

ГОУ ДПО СарИПКиПРО  
региональный конкурс  
«Математика в моей жизни - 2009»

# "В мире квадратных уравнений"

*Выполнила: Шатилова Виктория  
Ученица 9 «А» класса  
МОУ «СОШ р.п. Красный Текстильщик  
Саратовского района Саратовской области»  
Руководитель: Свириденко О.В.*

2009 г



## Оглавление

- *Введение*
- *Заметки  
прошлого*
- *Основные  
понятия*
- *Теорема Виета*
- *Способы решения  
квадратного  
уравнения*

# Введение

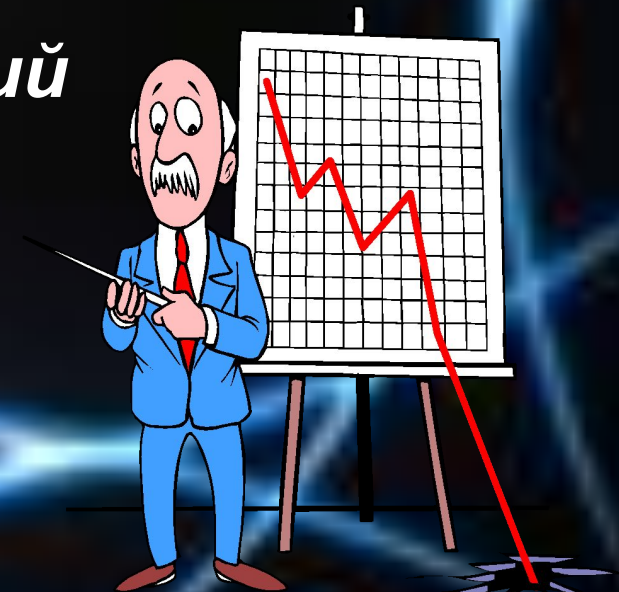
Математика — основа точных наук. На первый взгляд кажется, что она не имеет никакого отношения к природе, но на самом деле это не так. Без неё невозможно построить корабль и самолет, автомобили и метрополитены, даже строительство домов требует точности. Любовь к точным наукам развивает умение логически мыслить, анализировать, смотреть на вещи другими глазами и давать точное определение.

*Я согласна с высказыванием английского физиолога Андру Филлинг Хаксли «Математика похожа на мельницу: если вы засыпете в нее зерна пшеницы, то получите муку, если же засыпете отруби, отруби и получите», поэтому я пытаюсь с большим старанием и желанием учить алгебру, геометрию и физику. Но больше всего я люблю решать квадратные уравнения. Знания в этой области мне даются легко.*

**Цель работы: рассмотреть  
неизвестные способы решения  
квадратных уравнений**

**Задачи:**

- ✓ **познакомиться с историей  
возникновения квадратных уравнений**
- ✓ **повторить теорему Виета и её  
доказательство**
- ✓ **узнать и понять незнакомые  
решения квадратных уравнений**



*«Уравнение есть равенство, которое еще не является истинным, но которое стремятся сделать истинным, не будучи уверенными, что этого можно достичь.»*

*Фуше А.*

*«Процесс " решения" уравнения есть просто акт приведения его к возможно более простой форме. В какой бы форме уравнение ни было написано, его информационный характер остается тот же.»*

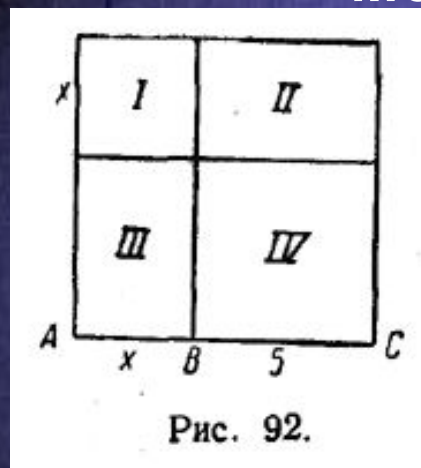
*Лодж О.*



# Заметки прошлого

Многие математики древности решали квадратные уравнения геометрическим способом. Например, для решения уравнения  $x^2 + 10x = 39$  поступали

следующим образом. Пусть  $AB = x$ ,  $BC = 5$



Методы решения квадратных уравнений были известны еще в древние времена. Они часто встречаются в примерах, в виде задач, в трудах древнегреческого математика Евклида (III в. до н. э.), в вавилонских глиняных табличках.

Вспомогательная линия, проведенная в виде диагонали, делит квадрат на две части, как показано на рисунке. Площадь каждой из этих частей равна  $x^2 + 10x$  (или  $39$ ).

Вспомогательная линия, проведенная в виде диагонали, делит квадрат на две части, как показано на рисунке. Площадь каждой из этих частей равна  $x^2 + 10x$  (или  $39$ ).

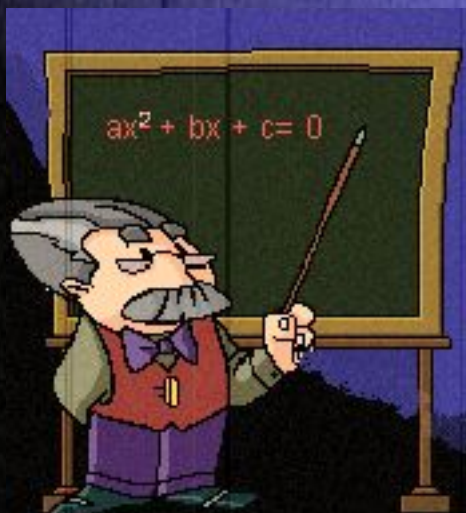
В результате получится  $64$  —

площадь всего квадрата. Но эта же площадь равна  $(x + 5)^2$ , так как  $AC = x + 5$ . Следовательно,

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$x + 5 = 8,$$

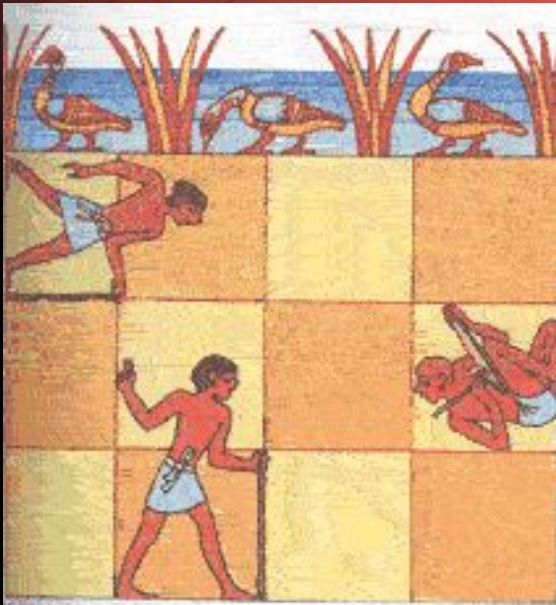
$$x = 3.$$



# Древний Египет

Впервые квадратное уравнение сумели решить математики древнего Египта.

В одном из папирусов есть задача:  
«Найти площадь прямоугольного поля, если площадь 12, а  $\frac{3}{4}$  длины равны ширине.»

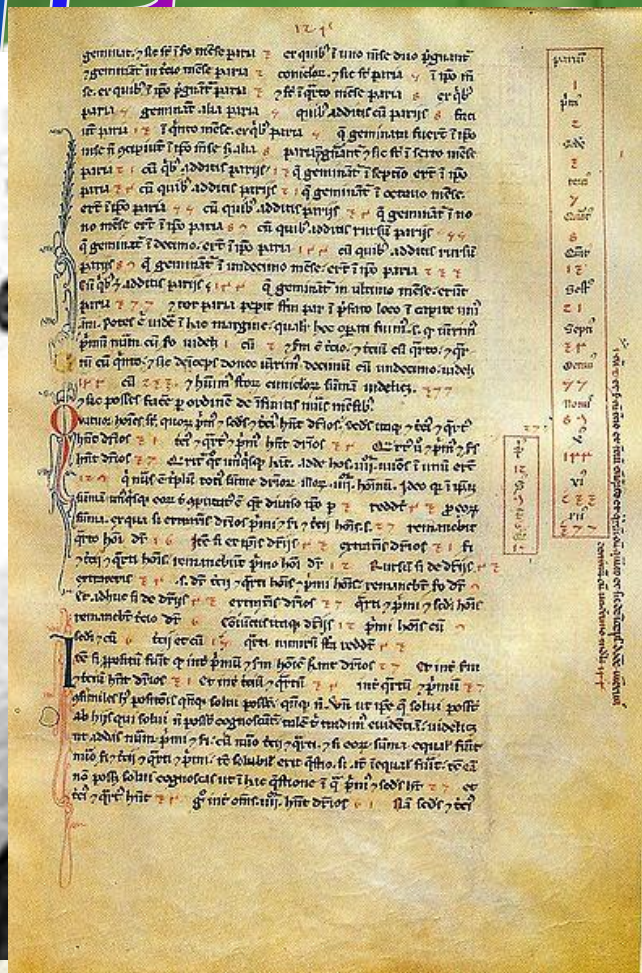


Пусть  $x$  - длина поля. Тогда  $\frac{3x}{4}$  - его ширина,  $S = \frac{3x^2}{4}$  - площадь. Получилось квадратное уравнение  $\frac{3x^2}{4} = 12$

В папирусе дано правило: "Разделить 12 на  $\frac{3}{4}$ ".  
 $12 : \frac{3}{4} = 12 \cdot \frac{4}{3} = 16$ . Итак,  $x^2 = 16$ .  
"Длина поля равна 4" - указано в папирусе.

Прошли тысячелетия, и сейчас мы получим два решения уравнения: -4 и 4. Но в египетской задаче и мы приняли бы  $x = 4$ , т.к. длина поля может быть только положительной величиной.

# Европа



ых уравнений по  
ед ал – Харезми -  
ематик, астроном  
сической алгебры)  
жены в "Книге  
ду итальянским  
оначчи(Пизанский  
первый крупный  
Европы. Автор  
о некоторые  
еры решения задач  
к введению

Леонардо Фибоначчи  
абака



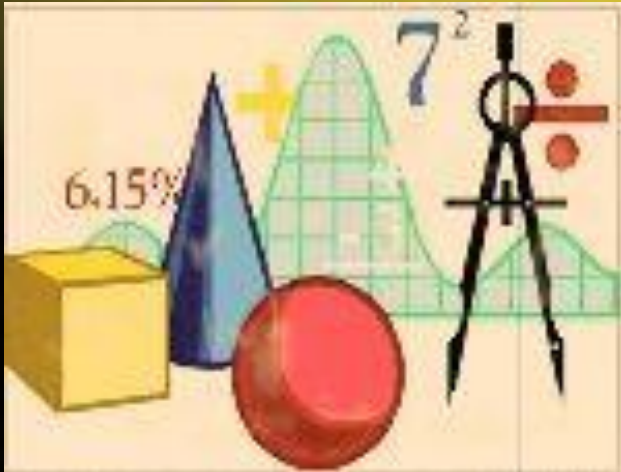


# Европа

*Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду*

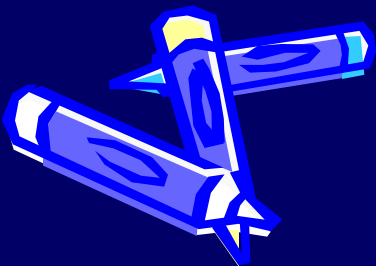
$$x^2 + bx = c$$

*при возможных комбинациях знаков коэффициентов  $b$ ,  $c$ , было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М. Штифелем (около 1487 — 19 апреля 1567) — немецкий математик.*

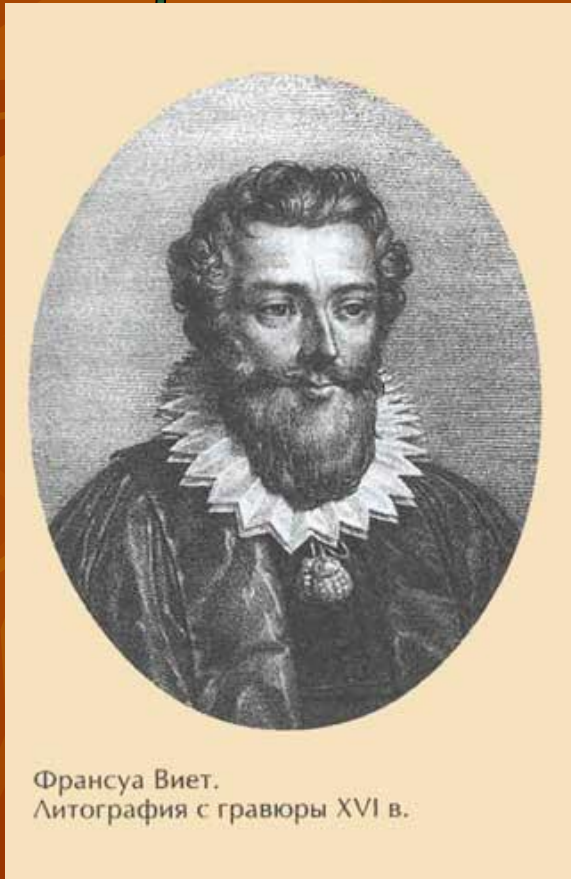


# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

*Квадратное уравнение- это уравнение вида  $ax^2+bx+c=0$  где,  $a, b, c$  - действительные числа, причем  $a$  не равно 0. Если  $a = 1$  , то квадратное уравнение называют **приведенным**; если  $a$  не равно 1, - то **неприведенным**. Числа  $a, b, c$  носят следующие названия  $a$  - первый коэффициент,  $b$  - второй коэффициент,  $c$  - свободный член.*



# Теорема Виета



Франсуа Виет.  
Литография с гравюры XVI в.

«Виет (1540-1603) сделал решающий шаг, введя символику во все алгебраические доказательства путем применения буквенных обозначений для выражения как неизвестных, так и известных величин. Не только в алгебре, но также и в тригонометрии. В частности, он работал с коэффициентами уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  и доказал, что сумма корней равна  $-\frac{b}{a}$ , а произведение равно  $\frac{c}{a}$ . Это открытие стало известно как теорема Виета. В 1591 году Виет опубликовал свои результаты в трактате «De Vietae Mathematica», в котором он представил эти результаты в более систематическом виде. Его работа оказала огромное влияние на развитие алгебры и привела к созданию современной алгебры. Теорема Виета является фундаментальным результатом в теории уравнений и имеет множество приложений в различных областях математики и физики. Например, она используется для нахождения корней уравнений, анализа поведения функций и в теории вероятностей. Кроме того, теорема Виета имеет историческое значение, так как она была одним из первых результатов, полученных с помощью буквенных обозначений, что позволило математикам работать с абстрактными понятиями и проводить более сложные доказательства. В настоящее время теорема Виета остается важным инструментом в математике и продолжает использоваться в различных областях науки и техники. Например, она применяется в инженерии, физике и информатике для решения задач, связанных с уравнениями и функциями. Таким образом, теорема Виета является одним из самых важных результатов в истории математики и продолжает оказывать влияние на развитие науки и техники в наше время.»

# Доказательство теоремы Виета

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – различные корни квадратного трехчлена  $x^2 + px + q$ .

Теорема Виета утверждает, что имеют место следующие соотношения:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = q$$

Для доказательства подставим каждый из корней в выражение для квадратного трехчлена. Получим два верных числовых равенства:

$$x_1^2 + px_1 + q = 0$$

$$x_2^2 + px_2 + q = 0$$

Вычтем эти равенства друг из друга. Получим

$$x_1^2 - x_2^2 + p(x_1 - x_2) = 0$$

Разложим разность квадратов и одновременно перенесем второе слагаемое в правую часть:

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = -p(x_1 - x_2)$$



Так как по условию корни  $x_1$  и  $x_2$  различны, то  $x_1 - x_2$  не равна 0 и мы можем сократить равенство на  $x_1 - x_2$ . Получим первое равенство теоремы:

$$x_1 + x_2 = -p$$

Для доказательства второго подставим в одно из написанных выше равенств (например, в первое) вместо коэффициента  $p$ , равное ему

число  $-(x_1 + x_2)$ :

$$x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + q = 0$$

Преобразуя левую часть, получаем:

$$x_1^2 - x_1^2 - x_2 x_1 + q = 0$$

$x_1 x_2 = q$ , что и требовалось доказать.





Способы решения

квадратных

уравнений



? ? ?

## Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

Центр окружности находится в точке пересечения перпендикуляров  $SF$  и  $SK$ .  
 Допустим, что искомая окружность касается оси  $OX$  в точке  $K$ .  
 Тогда ее центр  $S$  лежит на перпендикуляре  $SK$  к оси  $OX$ .  
 Пусть  $A(0; 1)$  — точка на оси  $OY$ , лежащая на окружности.  
 Тогда  $SA = SK$ . Пусть  $F$  — проекция  $S$  на ось  $OY$ .  
 Тогда  $SF = AF$ . Пусть  $C(0; c/a)$  — точка на оси  $OY$ , лежащая на окружности.  
 Тогда  $SC = SK$ . Пусть  $K$  — проекция  $S$  на ось  $OX$ .  
 Тогда  $SK = CK$ . Пусть  $B(x_1; 0)$  и  $D(x_2; 0)$  — точки на оси  $OX$ , лежащие на окружности.  
 Тогда  $SB = SD$ . Пусть  $F$  — проекция  $S$  на ось  $OY$ .  
 Тогда  $SF = AF$ . Пусть  $C(0; c/a)$  — точка на оси  $OY$ , лежащая на окружности.  
 Тогда  $SC = SK$ . Пусть  $K$  — проекция  $S$  на ось  $OX$ .  
 Тогда  $SK = CK$ . Пусть  $B(x_1; 0)$  и  $D(x_2; 0)$  — точки на оси  $OX$ , лежащие на окружности.  
 Тогда  $SB = SD$ .

абсцисс в точках  $B(x_1; 0)$  и  $D(x_2; 0)$ , где  $x_1$  и  $x_2$  —

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2a},$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

Откуда  $OC = OB \cdot OD / OA = x_1 x_2 / 1 = c/a$ .

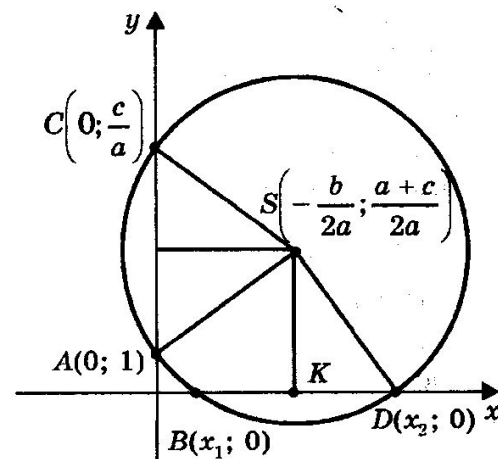


Рис. 5

Итак:

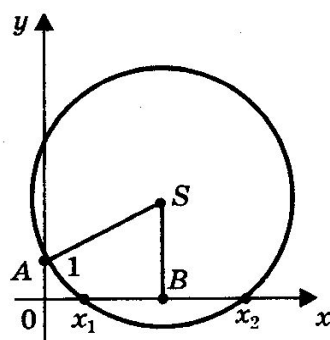
- 1) Построим точки  $S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{a+c}{2a}\right)$  (центр окружности) и  $A(0; 1)$ ;
- 2) проведем окружность с радиусом  $SA$ ;
- 3) абсциссы точек пересечения этой окружности с осью  $Ox$  являются корнями исходного квадратного уравнения.

При этом возможны три случая.

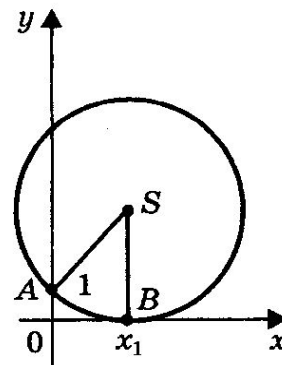
- 1) Радиус окружности больше ординаты центра ( $AS > SK$ , или  $R > a + c/2a$ ), окружность пересекается  $Ox$  в двух точках (рис. 6, а)  $B(x_1; 0)$  и  $D(x_2; 0)$ , где  $x_1$  и  $x_2$  - корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ .
- 2) Радиус окружности равен ординате центра ( $AS = SB$ , или  $R = a + c/2a$ ), окружность касается оси  $Ox$  (рис. 6, б) в точке  $B(x_1; 0)$ , где  $x_1$  - корень квадратного уравнения.
- 3) Радиус окружности меньше ординаты центра ( $AS < SB$ , или  $R < \frac{a+c}{2a}$ ).



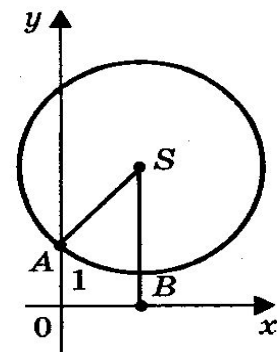
окружность не имеет общих точек с осью абсцисс (рис. 6, в), в этом случае уравнение не имеет решения.



а)



б)



в)

Рис. 6

а)  $AS > SB, R > \frac{a+c}{2a}$ .    б)  $AS = SB, R = \frac{a+c}{2a}$ .    в)  $AS < SB, R < \frac{a+c}{2a}$ .

Два решения  $x_1$  и  $x_2$ .

Одно решение  $x_1$ .

Нет решения.

• **Пример:**

Решим уравнение

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

(рис. 7).

**Решение.** Определим координаты точки центра окружности по формулам:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1,$$

$$y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1-3}{2 \cdot 1} = -1.$$

Проведем окружность радиуса  $SA$ , где  $A(0; 1)$ .

Ответ:  $x_1 = -1; x_2 = 3$ .

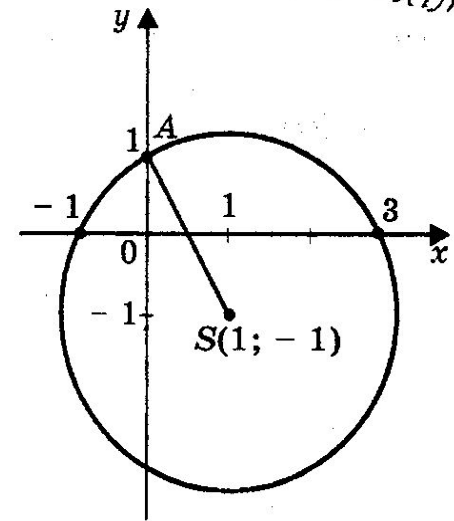


Рис. 7

## Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

$$z^2 + pz + q = 0.$$

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам (рис.11):

$$OB = \frac{a}{1+z}, AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

Полагая  $OC = p$ ,  $ED = q$ ,  $OE = a$   
Из подобия треугольников  $CAH$   
и  $CDF$

получим пропорцию

$$\frac{p - q}{p - AB} = \frac{a}{OB}, \text{ откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнение } z^2 + pz + q = 0$$

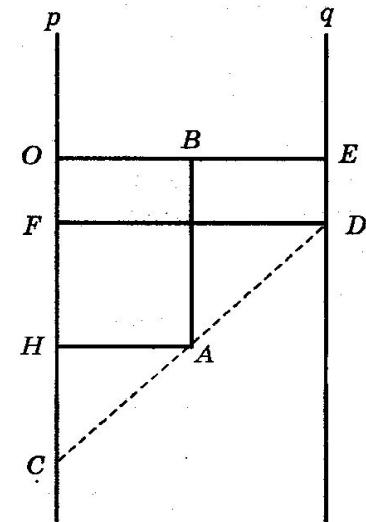


Рис. 11

**Примеры.**

1) Для уравнения  $z^2 - 9z + 8 = 0$   
номограмма дает корни  $z_1 = 8,0$  и  $z_2 = 1,0$  (рис.12).

2) Решим с помощью номограммы  
уравнение  
 $2z^2 - 9z + 2 = 0$ .

Разделим коэффициенты этого  
уравнения на 2,  
получим уравнение  
 $z^2 - 4,5z + 1 = 0$ .

Номограмма дает корни  $z_1 = 4$  и  $z_2 = 0,5$ .

3) Для уравнения  
 $z^2 - 25z + 66 = 0$

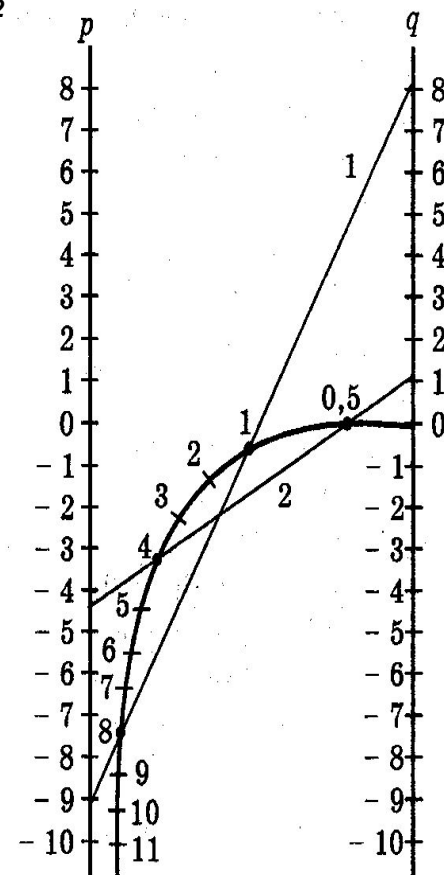
коэффициенты  $p$  и  $q$  выходят за  
пределы шкалы, выполним  
подстановку  $z = 5t$ ,  
получим уравнение

$$t^2 - 5t + 2,64 = 0,$$

которое решаем посредством  
номограммы и получим  $t_1 = 0,6$  и

$$t_2 = 4,4, \text{ откуда}$$

$$z_1 = 5t_1 = 3,0 \text{ и } z_2 = 5t_2 = 22,0.$$



## Геометрический способ решения квадратных уравнений.

Площадь  $S$  квадрата  $ABCD$  можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата  $= 39^2$ , четырех прямоугольников  $(4 \cdot 2,5x)$  и следующего образом: «Квадрат и десять корней равны  $39$ » (рис.15).

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной  $x$ , заменяя сторонах строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна  $2,5$ , следовательно, площадь каждого равна  $2,5x$ . Откуда следует, что сторона квадрата  $ABCD$ , отрезанная в углах четыре равных квадрата, сторона каждого из них  $2,5$ , а площадь  $0,25$ .

Для искомого  $x$  первоначального квадрата получим

$$x = 39 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

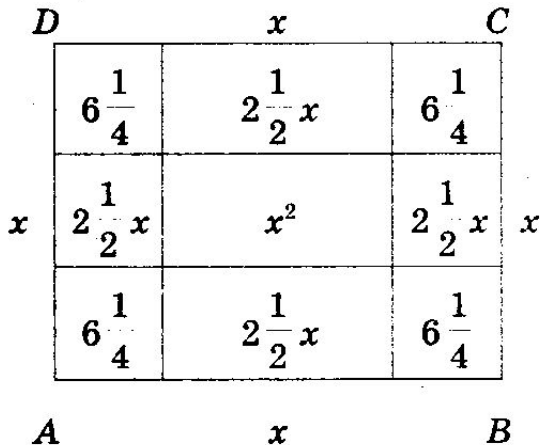


Рис. 15



## 2. Решить геометрически уравнение $y^2 - 6y - 16 = 0$ .

Преобразуя уравнение, получаем

$$y^2 - 6y = 16.$$

На рис. 17 находим «изображения» выражения  $y^2 - 6y$ , т.е. из площади квадрата со стороной  $y$  два раза вычитается площадь квадрата со стороной, равной 3. Значит, если к выражению  $y^2 - 6y$  прибавить 9, то получим площадь квадрата со стороной  $y - 3$ . Заменяя выражение  $y^2 - 6y$  равным ему числом 16, получаем:  $(y - 3)^2 = 16 + 9$ , т.е.  $y - 3 = \pm \sqrt{25}$ , или  $y - 3 = \pm 5$ , где  $y_1 = 8$  и  $y_2 = -2$ .

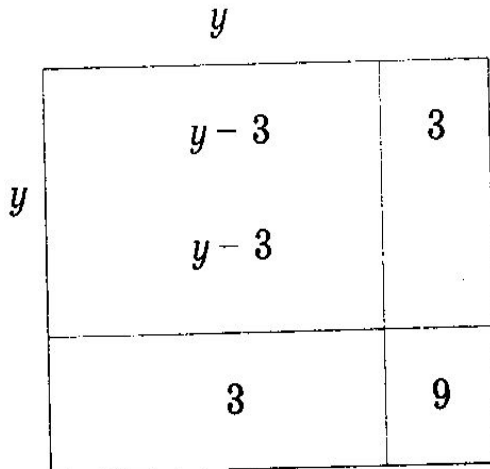
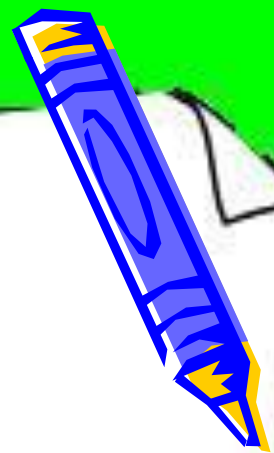


Рис. 17

# Вывод

В ходе работы я познакомилась с историей возникновения квадратных уравнений, повторила теорему Виета и её доказательство.

Узнала интересные способы решения квадратных уравнений.

Я уверена, что математические знания, в частности по данной теме, помогут мне при поступлении в ВУз.





Литература:

1. Большая энциклопедия Кирилла и Мефодия
2. Википедия
3. Справочник математических формул