

ГОУ ДПО СарИПКиПРО
региональный конкурс
«Математика в моей жизни - 2009»

"В мире квадратных уравнений"

*Выполнила: Шатилова Виктория
Ученица 9 «А» класса
МОУ «СОШ р.п. Красный Текстильщик
Саратовского района Саратовской области»
Руководитель: Свириденко О.В.*

2009 г



Оглавление

- *Введение*
- *Заметки
прошлого*
- *Основные
понятия*
- *Теорема Виета*
- *Способы решения
квадратного
уравнения*

Введение

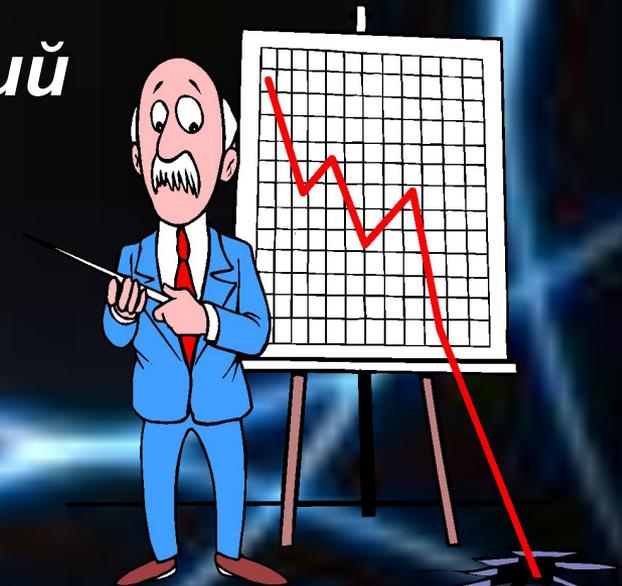
Математика — основа точных наук. На первый взгляд кажется, что она не имеет никакого отношения к природе, но на самом деле это не так. Без неё невозможно построить корабль и самолет, автомобили и метрополитены, даже строительство домов требует точности. Любовь к точным наукам развивает умение логически мыслить, анализировать, смотреть на вещи другими глазами и давать точное определение.

Я согласна с высказыванием английского физиолога Андру Филлинг Хаксли «Математика похожа на мельницу: если вы засыпете в нее зерна пшеницы, то получите муку, если же засыпете отруби, отруби и получите», поэтому я пытаюсь с большим старанием и желанием учить алгебру, геометрию и физику. Но больше всего я люблю решать квадратные уравнения. Знания в этой области мне даются легко.

**Цель работы: рассмотреть
неизвестные способы решения
квадратных уравнений**

Задачи:

- ✓ **познакомиться с историей
возникновения квадратных уравнений**
- ✓ **повторить теорему Виета и её
доказательство**
- ✓ **узнать и понять незнакомые
решения квадратных уравнений**



«Уравнение есть равенство, которое еще не является истинным, но которое стремятся сделать истинным, не будучи уверенными, что этого можно достичь.»

Фуше А.

«Процесс " решения" уравнения есть просто акт приведения его к возможно более простой форме. В какой бы форме уравнение ни было написано, его информационный характер остается тот же.»

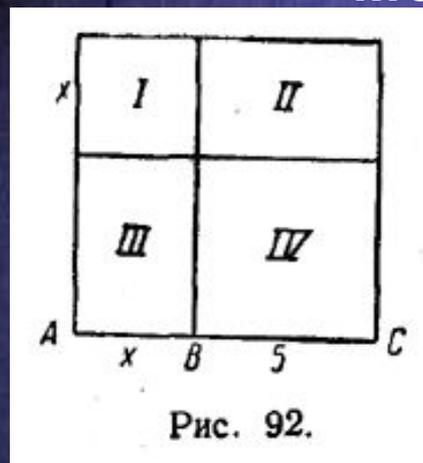
Лодж О.



Заметки прошлого

Многие математики древности решали квадратные уравнения геометрическим способом. Например, для решения уравнения $x^2 + 10x = 39$ поступали

следующим образом. Пусть $AB = x$, $BC = 5$



Методы решения квадратных уравнений были известны еще в древние времена. Они часто встречаются в примерах, в виде задач, в летописях времен царя Хаммурапи (XX в. до н. э.), трудах древнегреческого математика Евклида (III в. до н. э.), в византийских и исламских трактатах.

В результате получится 64 — площадь всего квадрата. Но эта же площадь равна $(x + 5)^2$, так как $AC = x + 5$. Следовательно,

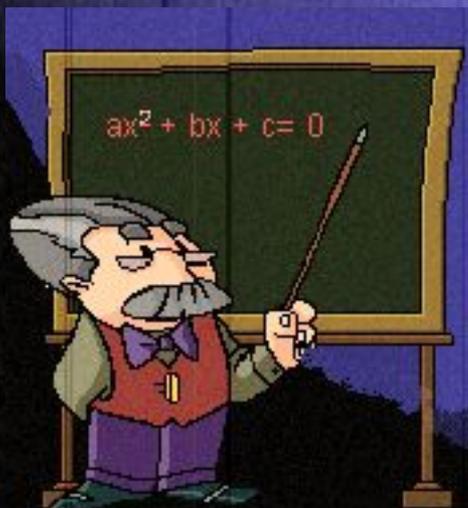
Великая Бой площадь (Проблема э.), площадь в сказках японских

В результате получится 64 — площадь всего квадрата. Но эта же площадь равна $(x + 5)^2$, так как $AC = x + 5$. Следовательно,

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$x + 5 = 8,$$

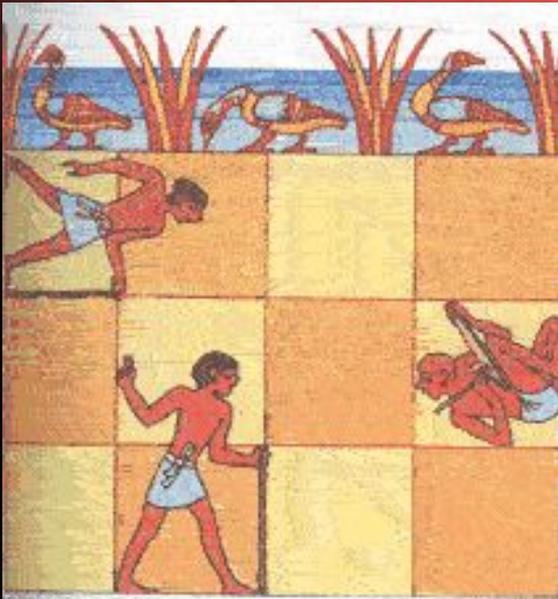
$$x = 3.$$



Древний Египет

Впервые квадратное уравнение сумели решить математики древнего Египта.

В одном из папирусов есть задача:
«Найти площадь прямоугольного поля, если площадь 12, а $\frac{3}{4}$ длины равны ширине.»

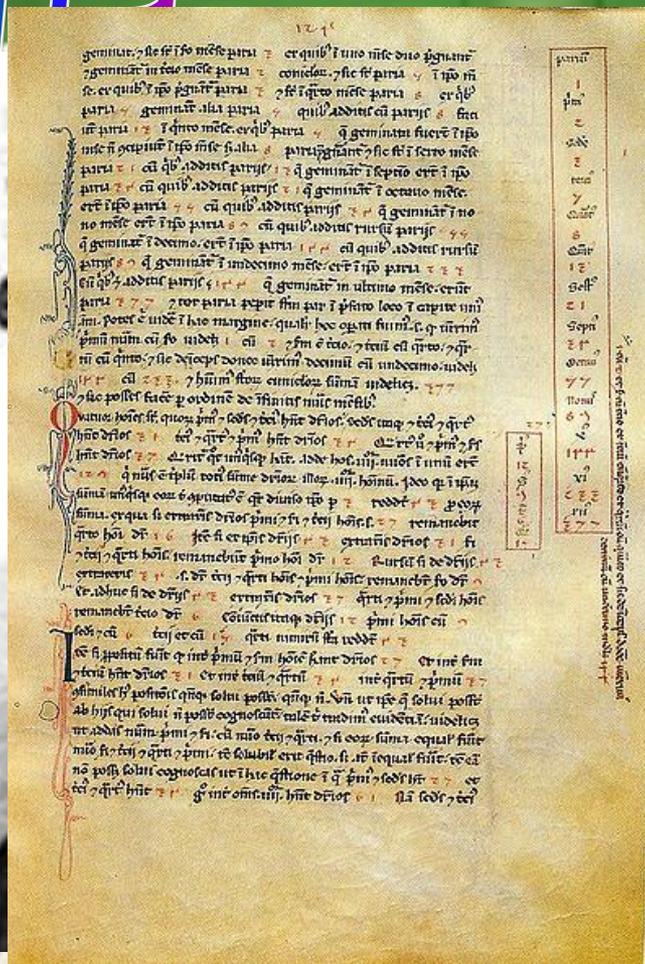


Пусть x - длина поля. Тогда $\frac{3x}{4}$ - его ширина, $S = \frac{3x^2}{4}$ - площадь. Получилось квадратное уравнение $\frac{3x^2}{4} = 12$

В папирусе дано правило: "Разделить 12 на $\frac{3}{4}$ ".
 $12 : \frac{3}{4} = 12 \cdot \frac{4}{3} = 16$. Итак, $x^2 = 16$.
"Длина поля равна 4" - указано в папирусе.

Прошли тысячелетия, и сейчас мы получим два решения уравнения: -4 и 4. Но в египетской задаче и мы приняли бы $x = 4$, т.к. длина поля может быть только положительной величиной.

Европа



ых уравнений по
ед ал – Харезми -
ематик, астроном
сической алгебры)
жены в "Книге
ду итальянским
оначчи(Пизанский
первый крупный
Европы. Автор
о некоторые
еры решения задач
к введению

Леонардо Фибоначчи
абака

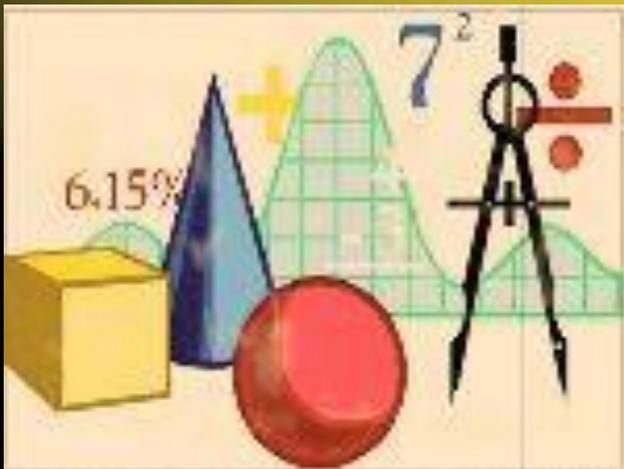


Европа

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду

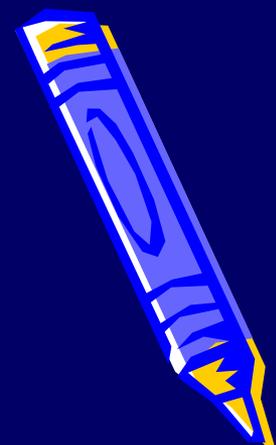
$$x^2 + bx = c$$

при возможных комбинациях знаков коэффициентов b , c , было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М. Штифелем (около 1487 — 19 апреля 1567) — немецкий математик .

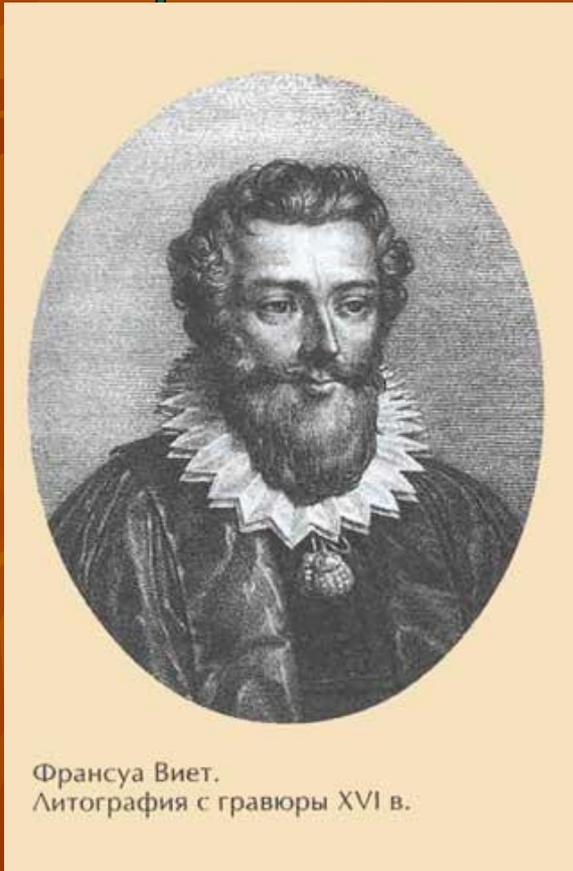


ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

*Квадратное уравнение- это уравнение вида $ax^2+bx+c=0$ где, a, b, c - действительные числа, причем a не равно 0. Если $a = 1$, то квадратное уравнение называют **приведенным**; если a не равно 1, - то **неприведенным**. Числа a, b, c носят следующие названия a - первый коэффициент, b - второй коэффициент, c - свободный член.*



Теорема Виета



Франсуа Виет.
Литография с гравюры XVI в.

«Виет (1540-1603) сделал решающий шаг, введя символику во все алгебраические доказательства путем применения буквенных обозначений для выражения как неизвестных, так и известных величин. Не только в алгебре, но также и в тригонометрии. В частности, он работал с коэффициентами уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и доказал, что сумма корней равна $-\frac{b}{a}$, а произведение равно $\frac{c}{a}$. Это открытие стало известно как теорема Виета. В 1591 году Виет опубликовал свои результаты в трактате «De Vietae Mathematica», в котором он изложил свои работы по алгебре и тригонометрии. Его работы оказали большое влияние на развитие математики в XVII веке. Виет также известен своим вкладом в теорию вероятностей и астрономии. Он был одним из первых, кто предложил использовать буквенные обозначения для неизвестных величин в алгебре. Это позволило ему вывести формулы для нахождения корней квадратного уравнения, которые теперь известны как теорема Виета. Его работы также включали исследование свойств чисел и геометрии. Виет был одним из величайших математиков своего времени, и его открытия продолжают использоваться в современной математике.»

Доказательство теоремы Виета

Пусть x_1 и x_2 – различные корни квадратного трехчлена $x^2 + px + q$.

Теорема Виета утверждает, что имеют место следующие соотношения:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = q$$

Для доказательства подставим каждый из корней в выражение для квадратного трехчлена. Получим два верных числовых равенства:

$$x_1^2 + px_1 + q = 0$$

$$x_2^2 + px_2 + q = 0$$

Вычтем эти равенства друг из друга. Получим

$$x_1^2 - x_2^2 + p(x_1 - x_2) = 0$$

Разложим разность квадратов и одновременно перенесем второе слагаемое в правую часть:

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = -p(x_1 - x_2)$$



Так как по условию корни x_1 и x_2 различны, то $x_1 - x_2$ не равна 0 и мы можем сократить равенство на $x_1 - x_2$. Получим первое равенство теоремы:

$$x_1 + x_2 = -p$$

Для доказательства второго подставим в одно из написанных выше равенств (например, в первое) вместо коэффициента p , равное ему

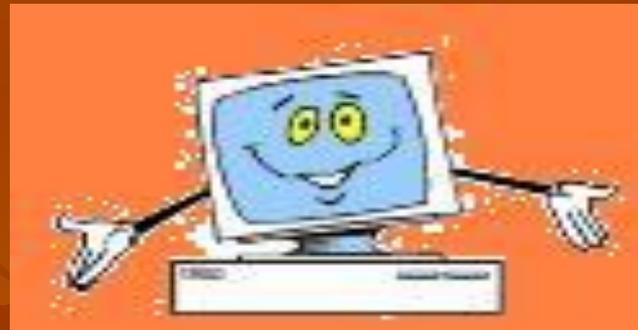
число $-(x_1 + x_2)$:

$$x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + q = 0$$

Преобразуя левую часть, получаем:

$$x_1^2 - x_1^2 - x_2 x_1 + q = 0$$

$x_1 x_2 = q$, что и требовалось доказать.





Способы решения

квадратных

уравнений



?

??

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

Центр окружности находится в точке пересечения перпендикуляров SF и SK .
 Допустим, что искомая окружность касается оси OX в точке K .
 Тогда ее радиус равен SK .
 Пусть $A(0; 1)$ — точка на оси OY , лежащая на окружности.
 Тогда $OA = 1$.
 Пусть $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$ — точки на оси OX , лежащие на окружности.
 Тогда $OB = x_1$ и $OD = x_2$.
 По теореме Пифагора $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 1 + x_1^2$.
 По теореме Пифагора $AD^2 = OA^2 + OD^2 = 1 + x_2^2$.
 Так как $AB = AD$, то $1 + x_1^2 = 1 + x_2^2$, откуда $x_1^2 = x_2^2$, т.е. $x_1 = x_2$.
 Тогда $OB = OD = x$.
 Тогда $AB^2 = 1 + x^2 = AD^2 = 1 + x^2$.
 Тогда $AB = AD$.
 Тогда $AB^2 = 1 + x^2 = AD^2 = 1 + x^2$.
 Тогда $AB = AD$.
 Тогда $AB^2 = 1 + x^2 = AD^2 = 1 + x^2$.
 Тогда $AB = AD$.

абсцисс в точках $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 -

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2a},$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

Откуда $OC = OB \cdot OD / OA = x_1 x_2 / 1 = c/a$.

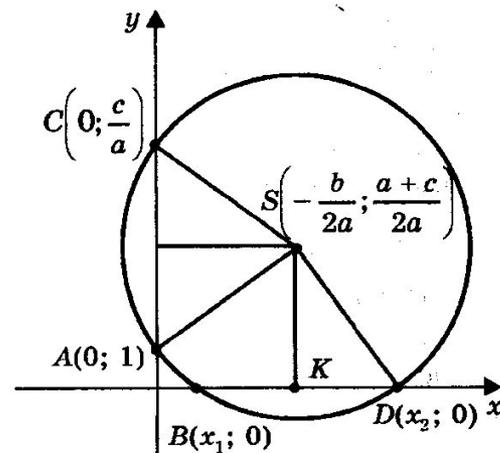


Рис. 5

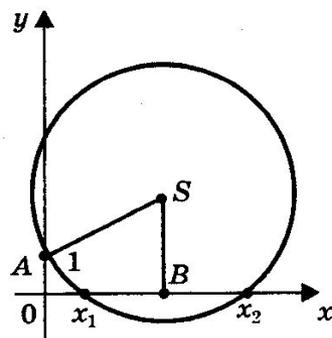
Итак:

- 1) Построим точки $S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{a+c}{2a}\right)$ (центр окружности) и $A(0; 1)$;
- 2) проведем окружность с радиусом SA ;
- 3) абсциссы точек пересечения этой окружности с осью Ox являются корнями исходного квадратного уравнения.

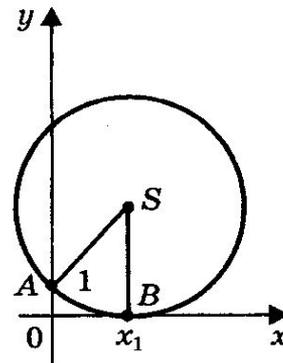
При этом возможны три случая.

- 1) Радиус окружности больше ординаты центра ($AS > SK$, или $R > a + c/2a$), окружность пересекается Ox в двух точках (рис. 6, а) $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.
- 2) Радиус окружности равен ординате центра ($AS = SB$, или $R = a + c/2a$), окружность касается оси Ox (рис. 6, б) в точке $B(x_1; 0)$, где x_1 - корень квадратного уравнения.
- 3) Радиус окружности меньше ординаты центра ($AS < SB$, или $R < \frac{a+c}{2a}$).

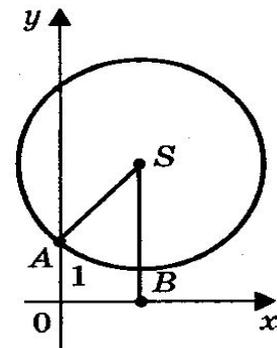
окружность не имеет общих точек с осью абсцисс (рис. 6, в), в этом случае уравнение не имеет решения.



а)



б)



в)

Рис. 6

а) $AS > SB, R > \frac{a+c}{2a}$. б) $AS = SB, R = \frac{a+c}{2a}$. в) $AS < SB, R < \frac{a+c}{2a}$.
 Два решения x_1 и x_2 . Одно решение x_1 . Нет решения.

• **Пример:**

Решим уравнение

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

(рис. 7).

Решение. Определим координаты точки центра окружности по формулам:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1,$$

$$y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1-3}{2 \cdot 1} = -1.$$

Проведем окружность радиуса SA , где $A(0; 1)$.

Ответ: $x_1 = -1; x_2 = 3$.

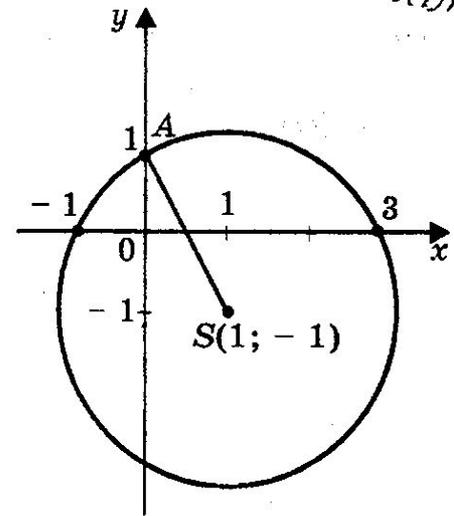


Рис. 7

Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

$$z^2 + pz + q = 0.$$

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам (рис.11):

$$OB = \frac{a}{1+z}, AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$
Из подобия треугольников CAH
и CDF

получим пропорцию

$$\frac{p - q}{p - AB} = \frac{a}{OB}, \text{ откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнение } z^2 + pz + q = 0$$

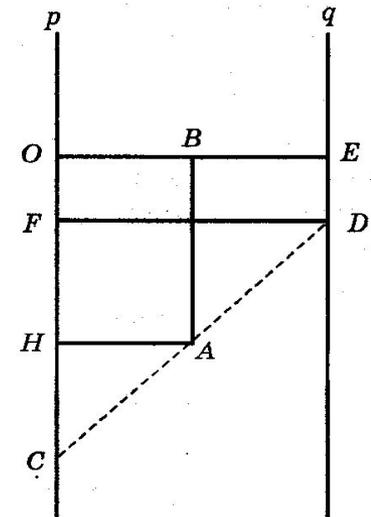


Рис. 11

Примеры.

1) Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$
номограмма дает корни $z_1 = 8,0$ и $z_2 = 1,0$ (рис.12).

2) Решим с помощью номограммы
уравнение
 $2z^2 - 9z + 2 = 0$.

Разделим коэффициенты этого
уравнения на 2,
получим уравнение
 $z^2 - 4,5z + 1 = 0$.

Номограмма дает корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0,5$.

3) Для уравнения
 $z^2 - 25z + 66 = 0$

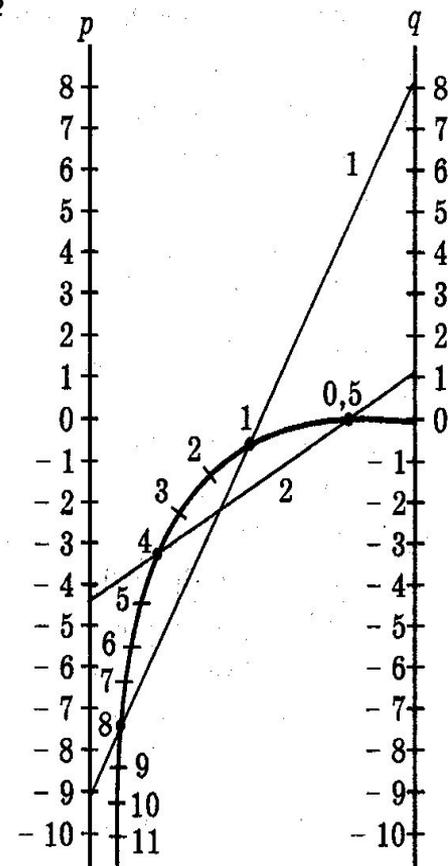
коэффициенты p и q выходят за
пределы шкалы, выполним
подстановку $z = 5t$,
получим уравнение

$$t^2 - 5t + 2,64 = 0,$$

которое решаем посредством
номограммы и получим $t_1 = 0,6$ и

$$t_2 = 4,4, \text{ откуда}$$

$$z_1 = 5t_1 = 3,0 \text{ и } z_2 = 5t_2 = 22,0.$$



Геометрический способ решения квадратных уравнений.

Площадь S квадрата $ABCD$ можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата $= 39^2$, четырех прямоугольников $(4 \cdot 2,5x)$ и следующего образом: «Квадрат и десять корней равны 39 » (рис.15).

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной x , заменяя сторонах строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна $2,5$, следовательно, площадь каждого равна $2,5x$. Откуда следует, что сторона квадрата $ABCD$, отрезанная в углах четыре равных квадрата, сторона каждого из них $2,5$, а площадь $0,25$.

Для искомой стороны x первоначального квадрата получим

$$x = 39 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

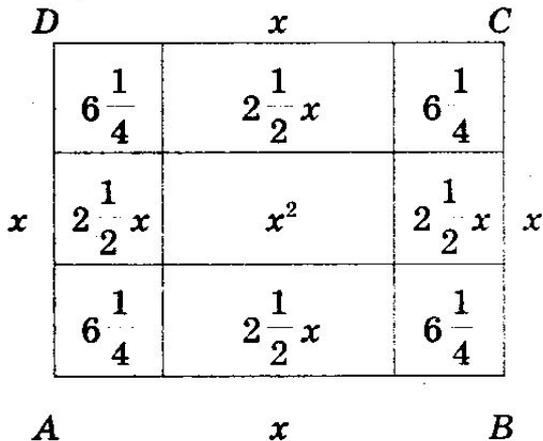


Рис. 15



2. Решить геометрически уравнение $y^2 - 6y - 16 = 0$.

Преобразуя уравнение, получаем

$$y^2 - 6y = 16.$$

На рис. 17 находим «изображения» выражения $y^2 - 6y$, т.е. из площади квадрата со стороной y два раза вычитается площадь квадрата со стороной, равной 3. Значит, если к выражению $y^2 - 6y$ прибавить 9, то получим площадь квадрата со стороной $y - 3$. Заменяя выражение $y^2 - 6y$ равным ему числом 16, получаем: $(y - 3)^2 = 16 + 9$, т.е. $y - 3 = \pm \sqrt{25}$, или $y - 3 = \pm 5$, где $y_1 = 8$ и $y_2 = -2$.

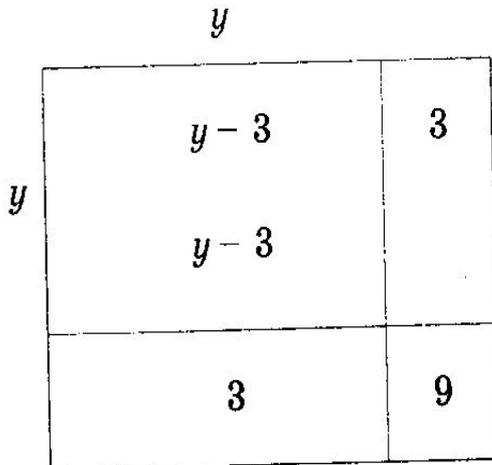
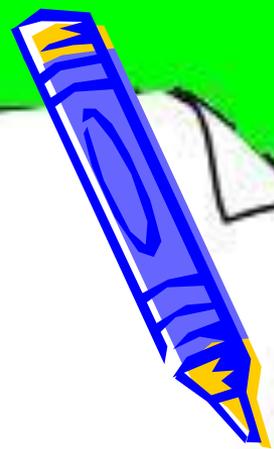


Рис. 17

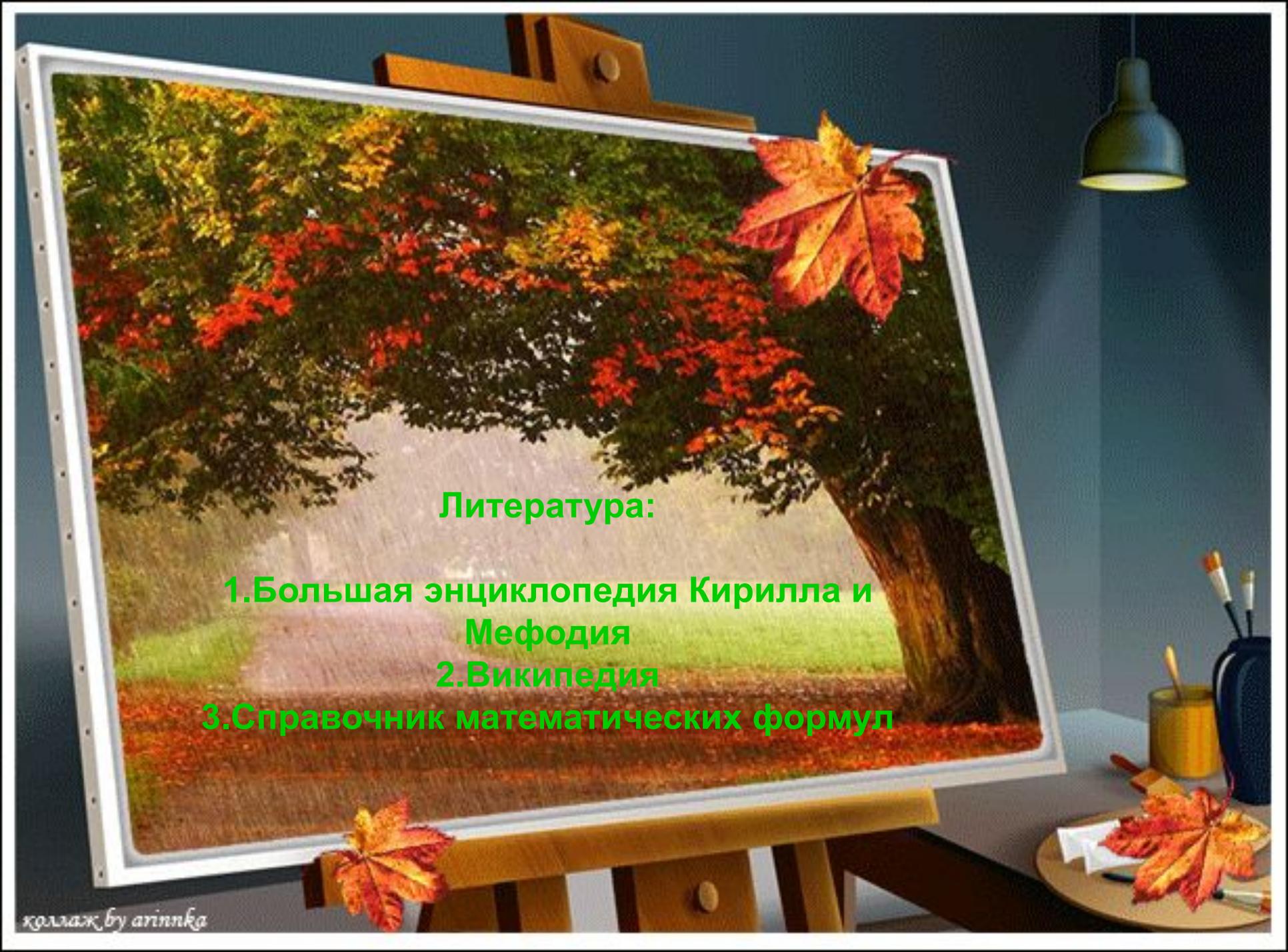
Вывод

В ходе работы я познакомилась с историей возникновения квадратных уравнений, повторила теорему Виета и её доказательство.

Узнала интересные способы решения квадратных уравнений.

Я уверена, что математические знания, в частности по данной теме, помогут мне при поступлении в ВУз.





Литература:

1. Большая энциклопедия Кирилла и Мефодия
2. Википедия
3. Справочник математических формул