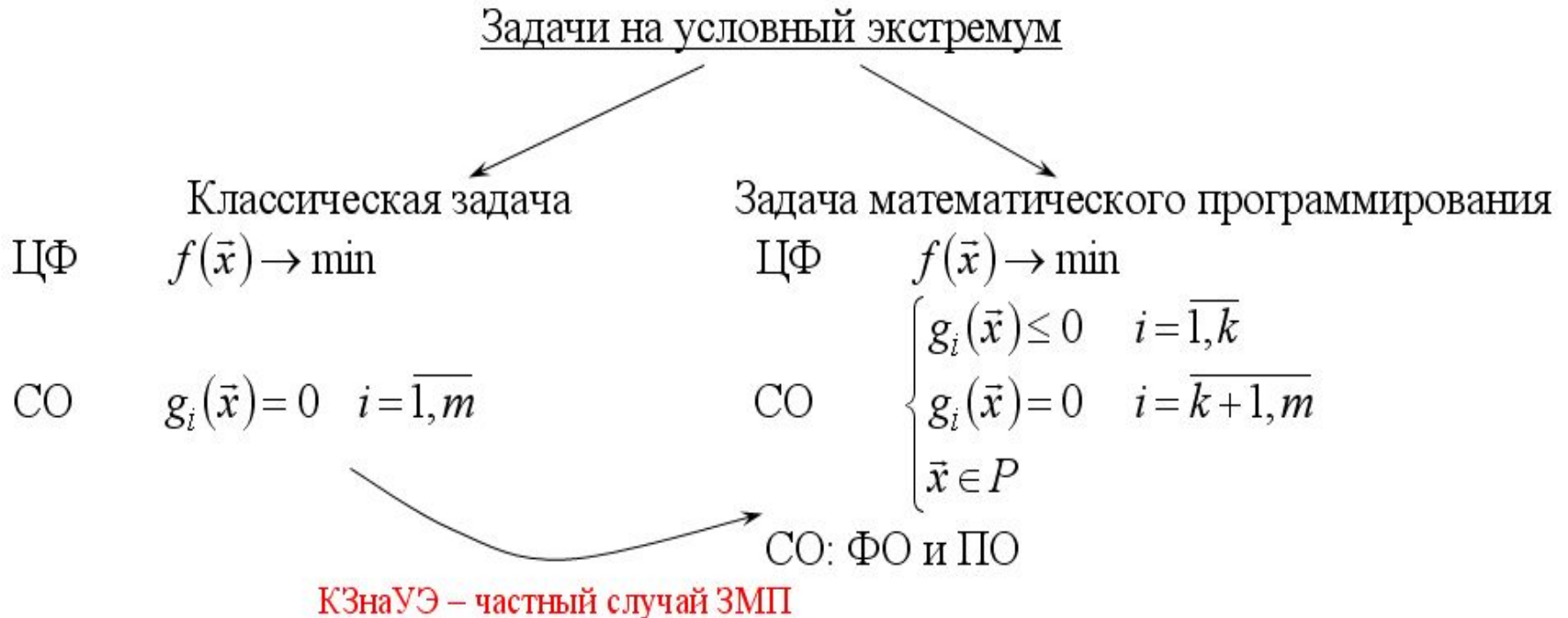


# Условная оптимизация

# Классификация задач на условный экстремум



Особенности решения задач условной оптимизации:

1. Оптимальное решение – локальный экстремум внутри ОДР
2. Оптимальное решение – экстремум на границе ОДР

# Классическая задача на условный экстремум

$$Z = f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min \quad \begin{cases} g_1(\bar{x}) = 0 \\ g_2(\bar{x}) = 0 \\ \dots \\ g_m(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

Функция Лагранжа  $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\bar{x})$ , где  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) - множители Лагранжа

Необходимые условия минимума  $f(\bar{x})$  при наличии ограничений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} = 0 & j = \overline{1, n} \\ \frac{\partial L(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_i} = g_i(\bar{x}) = 0 & i = \overline{1, m} \end{cases}$$

Решение  $(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)$  - стационарная точка системы

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\bar{x}) = f(\bar{x}) \text{ для } \forall \bar{x} \in \text{ОДР}$$

Достаточное условие минимума  $f(\bar{x})$  в  $(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)$

$$\frac{\partial^2 L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)}{\partial^2 x_j} > 0 \quad j = \overline{1, n}, \quad \text{где } \frac{\partial^2 L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \frac{\partial^2 g_i(\bar{x}^*)}{\partial x_j \partial x_k}$$

# Пример решения классической задачи на условный экстремум

Пример:  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min$  при наличии ограничения  $x_1 + x_2 = 4$

Функция Лагранжа  $L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(4 - x_1 - x_2)$

Необходимые условия минимума

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 4 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Стационарная точка системы  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 2$  и  $\lambda = 4$

Достаточное условие минимума  $G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ответ: точка  $(2, 2)$  минимум  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 8$  с учетом выполнения ограничения  $x_1 + x_2 = 2 + 2 = 4$

# Задача математического программирования

Распространение метода множителей Лагранжа на ЗМП вида:

$$Z = f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min \quad g_i(\bar{x}) \leq b_i \quad i = \overline{1, m}$$

Сведение неравенств к равенствам

$$g_i(\bar{x}) + u_i^2 = b_i \quad u_i^2 > 0 \quad \text{т.е.} \quad g_i(\bar{x}) + u_i^2 - b_i = 0$$

Сведение к классической задаче на условный экстремум

$$Z = f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min \quad g_i(\bar{x}) + u_i^2 - b_i = 0 \quad i = \overline{1, m}$$

Функция Лагранжа  $L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{u}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [g_i(\bar{x}) + u_i^2 - b_i]$

Необходимые условия минимума  $f(\bar{x})$  (в стационарной точке  $(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*, \bar{u}^*)$ )

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{u})}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} = 0 & j = \overline{1, n} \\ \frac{\partial L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{u})}{\partial \lambda_i} = g_i(\bar{x}) + u_i^2 - b_i = 0 & i = \overline{1, m} \\ \frac{\partial L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{u})}{\partial u_i} = 2\lambda_i u_i = 0 & i = \overline{1, m} \end{cases}$$

# Задача математического программирования

$$\frac{\partial L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{u})}{\partial u_i} = 2\lambda_i u_i = 0 \quad \left| \times \frac{u_i}{2} \right. \rightarrow \lambda_i u_i^2 = \lambda_i [b_i - g_i(\bar{x})] = 0 \quad i = \overline{1, m}$$

т.е.  $\lambda_i = 0$  или  $b_i - g_i(\bar{x}) = 0$

Возможные варианты:

1.  $\lambda_i \neq 0$  и  $g_i(\bar{x}) = b_i$  - активное ограничение-равенство
2.  $\lambda_i = 0$  и  $g_i(\bar{x}) < b_i$  - неактивное ограничение (можно пренебречь)

Дополнительное условие в точке минимума  $\lambda_i \geq 0$

Условия Куна-Такера – необходимые условия минимума  $f(\bar{x})$  при наличии ограничений  $g_i(\bar{x}) \leq b_i \quad i = \overline{1, m}$  – поиск  $\bar{\lambda}^*$  и  $\bar{x}^*$

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} = 0 & j = \overline{1, n} \\ g_i(\bar{x}) \leq b_i & i = \overline{1, m} \\ \lambda_i [g_i(\bar{x}) - b_i] = 0 & i = \overline{1, m} \\ \lambda_i \geq 0 & i = \overline{1, m} \end{cases}$$

В задаче на максимум  $\lambda_i$  меняет знак на противоположный

# Пример на ЗМП

Пример:  $f(\bar{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \rightarrow \min$

СО  $x_1 \geq 0$ ;  $x_2 \geq 0$ ;  $x_1 + x_2 \geq 4$

Преобразование:

$f(\bar{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \rightarrow \min$

$-x_1 + u_1^2 = 0$ ;  $-x_2 + u_2^2 = 0$ ;  $-x_1 - x_2 + u_3^2 + 4 = 0$

Функция Лагранжа:

$L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{u}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + \lambda_1(u_1^2 - x_1) +$   
 $+ \lambda_2(u_2^2 - x_2) + \lambda_3(u_3^2 - x_1 - x_2 + 4)$

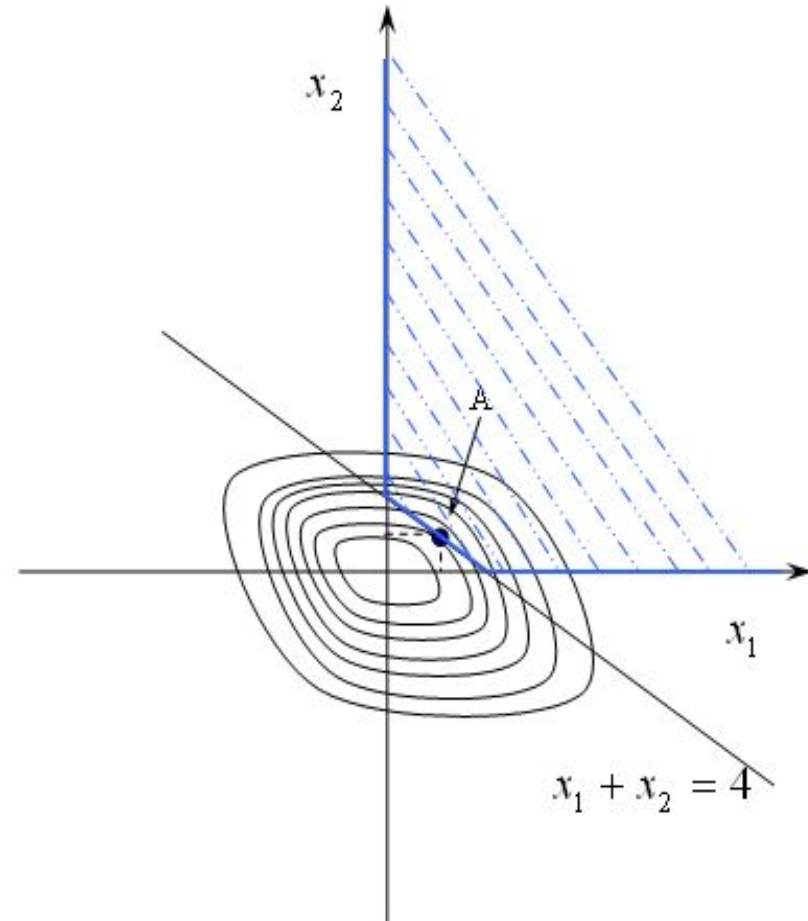
Условия Куна-Такера:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ 4x_1 + 10x_2 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -x_1 \leq 0; -x_2 \leq 0; -x_1 - x_2 \leq -4; \\ \lambda_1 x_1 = 0; \lambda_2 x_2 = 0; \lambda_3(4 - x_1 - x_2) = 0 \\ \lambda_1 \geq 0; \lambda_2 \geq 0; \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

Решение:

$x_1 = 3$ ;  $x_2 = 1$ ;  $\lambda_1 = 0$ ;  $\lambda_2 = 0$ ;  $\lambda_3 = 22$

$f(x_1, x_2) = 44$



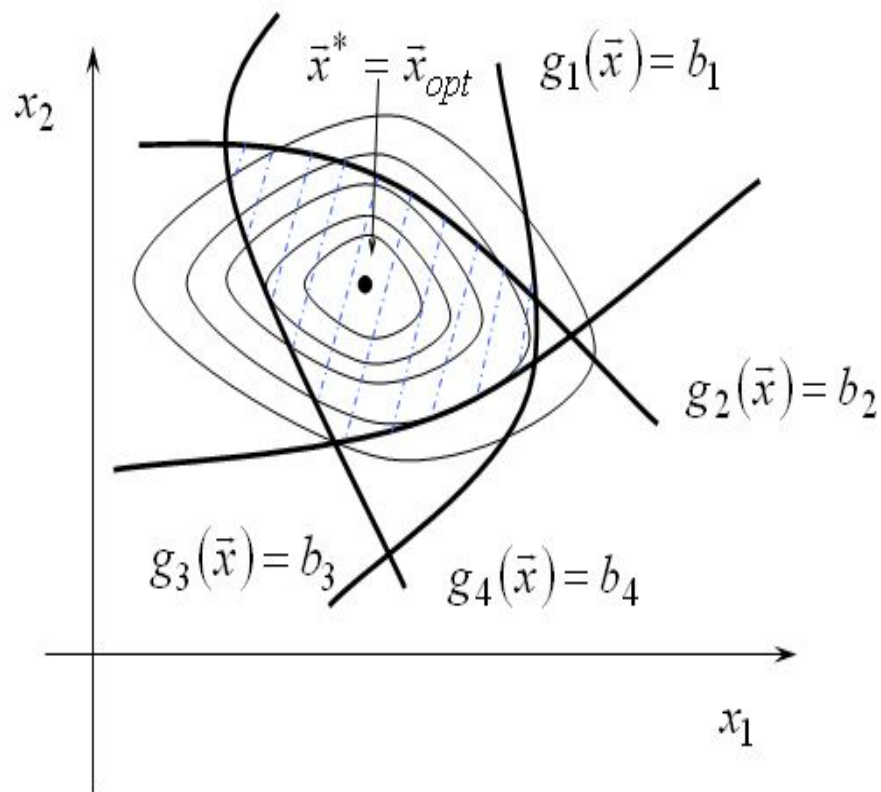
# Возможные варианты положения минимума в ЗМП

I

$g_i(\bar{x}) = b_i$  - границы ОДР

минимум  $f(\bar{x})$  при наличии ограничений совпадает с минимумом  $f(\bar{x})$  при отсутствии ограничений

ограничениями можно пренебречь и для поиска минимума использовать методы минимизации  $f(\bar{x})$  без ограничений





# Возможные варианты положения минимума в ЗМП

II

$$\bar{x}_{opt} \in g_2(\bar{x}) = b_2$$

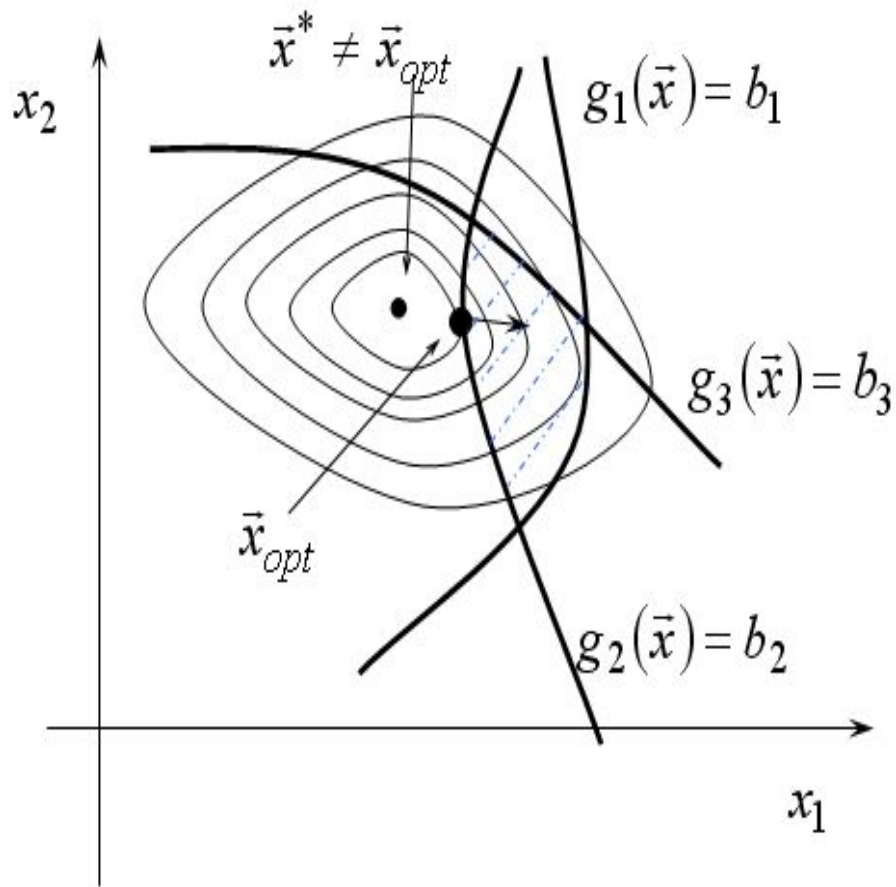
ограничения  $g_1(\bar{x}) = b_1$  и  
 $g_3(\bar{x}) = b_3$  неактивные

исходная задача переходит к виду

$$f(\bar{x}) \rightarrow \min$$
$$g_2(\bar{x}) = b_2$$

в  $\bar{x}_{opt}$  справедливо условие

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial g_2(\bar{x})}{\partial x_j} \quad j = \overline{1, n}$$

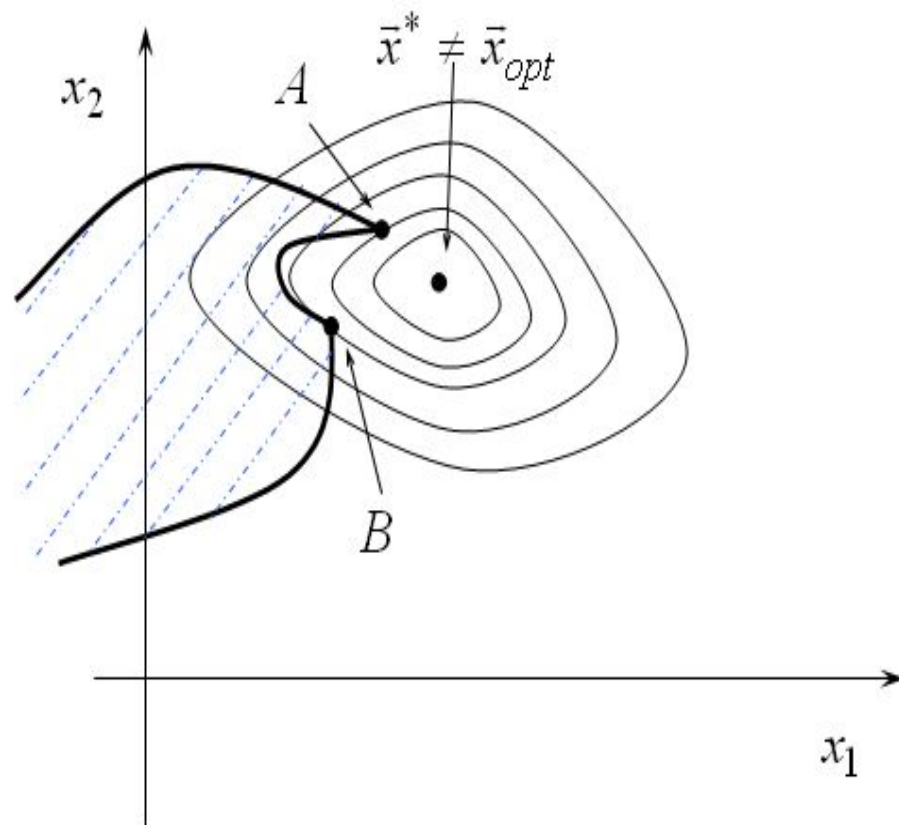


# Возможные варианты положения минимума в ЗМП

III

Функция имеет одну точку минимума в  
отсутствии ограничений

Для задачи с ограничениями  $A$  и  $B$  являются  
локальными минимумами



# Задачи выпуклого программирования

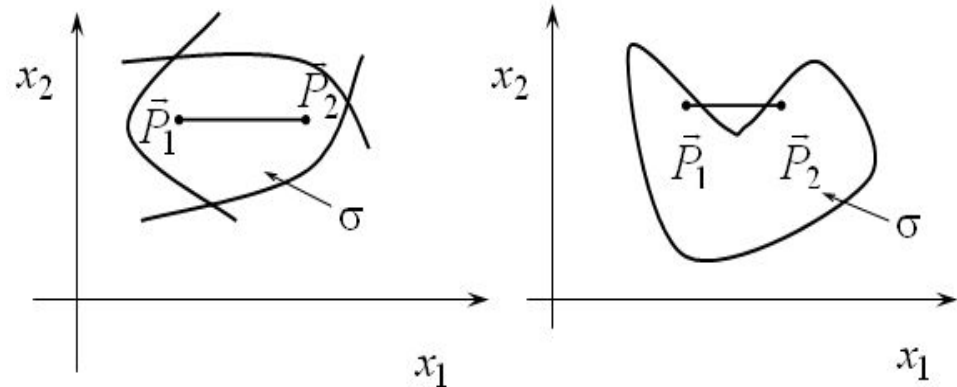
1. ОДР – выпукла
2. Минимизируемая (максимизируемая) функция выпукла (вогнута)

Выпуклая область:

$$\bar{P}_1, \bar{P}_2 \in \sigma$$

$$\bar{P}_\theta = \theta \bar{P}_2 + (1 - \theta) \bar{P}_1 \in \sigma$$

$$0 < \theta < 1$$

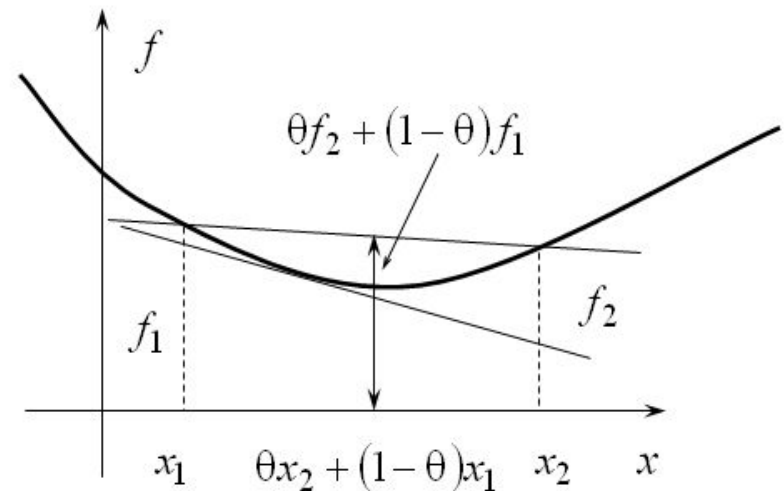


Выпуклая функция  $f(\vec{x})$  на выпуклой области  $X$

$$f(\theta \vec{x}_2 + (1 - \theta) \vec{x}_1) \leq \theta f(\vec{x}_2) + (1 - \theta) f(\vec{x}_1)$$

$$0 < \theta < 1 \quad \text{для } \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in X$$

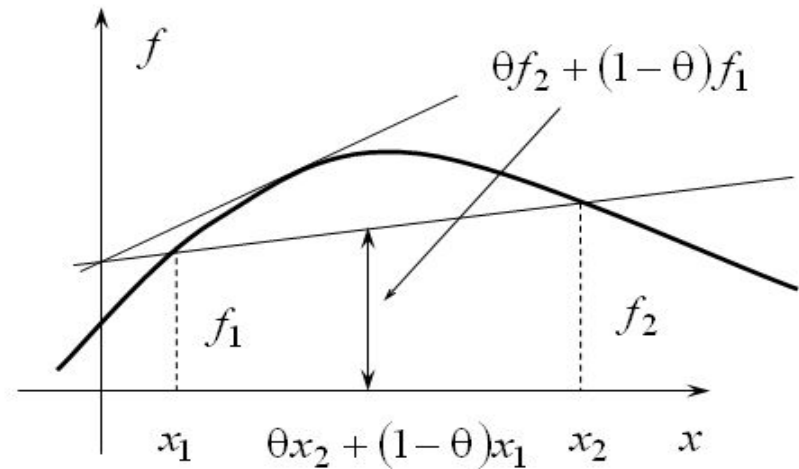
У выпуклой функции гессиан положительно определен



# Задачи выпуклого программирования

Вогнутая функция  $f(\bar{x})$  на выпуклой области  $X$

$$f(\theta\bar{x}_2 + (1-\theta)\bar{x}_1) \geq \theta f(\bar{x}_2) + (1-\theta)f(\bar{x}_1)$$
$$0 < \theta < 1 \quad \text{для } \forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in X$$



Для задачи минимизации  $f(\bar{x})$  при ограничениях  $g_i(\bar{x}) \leq b_i \quad i = \overline{1, m}$ , где  $f(\bar{x})$  и  $g_i(\bar{x})$  - выпуклые функции, необходимые условия Куна-Такера являются также и достаточными

В этом случае функция Лагранжа

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{u}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [g_i(\bar{x}) + u_i^2 - b_i]$$

как сумма выпуклых функций является также выпуклой, а множители  $\lambda_i \geq 0$ , поэтому функция Лагранжа имеет глобальный минимум в точке, где ее производные исчезающе малы, и такая точка является единственной

# Пример не единственного решения

$$f(x, y) = -(x^2 + y^2) \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + u_1^2 = 0 \\ -y + u_2^2 = 0 \\ x + 2y + u_3^2 = 3 \end{cases}$$

Функция Лагранжа

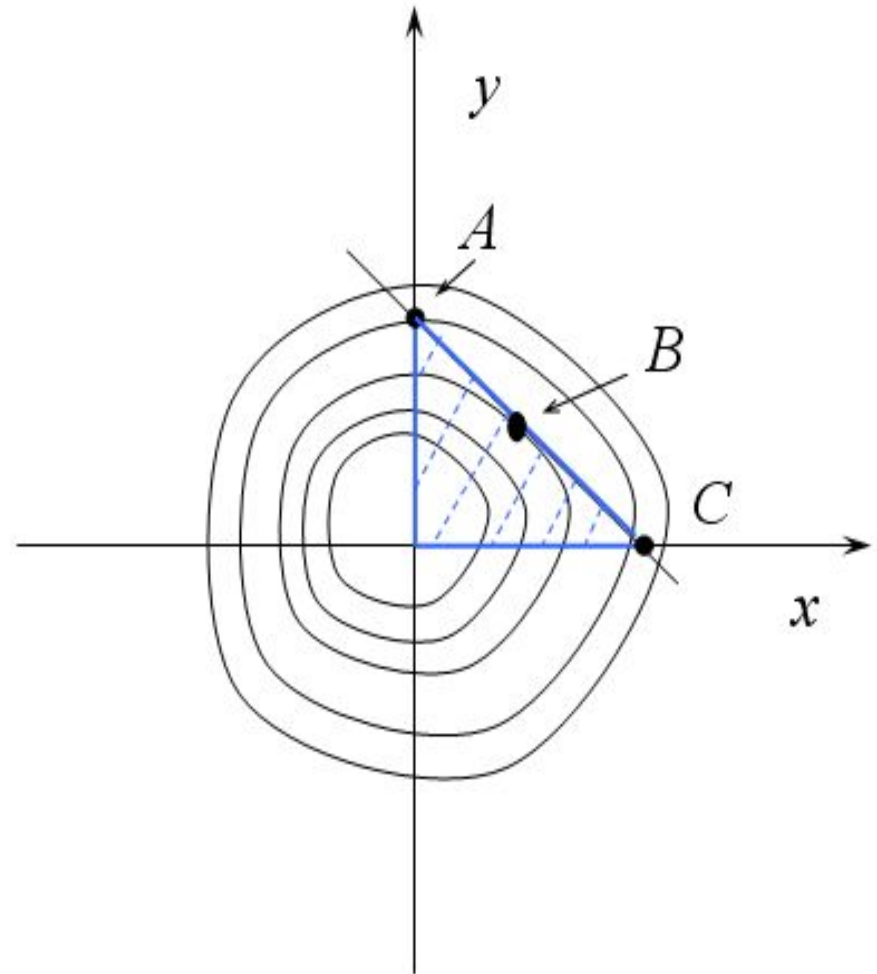
$$L(x, y, \bar{\lambda}, \bar{u}) = -x^2 - y^2 + \lambda_1(-x + u_1^2) + \lambda_2(-y + u_2^2) + \lambda_3(x + 2y + u_3^2 - 3)$$

Условия Куна-Такера

$$\begin{cases} -2x - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -2y - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 x = 0; \lambda_2 y = 0; \lambda_3(x + 2y - 3) = 0 \\ x \geq 0; y \geq 0; x + 2y \leq 3 \\ \lambda_1 \geq 0; \lambda_2 \geq 0; \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

Решение:

1. при  $x > 0$  и  $y > 0$   $\lambda_1, \lambda_2 = 0$
2. если  $\lambda_3 = 0$   $x = y = 0$  - это максимум  $f(x, y)$



# Пример не единственного решения

3. при  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$   $\lambda_3 > 0$  имеем

$$2x = \lambda_3 = y \text{ и } x + 2y - 3 = 0$$

локальный минимум в точке  $B(3/5, 6/5)$

$$\text{при } \lambda_3 = 6/5 \text{ с } f = -45/25$$

4. при  $\lambda_1 > 0$   $\lambda_2 = 0$   $\lambda_3 > 0$  имеем

$$x = 0 \quad y > 0 \quad x + 2y = 3$$

локальный минимум в точке  $A(0, 3/2)$

$$\text{при } \lambda_3 = 3/2 \quad \lambda_1 = 3/2 \text{ с } f = -9/4$$

5. при  $\lambda_1 = 0$   $\lambda_2 > 0$   $\lambda_3 > 0$  имеем

$$x > 0 \quad y = 0 \quad x + 2y = 3$$

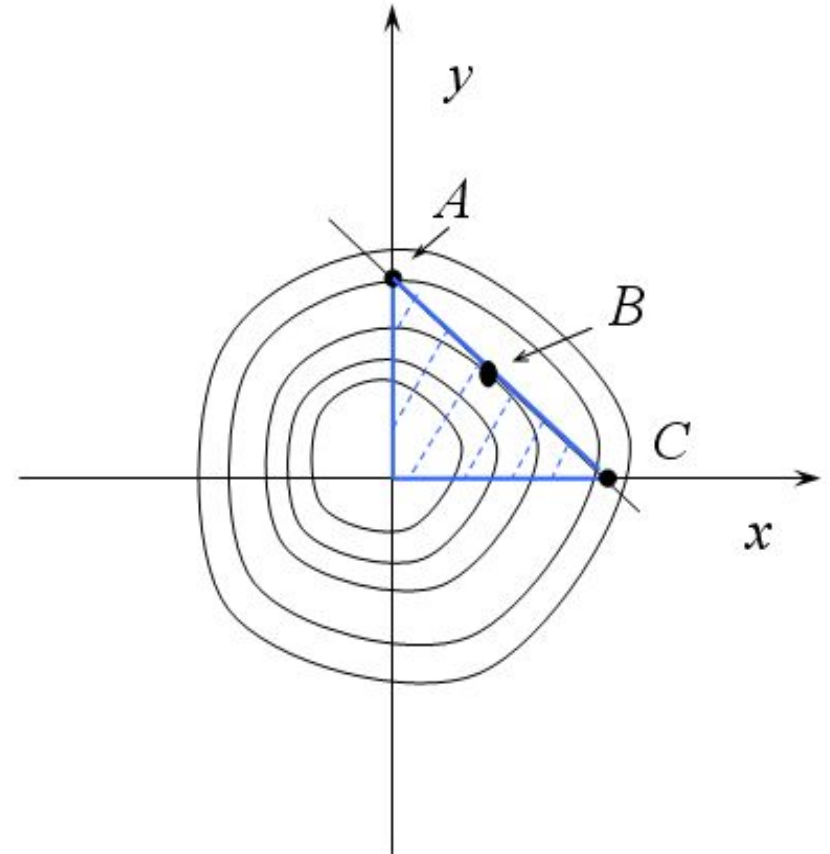
глобальный минимум в точке  $C(3, 0)$

$$\text{при } \lambda_3 = 6 \quad \lambda_2 = 12 \text{ с } f = -9$$

Здесь  $g_i(x, y)$  - выпуклые функции

$f(x, y)$  - вогнутая функция

Условия Куна-Такера – необходимые  
(но не достаточные), поэтому решение не  
единственное



# Комплексный метод Бокса

модификация симплексного метода Нельдера-Мида

Применение: для поиска минимума  $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при ограничениях  
 $g_{i1}(\bar{x}) \leq b_{i1} \quad i = \overline{1, m} \quad l_j \leq x_j \leq u_j \quad j = \overline{1, n}$

При  $f(\bar{x})$  и  $g_{i1}(\bar{x})$  - выпуклых, задача имеет единственное решение

Начальные условия для реализации алгоритма: заданы  $n, m, l_j, u_j$  и начальное приближение  $\bar{x}_1$  (удовлетворяет системе ограничений)

I Построение начального комплекса

комплекс имеет  $k$  вершин ( $k > n + 1$ , рекомендовано  $k = 2n$ )

вершины комплекса  $\bar{x}_i \quad (i = \overline{1, k})$  - удовлетворяют системе ограничений,  $f_i = f(\bar{x}_i)$

Для выбора вершин – итерационная процедура

$$x_{ij} = l_j + r(u_j - l_j) \quad j = \overline{1, n} \quad i = \overline{2, k}$$

$r$  - псевдослучайная равномерно распределенная переменная в интервале (0,1)

если  $\bar{x}_i$  не удовлетворяет ограничениям, то  $\bar{x}'_i = \frac{\bar{x}_i + \bar{x}_c}{2}$

где  $\bar{x}_c = \frac{1}{i-1} \sum_{l=1}^{i-1} \bar{x}_l$  - центр тяжести заданных вершин комплекса

если  $\bar{x}'_i$  - недопустима, расчет повторяют

# Комплексный метод Бокса

II Поиск минимума  $f(\bar{x})$  перемещением внутри ОДР

а) выбор  $\bar{x}_h$   $f_h = \max_{1 \leq i \leq k} f_i$

расчет центра тяжести  $(k-1)$  вершин комплекса  $\bar{x}_0 = \frac{1}{k} \sum_{i(i \neq h)} \bar{x}_{i-1}$

б) процедура отражения  $\bar{x}_r = (1 + \alpha)\bar{x}_0 - \alpha\bar{x}_h$ , где  $\alpha > 0$  - коэффициент отражения

в) проверка  $\bar{x}_r$  на допустимость

если  $\bar{x}_r$  недопустима  $\bar{x}_{rn} = \frac{\bar{x}_r + \bar{x}_0}{2}$

г) при допустимом  $\bar{x}_r$  расчет  $f_r$

если  $f_r > f_h$  расчет  $\bar{x}_{rn} = \frac{\bar{x}_r + \bar{x}_0}{2}$  и переход к в)

если  $f_r < f_h$ , то  $\bar{x}_h \rightarrow \bar{x}_r$  и переход к а)

Проверка сходимости к минимуму:

1. среднеквадратичное отклонение  $\sigma$  для  $k$  значений функции

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{l=1}^k [f(\bar{x}_l) - \bar{f}]^2} \quad \text{где } \bar{f} = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k f_l$$

2.  $d_m$  - максимальное расстояние между двумя вершинами комплекса

если  $\sigma$  и  $d_m$  - достаточно малы, минимум найден, иначе - переход к Па)



# Комплексный метод Бокса

Особенности метода:

1.  $k = 2n$  - предотвращение преждевременного сжатия комплекса
2.  $\alpha = 1.3$  - перемещение и расширение комплекса в направлении минимума функции
3. сходимость метода – при  $f(\vec{x})$  выпуклой и ОДР выпуклой
4. Проверка получения глобального минимума – процедуру минимизации  $f(\vec{x})$  повторяют при разных  $\vec{x}_1$

# Последовательная оптимизация без ограничений - метод штрафной функции

Основная идея:

исходная задача с ограничениями

$$z = f(\bar{x}) \rightarrow \min$$

$$g_i(\bar{x}) \quad i = \overline{1, m}$$

$\leftrightarrow$

эквивалентная задача без ограничений

$$Z = f(\bar{x}) + P(\bar{x}) \rightarrow \min$$

$P(\bar{x})$  - штрафная функция

Вид  $P(\bar{x})$  - множество вариантов представления

Пример:

$$z = f(\bar{x}) \rightarrow \min$$

$$c_j(\bar{x}) \geq 0 \quad j = \overline{1, m}$$

Пусть  $P(\bar{x}) = r \sum_{j=1}^m \frac{1}{c_j(\bar{x})} \quad r > 0$

$$Z = f(\bar{x}) + P(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}, r) \rightarrow \min$$

1.  $\bar{x}$  - допустимое решение

$\rightarrow$

при  $r \downarrow \quad (Z - z) \downarrow$

2.  $\bar{x}$  - допустимое решение (близко к границе ОДР)

$P(\bar{x}) \uparrow \quad Z \uparrow$

Минимум  $Z$  - внутри ОДР задачи с ограничениями  
при  $r \rightarrow 0$  влияние  $P(\bar{x})$  мало и  $\min(Z = \varphi(\bar{x}, r)) \rightarrow \min(z)$

# Решение ЗЛП методом штрафной функции

Дано:  $f(x) = x \rightarrow \min \quad x \geq 2$

Эквивалентная задача

$$Z = \varphi(x, r) = x + \frac{r}{x-2} \rightarrow \min$$

Необходимое условие минимума

$$\frac{d\varphi(x, r)}{dx} = 1 - \frac{r}{(x-2)^2} = 0 \quad \text{т.е. } x = 2 \pm \sqrt{r}$$

Достаточное условие минимума

$$\frac{d^2\varphi(x, r)}{dx^2} = \frac{2r}{(x-2)^3} > 0 \quad \text{при } x = 2 + \sqrt{r}$$

Минимум исходной задачи

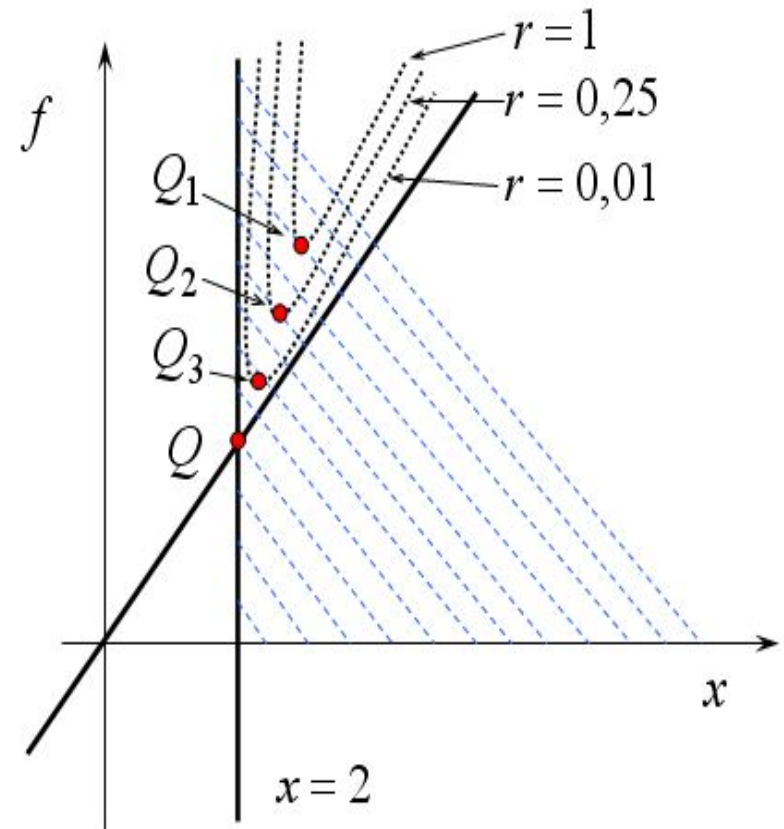
$$Q \quad x = 2 \quad f = 2$$

Решение эквивалентной задачи

$$Q_1 \quad r = 1 \quad x = 3 \quad f = 4$$

$$Q_2 \quad r = 0,25 \quad x = 2,5 \quad f = 3$$

$$Q_3 \quad r = 0,01 \quad x = 2,1 \quad f = 2,2$$



# Численный алгоритм реализации метода штрафной функции

Условия реализации метода:  $f(\bar{x}) \rightarrow \min$  - выпукла,  $c_j(\bar{x})$  - вогнуты

$\varphi(\bar{x}, r) = f(\bar{x}) + r \sum_j 1/c_j(\bar{x})$  выпукла в области ограничений

(ОДР выпукла)

$\varphi(\bar{x}, r)$  при  $r$  - имеет единственный минимум

$$r_1 > r_2 > \dots > r_n \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots, \bar{x}_n^* \\ \text{МИНИМУМЫ } \varphi(\bar{x}, r)$$

$$\lim_{r_k \rightarrow 0} \bar{x}_k^* = \bar{x}^* \quad \lim_{r_k \rightarrow 0} [\min \varphi(\bar{x}, r_k)] = f(\bar{x}^*)$$

где  $\bar{x}^*$  - минимум  $f(\bar{x})$  при наличии ограничений  $c_j(\bar{x}) \geq 0$

## Алгоритм Кэрролла-Фиакко-Маккормика

1. Для заданных  $f(\bar{x})$  и  $c_j(\bar{x}) \geq 0 \quad j = \overline{1, m}$  - выбор  $r = r_0$  и формирование  $\varphi(\bar{x}, r_0)$
2. Поиск минимума  $\varphi(\bar{x}, r_0)$  методом Давидона-Флетчера-Пауэла  $\rightarrow \bar{x}_0^*$

# Численный алгоритм реализации метода штрафной функции

3.  $r_1 = \frac{r_0}{C}$  где  $C = const > 1$

Поиск от начальной точки  $\bar{x}_0^*$  минимума  $\varphi(\bar{x}, r_1)$  методом Давидона-Флетчера-Пауэла  $\rightarrow \bar{x}_1^*$

.....

$r_k = \frac{r_{k-1}}{C}$  где  $C = const > 1$

Поиск от начальной точки  $\bar{x}_{k-1}^*$  минимума  $\varphi(\bar{x}, r_k)$  методом Давидона-Флетчера-Пауэла  $\rightarrow \bar{x}_k^*$

Условие сходимости к минимуму

$$\left| \frac{\varphi(\bar{x}_k^*, r_k) - \varphi(\bar{x}_{k+1}^*, r_{k+1})}{\varphi(\bar{x}_k^*, r_k)} \right| < \varepsilon$$

где  $\varepsilon$  погрешность расчета  $\bar{x}^*$  и  $f(\bar{x}^*)$

Выбор  $r_0$ :  $r_0 = 1$  и проверка  $\bar{x}_k^*$  на каждом шаге расчета на допустимость (начало алгоритма всегда от начальной допустимой  $\bar{x}_0$ )