ГОУ ДПО СарИПКиПРО
региональный конкурс
«Математика в моей жизни - 2009»

"В мире квадратных уравнений"

Выполнила: Шатилова Виктория
Ученица 9 «А» класса
МОУ «СОШ р.п. Красный Текстильщик
Саратовского района Саратовской области»
Руководитель: Свириденко О.В.

2009 г

Оглавление

Введение

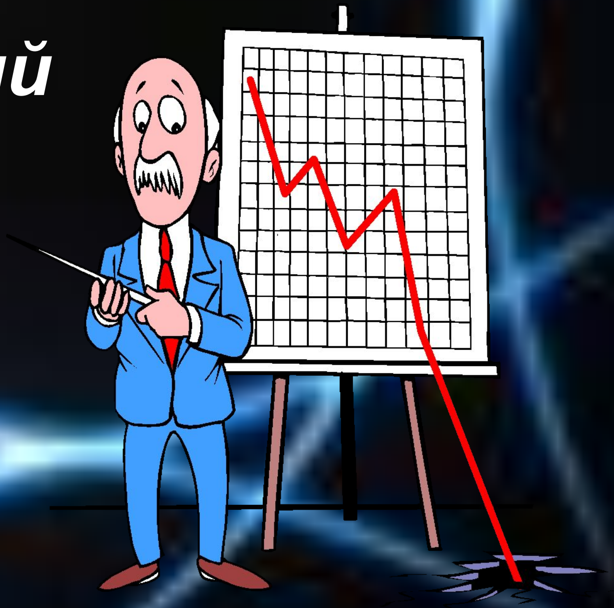
Математика — основа точных наук. На первый взгляд кажется, что она не имеет никакого отношения к природе, но на самом деле это не так. Без неё невозможно построить корабль и самолет, автомобили и метрополитены, даже строительство домов требует точности. Любовь к точным наукам развивает умение логически мыслить, анализировать, смотреть на вещи другими глазами и давать точное определение.

Я согласна с высказыванием английского физиолога Андру Филлинг Хаксли «Математика похожа на мельницу: если вы засыпете в нее зерна пшеницы, то получите муку, если же засыпете отруби, отруби и получите», поэтому я пытаюсь с большим старанием и желанием учить алгебру, геометрию и физику. Но больше всего я люблю решать квадратные уравнения. Знания в этой области мне даются легко.

Цель работы: рассмотреть неизвестные способы решения квадратных уравнений

Задачи:

- ✔ познакомиться с историей возникновения квадратных уравнений
- ✔ повторить теорему Виета и её доказательство
- ✔ узнать и понять незнакомые решения квадратных уравнений



«Уравнение есть равенство, которое еще не является истинным, но которое стремятся сделать истинным, не будучи уверенными, что этого можно достичь.»

Фуше А.

«Процесс " решения" уравнения есть просто акт приведения его к возможно более простой форме. В какой бы форме уравнение ни было написано, его информационный характер остается тот же.»

Лодж О.

Заметки прошлого

Методы решения квадратных уравнений были известны еще в древние времена. Они излагаются, например, в вавилонских рукописях времен царя Хаммурапи (XX в. до н. э.), в трудах древнегреческого математика Евклида (III в. до н. э.), древних китайских и японских трактатах.

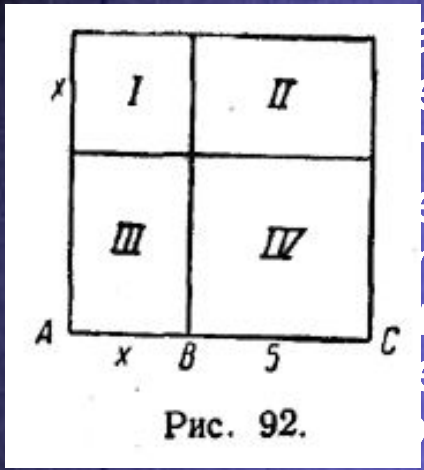


Рис. 92.

Многие математики древности решали квадратные уравнения геометрическим способом. Например, для решения уравнения $x^2 + 10x = 39$ поступали следующим образом. Пусть $AB = x$, $BC = 5$ ($= 10 : 2$). На стороне $AC = AB + BC$ строился квадрат, который разбивался на четыре части, как показано на рисунке 92. Очевидно, что сумма площадей I, II и III частей равна $x^2 + 10x$, или 39.

Если к этой площади прибавить площадь IV части, то в результате получится 64 — площадь всего квадрата. Но эта же площадь равна $(x + 5)^2$, так как $AC = x + 5$. Следовательно,

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$x + 5 = 8,$$

$$x = 3.$$

Древний Египет

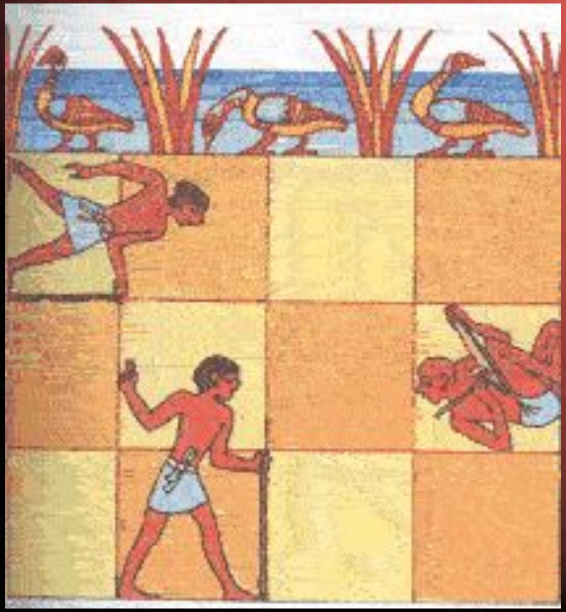
Впервые квадратное уравнение сумели решить математики древнего Египта.

В одном из папирусов есть задача: «Найти площадь прямоугольного поля, если площадь 12, а 3/4длины равны ширине.»

Пусть x - длина поля. Тогда 3x/4 - его ширина, $S=3x^2/4$ - площадь. Получилось квадратное уравнение

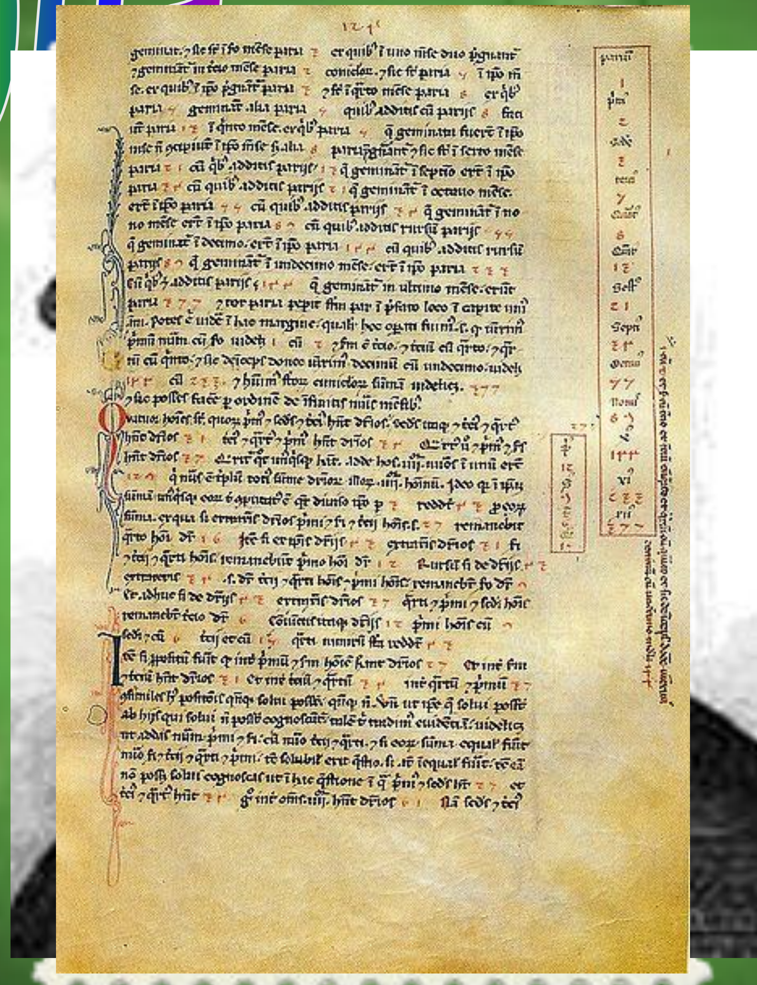
$3x^2/4=12$

В папирусе дано правило:" Разделить 12 на 3/4". 12:3/4=12 4/3=16. Итак, $x^2=16$. "Длина поля равна 4" - указано в папирусе.



Прошли тысячелетия, и сейчас мы получим два решения уравнения: -4 и 4.Но в египетской задаче и мы приняли бы x=4,т.к. длина поля может быть только положительной величиной.

Европа



...ых уравнений по
...ед ал – Харезми -
...ематик, астроном
...сической алгебры)
...жены в "Книге
...ду итальянским
...оначчи(Пизанский
... первый крупный
...вропы. Автор
...о некоторые
...еры решения задач
...к введению

Леонардо Фибоначчи

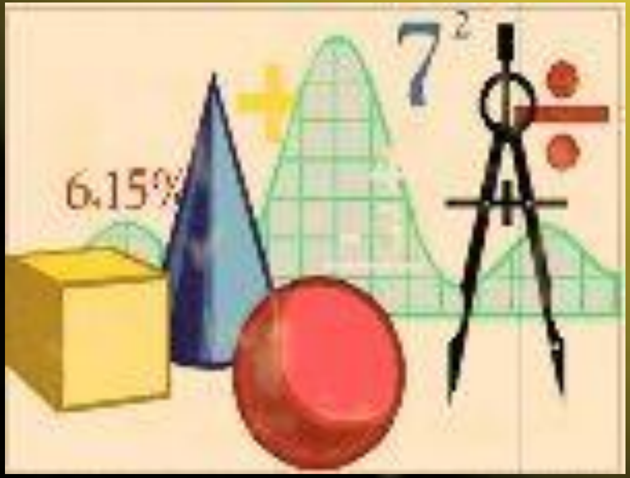
абака

Европа

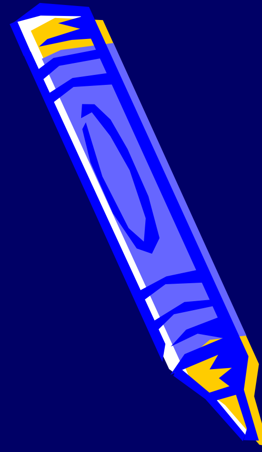
Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду

$$x^2 + bx = c$$

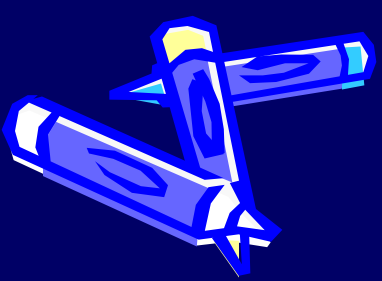
при возможных комбинациях знаков коэффициентов b , c , было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М. Штифелем (около 1487 — 19 апреля 1567) — немецкий математик .



Основные понятия



Квадратное уравнение- это уравнение вида **$ax^2+bx+c=0$** где, **a, b, c** - действительные числа, причем a не равно 0. Если a = 1 , то квадратное уравнение называют **приведенным**; если a не равно 1, - то **неприведенным**. Числа a, b, c носят следующие названия a - первый коэффициент, b - второй коэффициент, c - свободный член.



«Виет (1540-1603) сделал решающий шаг, введя символику во все алгебраические доказательства путем применения буквенных обозначений для выражения как коэффициентов, так и неизвестных величин не только в алгебре, но также и в тригонометрии».

Бернал Д.

Франсуа Виет.
Литография с гравюры XVI в.

Четыре года опалы оказались чрезвычайно плодотворными [illegible] единственной страстью, он работал самозабвенно, просиживая за письменным столом по трое суток подряд, только иногда забываясь сном на несколько минут. Именно тогда он начал большой труд, который назвал "Искусство анализа" [illegible] алгебра". Закончить его не удалось, но главное [illegible] математики Нового времени.

Теорема, выражающая связь между коэффициентами приведённого квадратного уравнения и его корнями, носит имя Виета, была им сформулирована впервые в 1591 году так: сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту p, взятому с противоположным знаком, а произведение — свободному члену.

Доказательство теоремы Виета

Пусть x_1 и x_2 – различные корни квадратного трехчлена $x^2 + px + q$. Теорема Виета утверждает, что имеют место следующие соотношения:

$$x_1 + x_2 = –p$$
$$x_1 x_2 = q$$

Для доказательства подставим каждый из корней в выражение для квадратного трехчлена. Получим два верных числовых равенства:

$$x_1^2 + px_1 + q = 0$$
$$x_2^2 + px_2 + q = 0$$

Вычтем эти равенства друг из друга. Получим

$$x_1^2 – x_2^2 + p\,(x_1 – x_2) = 0$$

Разложим разность квадратов и одновременно перенесем второе слагаемое в правую часть:

$$(x_1 – x_2)\,(x_1 + x_2) = –p\,(x_1 – x_2)$$

Так как по условию корни x_1 и x_2 различны, то $x_1 - x_2$ не равна 0 и мы можем сократить равенство на $x_1 - x_2$. Получим первое равенство теоремы:

$$x_1 + x_2 = -p$$

Для доказательства второго подставим в одно из написанных выше равенств (например, в первое) вместо коэффициента p, равное ему число $-(x_1 + x_2)$:

$$x_1^2 - (x_1 + x_2)\, x_1 + q = 0$$

Преобразуя левую часть, получаем:

$$x_1^2 - x_1^2 - x_2\, x_1 + q = 0$$

$x_1\, x_2 = q$, что и требовалось доказать.

Способы решения квадратных уравнений

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

Центр окружности находится в точке пересечения перпендикуляров SF и SK, восстановленных в серединах хорд AC и BD, поэтому

Допустим, что искомая окружность пересекает ось абсцисс в точках $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 -

циркуля и линейки (рис. 5)

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a},$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

Имеем $OB \cdot OD = OA \cdot OC$, откуда $OC = OB \cdot OD / OA = x_1 x_2 / 1 = c/a$.

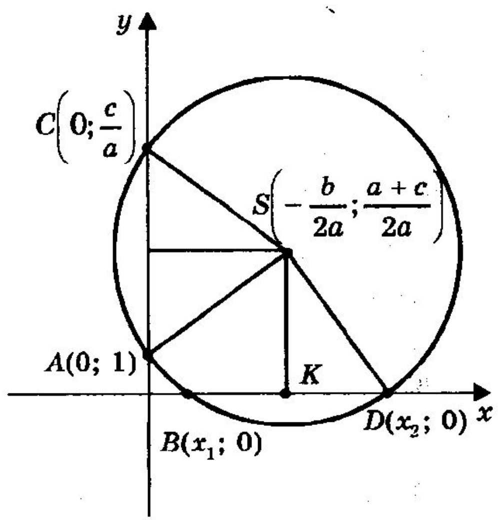


Рис. 5

Итак:

- 1) Построим точки $S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{a+c}{2a}\right)$ (центр окружности) и A(0; 1);
- 2) проведем окружность с радиусом SA;
- 3) абсциссы точек пересечения этой окружности с осью Ох являются корнями исходного квадратного уравнения.

При этом возможны три случая.

1) Радиус окружности больше ординаты центра (AS > SK, или R > a + c/2a), окружность пересекает ось Ох в двух точках (рис. 6,а) $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

2) Радиус окружности равен ординате центра (AS = SB, или R = a + c/2a), окружность касается оси Ох (рис. 6,б) в точке $B(x_1; 0)$, где x_1 – корень квадратного уравнения.

3) Радиус окружности меньше ординаты центра $\left(AS < SB, \text{ или } R < \frac{a+c}{2a}\right)$

окружность не имеет общих точек с осью абсцисс (рис.6,в), в этом случае уравнение не имеет решения.

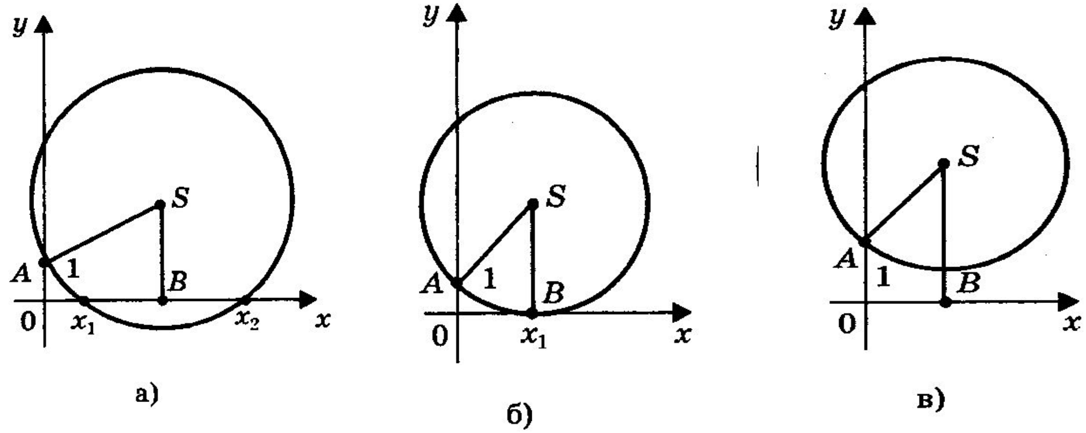


Рис. 6

а) $AS > SB,\ R > \dfrac{a+c}{2a}$. Два решения x_1 и x_2.

б) $AS = SB,\ R = \dfrac{a+c}{2a}$. Одно решение x_1.

в) $AS < SB,\ R < \dfrac{a+c}{2a}$. Нет решения.

- **Пример:**

Решим уравнение
$x^2 - 2x - 3 = 0$
(рис. 7).

Решение. Определим координаты точки центра окружности по формулам:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1,$$

$$y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1-3}{2 \cdot 1} = -1.$$

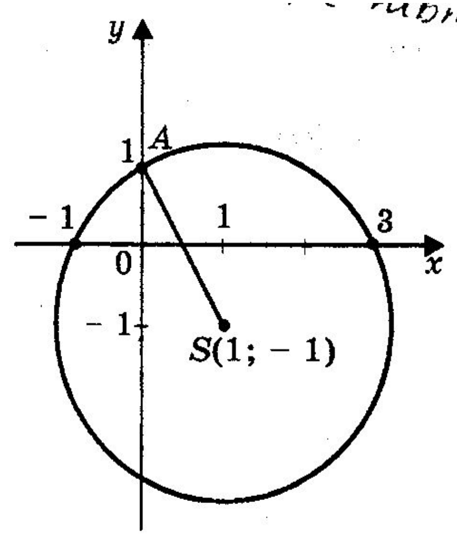


Рис. 7

Проведем окружность радиуса SA, где A (0; 1).

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.

Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

$$z^2 + pz + q = 0.$$

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам (рис.11):

$$OB = \frac{a}{1+z}, \; AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$

Из подобия треугольников CAH и CDF

получим пропорцию

$$\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB},$$

откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнение

$$z^2 + pz + q = 0$$

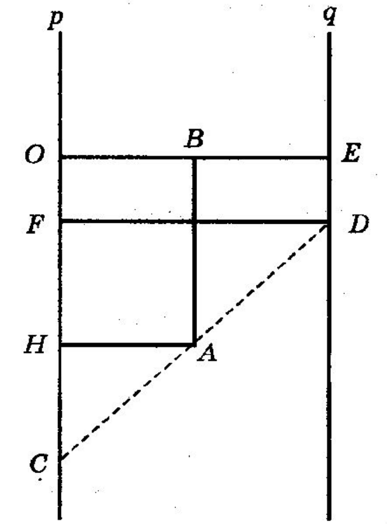


Рис. 11

Примеры.

1) Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$ номограмма дает корни $z_1 = 8{,}0$ и $z_2 = 1{,}0$ (рис.12).

2) Решим с помощью номограммы уравнение

$2z^2 - 9z + 2 = 0.$

Разделим коэффициенты этого уравнения на 2, получим уравнение

$z^2 - 4{,}5z + 1 = 0.$

Номограмма дает корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0{,}5$.

3) Для уравнения

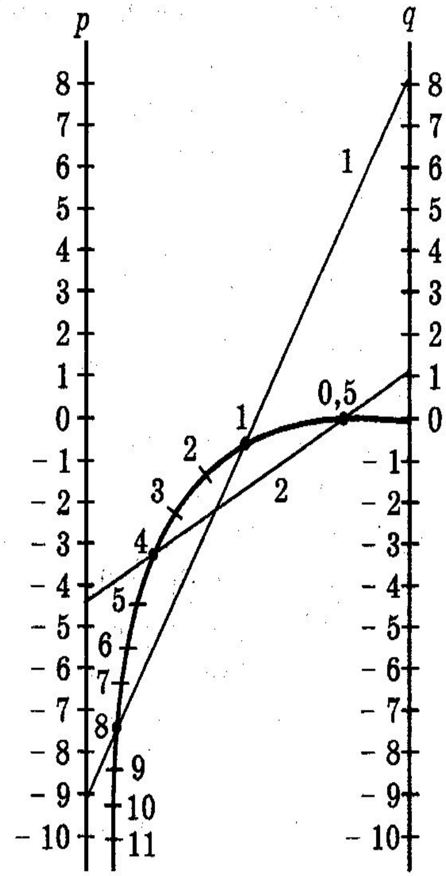
$z^2 - 25z + 66 = 0$

коэффициенты p и q выходят за пределы шкалы, выполним подстановку $z = 5t$, получим уравнение

$t^2 - 5t + 2{,}64 = 0,$

которое решаем посредством номограммы и получим $t_1 = 0{,}6$ и $t_2 = 4{,}4$, откуда

$z_1 = 5t_1 = 3{,}0$ и $z_2 = 5t_2 = 22{,}0.$



Геометрический способ решения квадратных уравнений.

Площадь S квадрата ABCD можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата x^2, четырех прямоугольников ($4 \cdot 2{,}5x = 10x$) и четырех пристроенных квадратов ($6{,}25 \cdot 4 = 25$), т.е. $S = x^2 + 10x + 25$. Заменяя $x^2 + 10x$ числом 39, получим, что $S = 39 + 25 = 64$, откуда следует, что сторона квадрата ABCD, т.е. отрезок $AB = 8$. Для искомой стороны x первоначального квадрата получим

$$x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3.$$

Примеры.

1) Решим уравнение $x^2 + 10x = 39$.

В оригинале эта задача формулируется следующим образом : «Квадрат и десять корней равны 39» (рис.15).

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной x, на его сторонах строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна 2,5, следовательно, площадь каждого равна $2{,}5x$. Полученную фигуру дополняют затем до нового квадрата ABCD, достраивая в углах четыре равных квадрата , сторона каждого их них 2,5, а площадь 6,25.

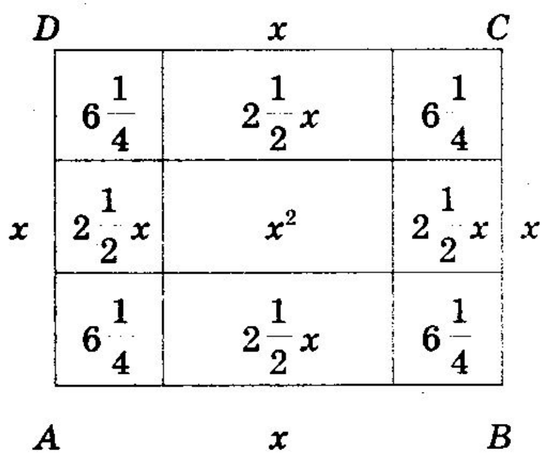


Рис. 15

2.Решить геометрически уравнение $y^2 - 6y - 16 = 0.$

Преобразуя уравнение, получаем

$y^2 - 6y = 16.$

На рис. 17 находим «изображения» выражения $y^2 - 6y$, т.е. из площади квадрата со стороной y два раза вычитается площадь квадрата со стороной, равной 3. Значит, если к выражению $y^2 - 6y$ прибавить 9, то получим площадь квадрата со стороной $y - 3$. Заменяя выражение $y^2 - 6y$ равным ему числом 16, получаем: $(y - 3)^2 = 16 + 9$, т.е.

$y - 3 = \pm\sqrt{25}$, или $y - 3 = \pm 5$, где

$y_1 = 8$ и $y_2 = -2$.

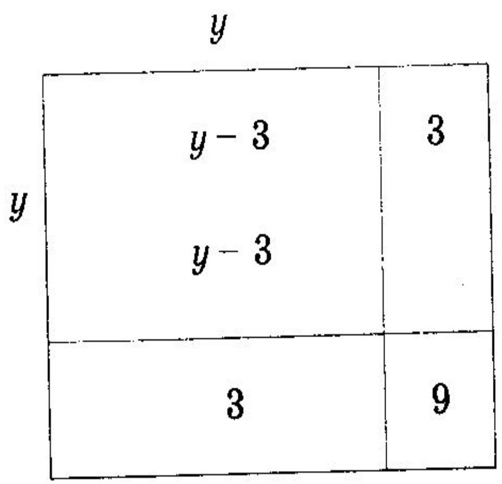


Рис. 17

Вывод

В ходе работы я познакомилась с историей возникновения квадратных уравнений, повторила теорему Виета и её доказательство.

Узнала интересные способы решения квадратных уравнений.

Я уверена, что математические знания, в частности по данной теме, помогут мне при поступлении в ВУз.

Литература:

1.Большая энциклопедия Кирилла и Мефодия
2.Википедия
3.Справочник математических формул

коллаж by arinnka