулярная к плоскости α. Тогда $c \parallel c_1$, что невозможно, так как прямые с и c_1 пересекаются в точке М. Таким образом, через точку М проходит только одна прямая, перпендикулярная к плоскости α.

ПЛАН ПОСТРОЕНИЯ



1) а: а ⊂ α

2) β: **М ∈ β, β ⊥ α**

3) α ∩ β = **В**

4) С: **М ∈С**, С ⊥ В

Доказательство:

1) **М** ∈ С

2) С ⊥ В **по построению**

3) С ⊥ а, **т.к. β ⊥ α**

=> С ⊥ α **(по признаку перпендикулярности прямой и плоскости)**

4) **с – единственная прямая**

ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

НА РИСУНКЕ:

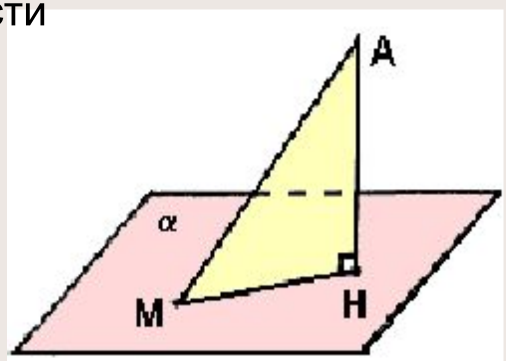
АН – перпендикуляр,проведенный из точки А к плоскости α

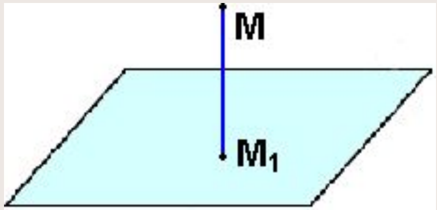
Н – основание перпендикуляра

АМ – наклонная, проведенная из точки А к плоскости α

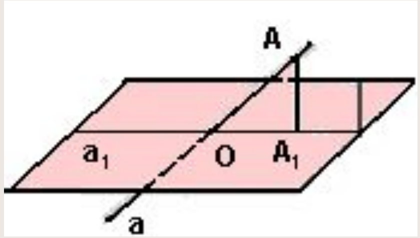
М – основание наклонной

НМ – проекция наклонной на плоскость α



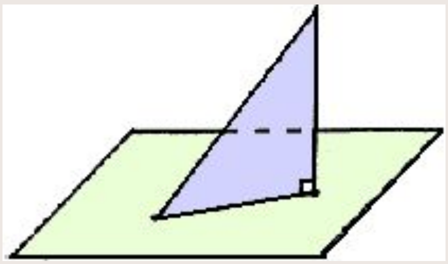


Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости

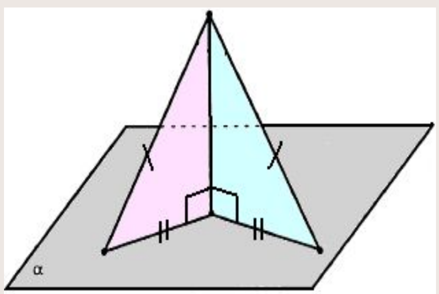


Проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая

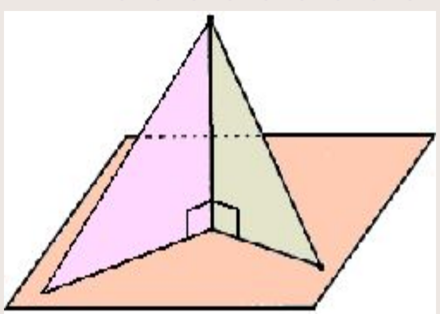
СВОЙСТВА НАКЛОННЫХ



1° Перпендикуляр всегда короче любой наклонной, проведенной к плоскости из той же точки



2° У равных наклонных, проведенных к плоскости из одной точки, проекции равны

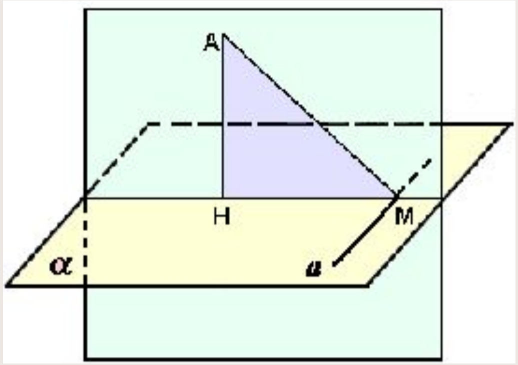


3° Из двух наклонных, проведенных из одной точки, больше та, у которой проекция больше

ТЕОРЕМА О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

ТЕОРЕМА:

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной

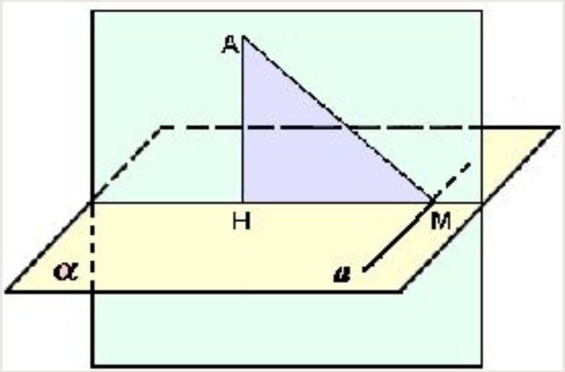


Дано:M $\in a$, AH-перпендикуляр,AM - наклонная,HM - проекция наклонной, $a \perp HM$

Доказать: $a \perp AM$

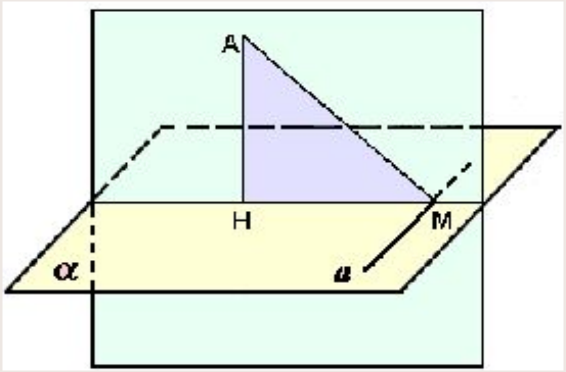
Доказательство:

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:



Прямая а перпендикулярна к плоскости АНМ, т.к. она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым АН и МН(а ⊥ НМ по условию и а ⊥ АН, т.к. АН ⊥ α) . Отсюда следует, что прямая а перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости АМН, в частности а ⊥ АМ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



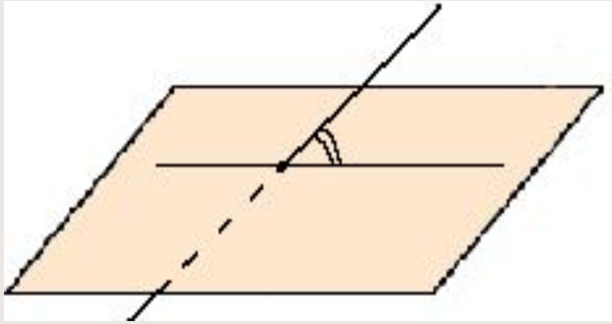
1) **АН** $\perp$ **α, а** $\subset$ **α** => а $\perp$ **АН**

а $\perp$ **НМ (по условию)**

=> а $\perp$ (АНМ)

2) а $\perp$ **(АНМ), АМ** $\subset$ **(АНМ)** => а $\perp$ **АМ**

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

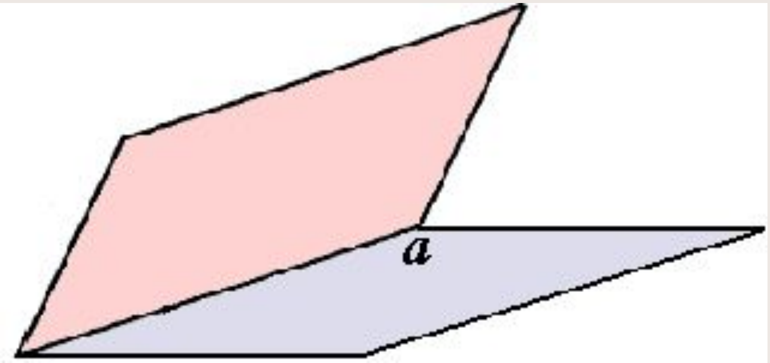
Углом между прямой и плоскостью,пересекающей эту прямую и не перпендикулярной её, называется угол между прямой и её проекцией на плоскость

$0° \leq \alpha \leq 90°$

$\alpha = 0°$, если прямая параллельна плоскости

$\alpha = 90°$, если прямая перпендикулярна плоскости

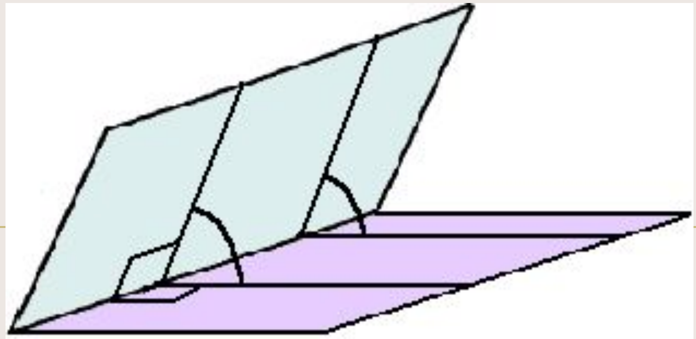
ДВУГРАННЫЙ УГОЛ



ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Двугранным углом называется фигура, образованная прямой а **и двумя полуплоскостями с общей границей** а **, не принадлежащим одной плоскости**

Двугранный угол может быть острым , тупым и прямым линей ный



угол

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Линейный угол -- угол, стороны которого являются лучами, перпендикулярными к ребру двугранного угла, а вершина лежит на его ребре

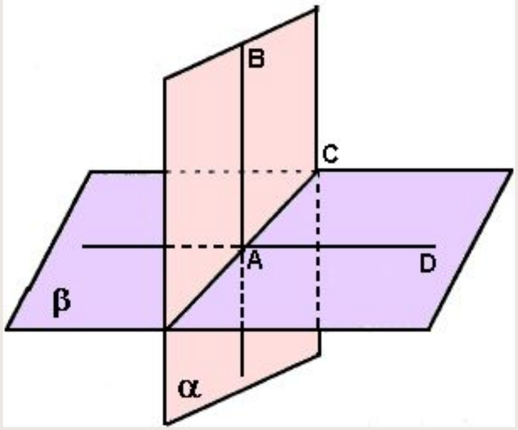
Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.

Все линейные углы двугранного угла равны

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

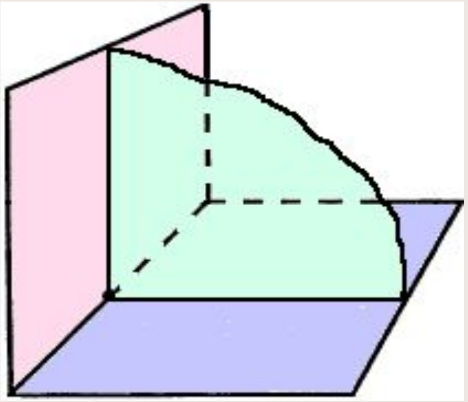
Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ



ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ :

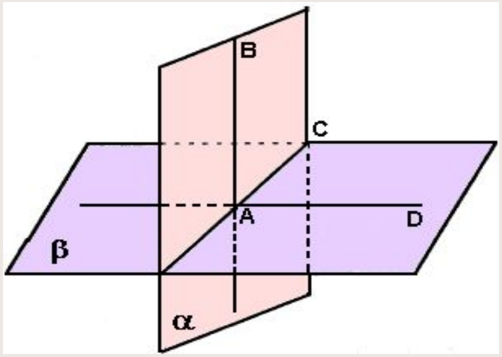
Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны



СЛЕДСТВИЕ ИЗ ПРИЗНАКА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ:

Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ



Дано: AB ⊂ α , AB ⊥ β

Доказать: α ⊥ β

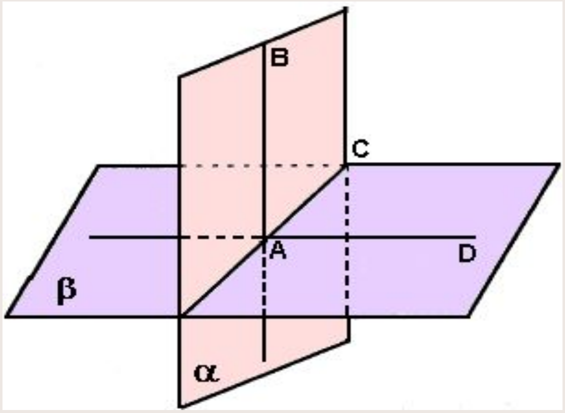
Доказательство:

1) Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой AC, причем AB ⊥ AC, так как по условию AB⊥ β, т.е. прямая AB перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости β.

2) Проведём в плоскости прямую AD, перпендикулярную к прямой AC. Тогда угол BAD -- линейный угол двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей α и β. Но

   ∠ BAD=90° (так как AB ⊥ β). Следовательно, угол между плоскостями α и β равен 90°, т.е. α ⊥ β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



1) $AB \perp \beta$, $AC \subset \beta$ => $AB \perp AC$ ($\alpha \cap \beta = AC$)

2) $AB \perp \beta$, $AD \subset \beta$ => $AB \perp AD$ ($AD \perp AC$)

3) $\angle(\alpha\ ;\ \beta) = \angle BAD = 90^\circ$ => $\alpha \perp \beta$