

ГОУ ДПО СарИПКиПРО
региональный конкурс
«Математика в моей жизни - 2009»

"В мире квадратных уравнений"

*Выполнила: Шатилова Виктория
Ученица 9 «А» класса
МОУ «СОШ р.п. Красный Текстильщик
Саратовского района Саратовской области»
Руководитель: Свириденко О.В.*

2009 г



Оглавление

- *Введение*
- *Заметки
прошлого*
- *Основные
понятия*
- *Теорема Виета*
- *Способы решения
квадратного
уравнения*

Введение

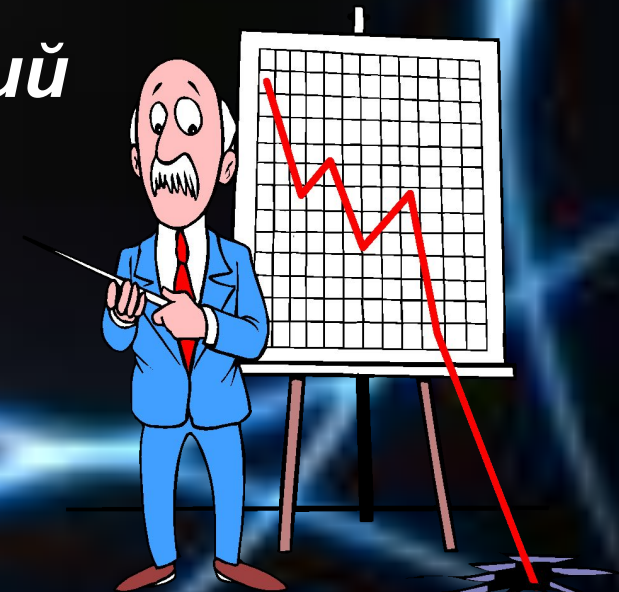
Математика — основа точных наук. На первый взгляд кажется, что она не имеет никакого отношения к природе, но на самом деле это не так. Без неё невозможно построить корабль и самолет, автомобили и метрополитены, даже строительство домов требует точности. Любовь к точным наукам развивает умение логически мыслить, анализировать, смотреть на вещи другими глазами и давать точное определение.

Я согласна с высказыванием английского физиолога Андру Филлинг Хаксли «Математика похожа на мельницу: если вы засыпете в нее зерна пшеницы, то получите муку, если же засыпете отруби, отруби и получите», поэтому я пытаюсь с большим старанием и желанием учить алгебру, геометрию и физику. Но больше всего я люблю решать квадратные уравнения. Знания в этой области мне даются легко.

**Цель работы: рассмотреть
неизвестные способы решения
квадратных уравнений**

Задачи:

- ✓ **познакомиться с историей
возникновения квадратных уравнений**
- ✓ **повторить теорему Виета и её
доказательство**
- ✓ **узнать и понять незнакомые
решения квадратных уравнений**



«Уравнение есть равенство, которое еще не является истинным, но которое стремятся сделать истинным, не будучи уверенными, что этого можно достичь.»

Фуше А.

«Процесс " решения" уравнения есть просто акт приведения его к возможно более простой форме. В какой бы форме уравнение ни было написано, его информационный характер остается тот же.»

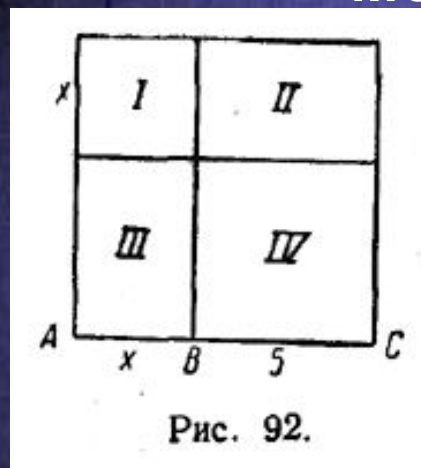
Лодж О.



Заметки прошлого

Многие математики древности решали квадратные уравнения геометрическим способом. Например, для решения уравнения $x^2 + 10x = 39$ поступали

следующим образом. Пусть $AB = x$, $BC = 5$



Методы решения квадратных уравнений были известны еще в древние времена. Они часто встречаются в примерах, в виде задач, в летописях времен царя Хаммурапи (XX в. до н. э.), в трудах древнегреческого математика Евклида (III в. до н. э.), в еврейских и арабских источниках.

В результате получится 64 — площадь всего квадрата. Но эта же площадь равна $(x + 5)^2$, так как $AC = x + 5$. Следовательно,

получим уравнение $(x + 5)^2 = 64$. Решив его, найдем $x = 3$.

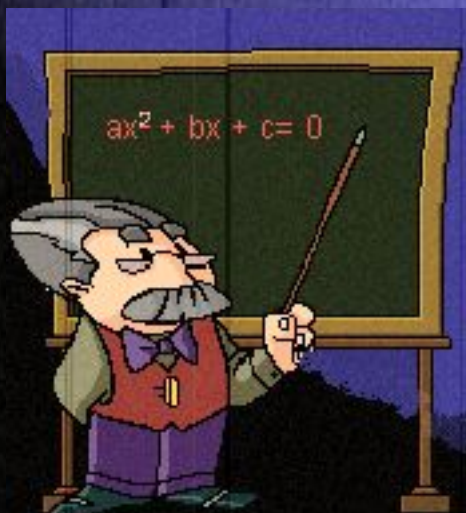
В результате получится 64 —

площадь всего квадрата. Но эта же площадь равна $(x + 5)^2$, так как $AC = x + 5$. Следовательно,

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$x + 5 = 8,$$

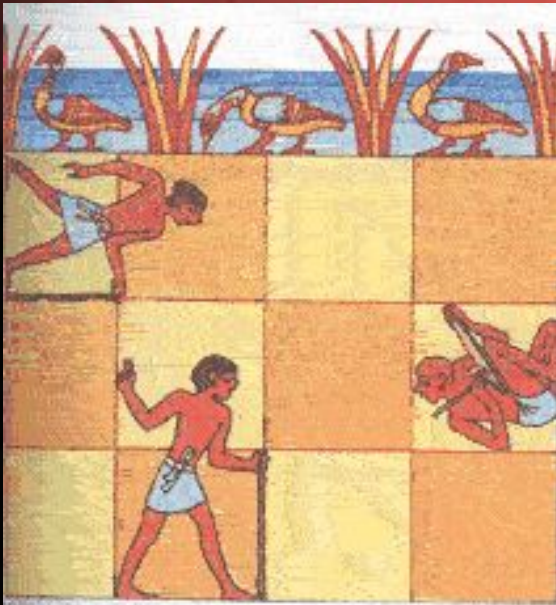
$$x = 3.$$



Древний Египет

Впервые квадратное уравнение сумели решить математики древнего Египта.

В одном из папирусов есть задача:
«Найти площадь прямоугольного поля, если площадь 12, а $\frac{3}{4}$ длины равны ширине.»

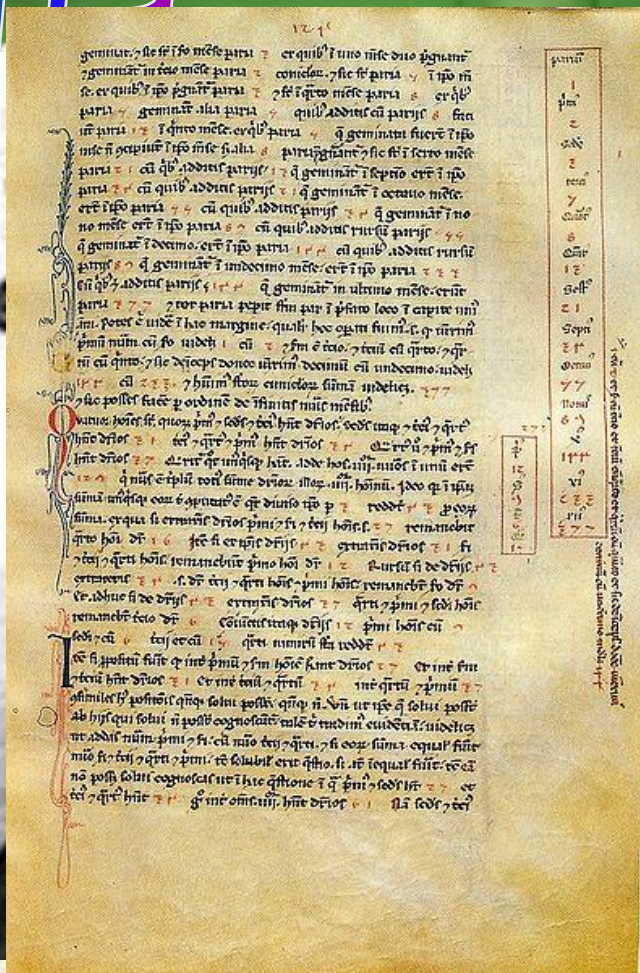


Пусть x - длина поля. Тогда $\frac{3x}{4}$ - его ширина, $S = \frac{3x^2}{4}$ - площадь. Получилось квадратное уравнение $\frac{3x^2}{4} = 12$

В папирусе дано правило: "Разделить 12 на $\frac{3}{4}$ ".
 $12 : \frac{3}{4} = 12 \cdot \frac{4}{3} = 16$. Итак, $x^2 = 16$.
"Длина поля равна 4" - указано в папирусе.

Прошли тысячелетия, и сейчас мы получим два решения уравнения: -4 и 4. Но в египетской задаче и мы приняли бы $x = 4$, т.к. длина поля может быть только положительной величиной.

Европа



Леонардо Фибоначчи
абака

ых уравнений по
ед ал – Харезми -
ематик, астроном
сической алгебры)
жены в "Книге
ду итальянским
оначчи(Пизанский
первый крупный
вропы. Автор
о некоторые
еры решения задач
к введению

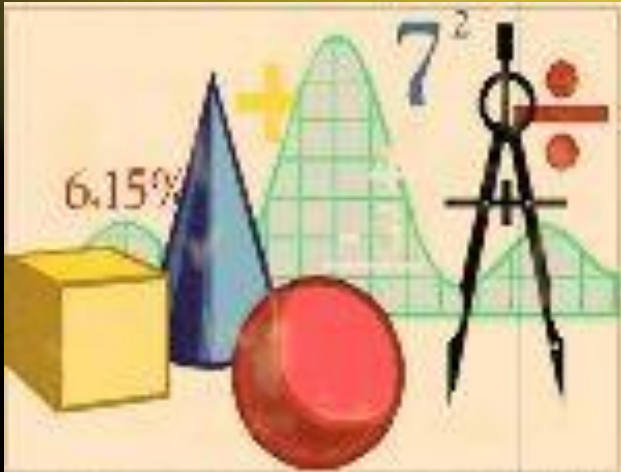


Европа

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду

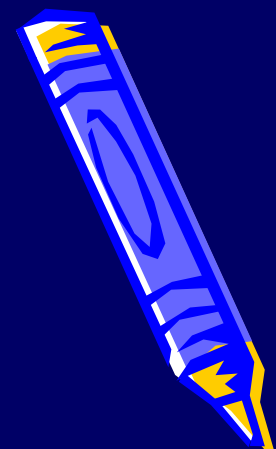
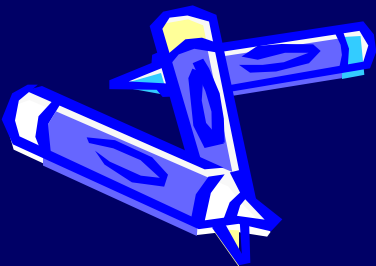
$$x^2 + bx = c$$

при возможных комбинациях знаков коэффициентов b , c , было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М. Штифелем (около 1487 — 19 апреля 1567) — немецкий математик.

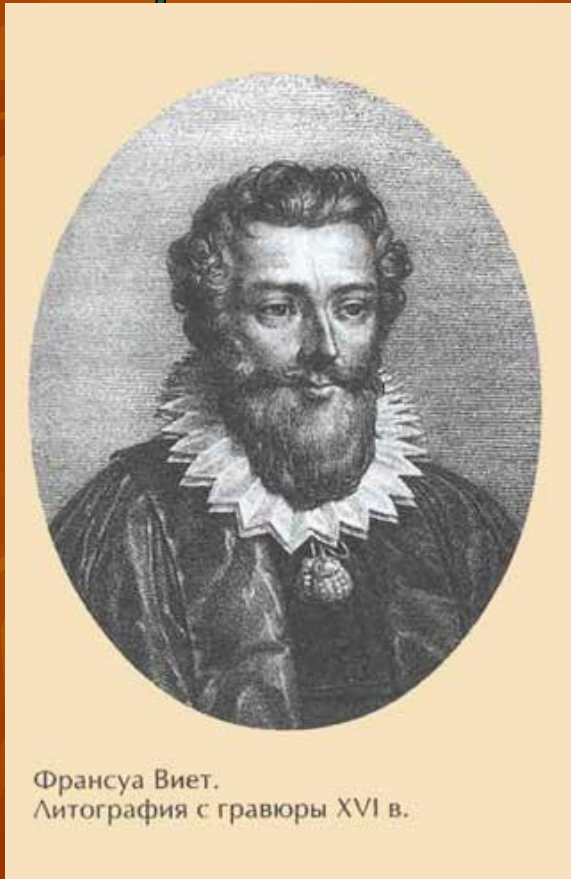


ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Квадратное уравнение- это уравнение вида $ax^2+bx+c=0$ где, a, b, c - действительные числа, причем a не равно 0. Если $a = 1$, то квадратное уравнение называют **приведенным**; если a не равно 1, - то **неприведенным**. Числа a, b, c носят следующие названия a - первый коэффициент, b - второй коэффициент, c - свободный член.



Теорема Виета



Франсуа Виет.
Литография с гравюры XVI в.

«Виет (1540-1603) сделал решающий шаг, введя символику во все алгебраические доказательства путем применения буквенных обозначений для выражения как неизвестных, так и известных величин. Не только в алгебре, но также и в тригонометрии. В частности, он работал с коэффициентами уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и доказал, что сумма корней равна $-\frac{b}{a}$, а произведение равно $\frac{c}{a}$. Это открытие стало известно в Европе благодаря работам Симона Стевина, который в 1571 году опубликовал в своем трактате «De Vieta» результаты Виета. Однако Виет не был первым, кто открыл эти закономерности. Именно тогда он начал использовать слово «сумма корней квадратного уравнения», которое он назвал «произведением квадратного уравнения». Он не признавал отрицательных чисел, поэтому при решении уравнений рассматривал только положительные корни. Однако в то время произведение свободному члену.

Доказательство теоремы Виета

Пусть x_1 и x_2 – различные корни квадратного трехчлена $x^2 + px + q$.

Теорема Виета утверждает, что имеют место следующие соотношения:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = q$$

Для доказательства подставим каждый из корней в выражение для квадратного трехчлена. Получим два верных числовых равенства:

$$x_1^2 + px_1 + q = 0$$

$$x_2^2 + px_2 + q = 0$$

Вычтем эти равенства друг из друга. Получим

$$x_1^2 - x_2^2 + p(x_1 - x_2) = 0$$

Разложим разность квадратов и одновременно перенесем второе слагаемое в правую часть:

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = -p(x_1 - x_2)$$



Так как по условию корни x_1 и x_2 различны, то $x_1 - x_2$ не равна 0 и мы можем сократить равенство на $x_1 - x_2$. Получим первое равенство теоремы:

$$x_1 + x_2 = -p$$

Для доказательства второго подставим в одно из написанных выше равенств (например, в первое) вместо коэффициента p , равное ему

число $-(x_1 + x_2)$:

$$x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + q = 0$$

Преобразуя левую часть, получаем:

$$x_1^2 - x_1^2 - x_2 x_1 + q = 0$$

$x_1 x_2 = q$, что и требовалось доказать.





Способы решения

квадратных

уравнений



? ? ?

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

Центр окружности находится в точке пересечения перпендикуляров SF и SK .
 Допустим, что искомая окружность пересекает ось OX в точках B и D .
 Пусть $A(0; 1)$ — точка на оси OY , где $OA = 1$.
 Тогда $OC = OB \cdot OD / OA = x_1 x_2 / 1 = c/a$.

абсцисс в точках $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 —

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}$$

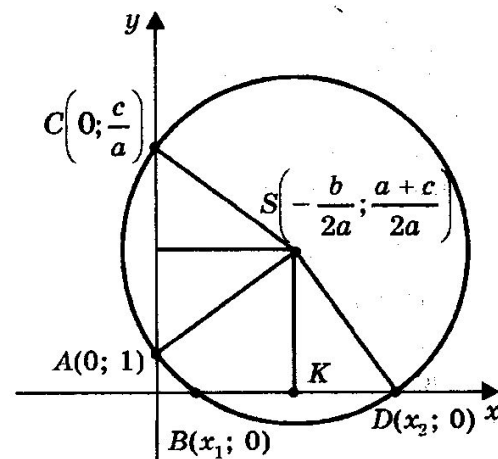


Рис. 5

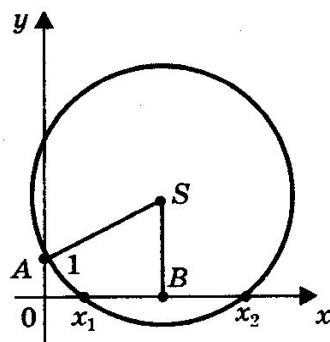
Итак:

- 1) Построим точки $S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{a+c}{2a}\right)$ (центр окружности) и $A(0; 1)$;
- 2) проведем окружность с радиусом SA ;
- 3) абсциссы точек пересечения этой окружности с осью Ox являются корнями исходного квадратного уравнения.

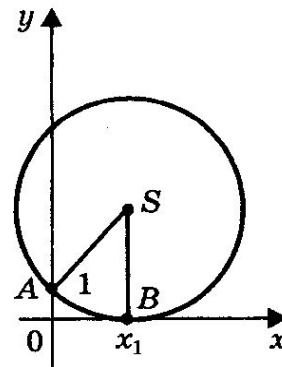
При этом возможны три случая.

- 1) Радиус окружности больше ординаты центра ($AS > SK$, или $R > a + c/2a$), окружность пересекается Ox в двух точках (рис. 6, а) $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.
- 2) Радиус окружности равен ординате центра ($AS = SB$, или $R = a + c/2a$), окружность касается оси Ox (рис. 6, б) в точке $B(x_1; 0)$, где x_1 - корень квадратного уравнения.
- 3) Радиус окружности меньше ординаты центра ($AS < SB$, или $R < \frac{a+c}{2a}$).

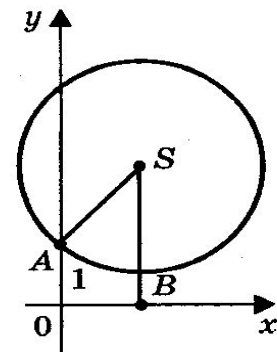
окружность не имеет общих точек с осью абсцисс (рис. 6, в), в этом случае уравнение не имеет решения.



а)



б)



в)

Рис. 6

а) $AS > SB, R > \frac{a+c}{2a}$. б) $AS = SB, R = \frac{a+c}{2a}$. в) $AS < SB, R < \frac{a+c}{2a}$.
 Два решения x_1 и x_2 . Одно решение x_1 . Нет решения.

• **Пример:**

Решим уравнение

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

(рис. 7).

Решение. Определим координаты точки центра окружности по формулам:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1,$$

$$y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1-3}{2 \cdot 1} = -1.$$

Проведем окружность радиуса SA , где $A(0; 1)$.

Ответ: $x_1 = -1; x_2 = 3$.

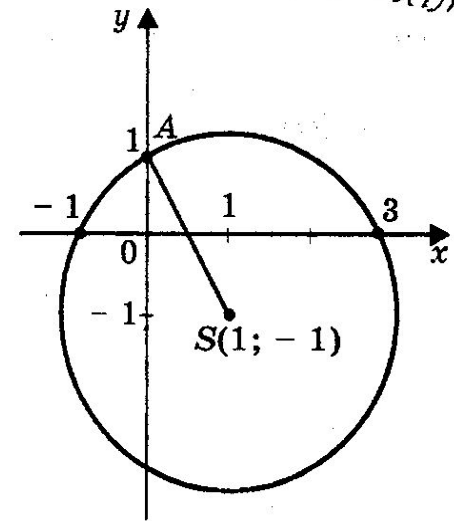


Рис. 7

Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

$$z^2 + pz + q = 0.$$

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам (рис.11):

$$OB = \frac{a}{1+z}, AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$
Из подобия треугольников CAH
и CDF

получим пропорцию

$$\frac{p - q}{p - AB} = \frac{a}{OB},$$

откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнение

$$z^2 + pz + q = 0$$

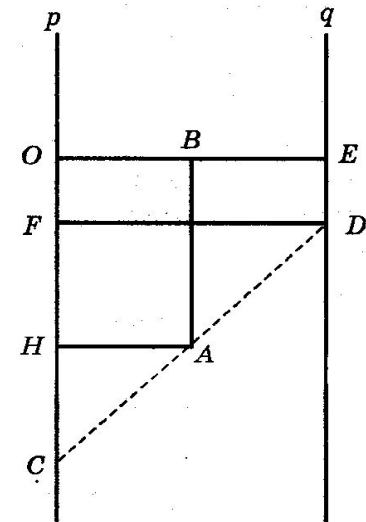


Рис. 11

Примеры.

1) Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$
номограмма дает корни $z_1 = 8,0$ и $z_2 = 1,0$ (рис.12).

2) Решим с помощью номограммы
уравнение
 $2z^2 - 9z + 2 = 0$.

Разделим коэффициенты этого
уравнения на 2,
получим уравнение
 $z^2 - 4,5z + 1 = 0$.

Номограмма дает корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0,5$.

3) Для уравнения
 $z^2 - 25z + 66 = 0$

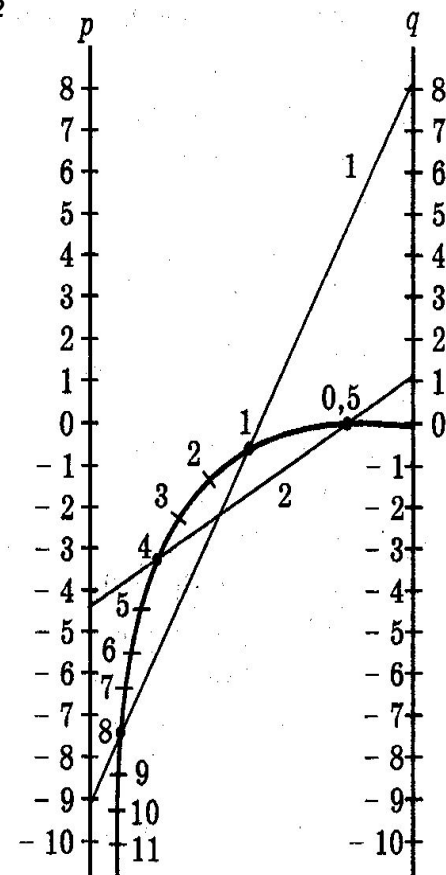
коэффициенты p и q выходят за
пределы шкалы, выполним
подстановку $z = 5t$,
получим уравнение

$$t^2 - 5t + 2,64 = 0,$$

которое решаем посредством
номограммы и получим $t_1 = 0,6$ и

$$t_2 = 4,4, \text{ откуда}$$

$$z_1 = 5t_1 = 3,0 \text{ и } z_2 = 5t_2 = 22,0.$$



Геометрический способ решения квадратных уравнений.

Площадь S квадрата $ABCD$ можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата $= 39^2$, четырех прямоугольников $(4 \cdot 2,5x)$ и следующего образом: «Квадрат и десять корней равны 39 » (рис.15).

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной x , заменяя сторонах строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна $2,5$, следовательно, площадь каждого равна $2,5x$, откуда следует, что сторона квадрата $ABCD$, отрезанная в углах четыре равных квадрата, сторона каждого из них $2,5$, а площадь $0,25$.

Для искомой стороны x первоначального квадрата получим

$$x = 39 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

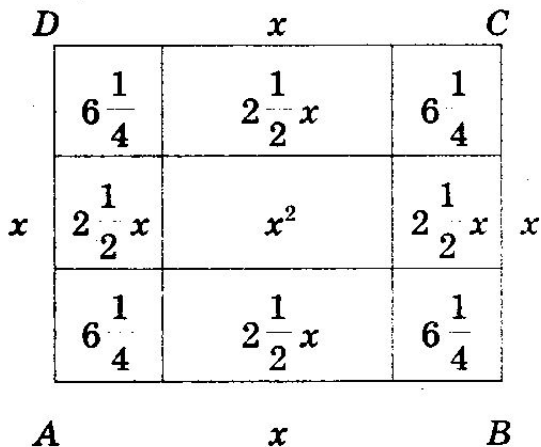


Рис. 15



2. Решить геометрически уравнение $y^2 - 6y - 16 = 0$.

Преобразуя уравнение, получаем

$$y^2 - 6y = 16.$$

На рис. 17 находим «изображения» выражения $y^2 - 6y$, т.е. из площади квадрата со стороной y два раза вычитается площадь квадрата со стороной, равной 3. Значит, если к выражению $y^2 - 6y$ прибавить 9, то получим площадь квадрата со стороной $y - 3$. Заменяя выражение $y^2 - 6y$ равным ему числом 16, получаем: $(y - 3)^2 = 16 + 9$, т.е. $y - 3 = \pm \sqrt{25}$, или $y - 3 = \pm 5$, где $y_1 = 8$ и $y_2 = -2$.

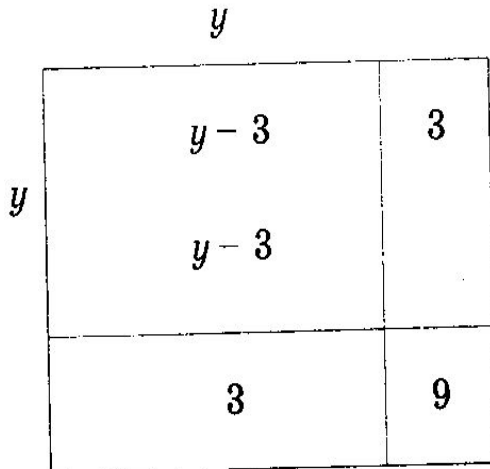
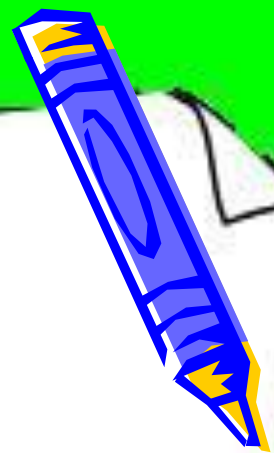


Рис. 17

Вывод

В ходе работы я познакомилась с историей возникновения квадратных уравнений, повторила теорему Виета и её доказательство.

Узнала интересные способы решения квадратных уравнений.

Я уверена, что математические знания, в частности по данной теме, помогут мне при поступлении в ВУз.





Литература:

1. Большая энциклопедия Кирилла и Мефодия
2. Википедия
3. Справочник математических формул