

**БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ИММАНУИЛА КАНТА**

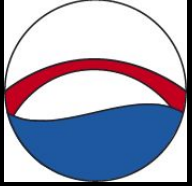
**ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ И ПРИКЛАДНОЙ  
МАТЕМАТИКИ**

**[МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ]**



БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИММАНУИЛА КАНТА

# **ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**



## Функции нескольких

### переменных

#### Пример 1.

#### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 \rightarrow \text{extr.}$$

Необходимое условие экстремума 1-го порядка:

$$f'(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим единственную стационарную точку  $\hat{x} = (1, 0)$ . Матрица вторых производных

$$\left( \frac{\partial^2 f \hat{x}}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

по критерию Сильвестера положительно определена. По достаточному условию локального экстремума функции нескольких переменных точка  $(1, 0) \in \text{locmin } f$ . Поскольку функционал является квадратичным, то  $(1, 0) \in \text{absmin } f$ , а  $S_{\max} = +\infty$ .

Пример 2.

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 \rightarrow \text{extr}$$

Необходимое условие экстремума 1-го порядка:

$$f'(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0; \\ 4x_2^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим стационарные точки:

$$\hat{x}^1 = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1, 1), \quad \hat{x}^2 = (-1, -1), \quad \hat{x}^3 = (0, 0),$$

Для проверки условий 2-го порядка матрицу вторых производных:

$$A = \left( \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 12\hat{x}_1^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12\hat{x}_2^2 - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A|(1,1) = A|(-1,-1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$A|(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Функции нескольких переменных

Матрица  $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$  по критерию Сильвестра положительно определена. По достаточному условию локального экстремума функции нескольких переменных точки  $(1,1)$  и  $(-1,-1)$  доставляют локальный минимум функции  $f$ .

Матрица  $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$  по критерию Сильвестра не является ни положительно, ни отрицательно определенной. Она является неположительно определенной матрицей ( $A \leq 0$ ) и не является неотрицательно определенной матрицей.

Следовательно, не выполняется необходимое условие локального минимума. Поэтому  $\hat{x}^3 = (0,0) \notin \text{locmin } f$ . Поскольку  $f(h, -h) = 2h^4 > 0 = f(\hat{x}^3)$  при малых  $h \neq 0$ , то  $\hat{x}^3 \notin \text{locmax } f$ . Очевидно, что  $S_{\max} = +\infty$ .

# Функции нескольких переменных

## Пример 3.

Найти экстремумы неявно заданной функции двух переменных  $x_3 = f(x_1, x_2)$ , если

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 10 = 0$$

**Решение.** Частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial x_3}{\partial x_1}$  и  $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial x_3}{\partial x_2}$  находим из уравнений:

$$\begin{cases} F_{x_1} := \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0, \\ F_{x_2} := \frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2 + (2x_3 - 4) \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0, \\ 2x_2 - 2 + (2x_3 - 4) \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \quad (*)$$

# Функции нескольких переменных

Необходимое условие экстремума 1-го порядка:

$$\frac{\partial x_3(\hat{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial x_3(\hat{x})}{\partial x_2} = 0 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2\hat{x}_1 - 2 = 0, \\ 2\hat{x}_2 + 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{x}_1 = 1, \\ \hat{x}_2 = -1. \end{cases}$$

Подставляя найденную точку  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1, -1)$  в заданное уравнение  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ , находим две стационарные точки

$$\hat{x}^1 = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (1, -1, -2) \text{ и } \hat{x}^2 = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (1, -1, 6)$$

## Функции нескольких переменных

Для проверки условий 2-го порядка надо выписать матрицу вторых производных в каждой стационарной точке. Дифференцируя первое уравнение правой части системы уравнений (\*) по  $x_1, x_2$  с учётом

условий  $\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0$ , имеем

$$2 + (2x_3 - 4) \frac{\partial^2 x_3}{\partial^2 x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 x_3}{\partial^2 x_1} \Big|_{\hat{X}^1} = \frac{1}{4}, \frac{\partial^2 x_3}{\partial^2 x_1} \Big|_{\hat{X}^2} = -\frac{1}{4}$$

$$(2x_3 - 4) \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{\hat{X}^1} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{\hat{X}^2} = 0$$

Аналогию, дифференцируя второе уравнение правой части системы (\*) по  $x_1, x_2$ , получим

$$2 + (2x_3 - 4) \frac{\partial^2 x_3}{\partial^2 x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{\hat{X}^1} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{\hat{X}^2} = -\frac{1}{4}.$$



## Функции нескольких переменных

Очевидно, что  $\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2}$ . Таким образом,

$$A = \left( \frac{\partial^2 \hat{x}_3}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^2 \Rightarrow A|_{\hat{x}^1} = \begin{pmatrix} 1\sqrt{4} & 0 \\ 0 & 1\sqrt{4} \end{pmatrix}, A|_{\hat{x}^2} = \begin{pmatrix} -1\sqrt{4} & 0 \\ 0 & -1\sqrt{4} \end{pmatrix}.$$

Матрица  $A|_{\hat{x}^1}$  по критерию Сильвестра является положительно определенной, а матрица  $A|_{\hat{x}^2}$  отрицательно определенной.

Поэтому по достаточному условию второго порядка  $S_{locmin} = -2$ ,  $S_{locmin} = 6$ . Можно показать, что это будет не только локальные экстремумы, но и глобальные.

Приведем несколько примеров различных свойств экстремумов в задаче без ограничений.

# Функции нескольких переменных

## Пример 4.

Абсолютные минимумы и максимумы достигаются в бесконечном числе точек:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \sin x$$

## Пример 5.

Функция ограничена, абсолютные максимум достигается, минимум – нет:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

## Пример 6.

Функция ограничена, но абсолютные максимум и минимум не достигаются:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \operatorname{arctg} x$$

# Функции нескольких переменных

## Пример 7.

Функция ограничена, имеет стационарные точки, но абсолютные максимум и минимум не достигаются:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = (\operatorname{arctg} x)^3$$

## Пример 8.

Функция ограничена, имеет локальные максимумы и минимумы, но абсолютные максимум и минимум не достигаются:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \operatorname{arctg} x \sin x$$

## Пример 9.

Ограничение функции, заданной на плоскости, на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет в нуле локальный минимум, но вместе с тем начало координат не является точкой локального минимума:

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - 3x_2^2).$$

## Функции нескольких переменных

Действительно, на любой прямой  $x_1 = ax_2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , функция вида  $f(ax_2, x_2) = (ax_2 - x_2^2)(x_1 - 3x_2^2) = x_2^2(a - x_2)(a - 3x_2) = x_2^2(a^2 - 4ax_2 + 3x_2^2) \geq 0 = f(0)$  при малых  $x_2$ .

Значит, на любой прямой вида  $x_1 = ax_2$  функции  $f$  имеет локальный минимум в нуле.

Аналогично на прямой  $x_2 = 0$  функция  $f(x_1, 0) = x_1^2$  имеет минимум в нуле.

С другой стороны, на параболе  $x_1 = 2x_2^2$  функция  $f(2x_2^2, x_2) = -x_2^4 < 0$  в любой окрестности нуля.

То есть точка  $\hat{x} = 0$  не является точкой локального минимума функции  $f$ .

# Функции нескольких переменных

**Пример 10.** Имеется единственный локальный экстремум, не являющийся абсолютным:

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2e^{-x_1^2}.$$

Необходимое условие экстремума I порядка в конечномерной задаче без ограничений:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_1 e^{-x_1^2} = 0; \\ -2x_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, 2e^{-x_1^2} = 1 \Leftrightarrow -x_1^2 = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \Leftrightarrow x_1 = \pm \sqrt{\ln 2}; \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

## Функции нескольких переменных

Получаем в задаче три стационарные точки  $\hat{x}^1 = 0$ ,  $\hat{x}^2 = (\sqrt{\ln 2}, 0)$ ,  $x^3 = (-\sqrt{\ln 2}, 0)$ .

Для проверки условий 2-го порядка надо выписать матрицу вторых производных в каждой стационарной точке:

$$A = \left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 2 - 4 e^{-x_1^2} + 8 x_1^2 e^{-x_1^2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A|_{\hat{x}^1=(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, A|x^2 = A|x^3 = \begin{pmatrix} 4 \ln 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Матрица вторых производных  $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  по критерию Сильвестра является отрицательно определенной:  $A_1 = -2 < 0$ ,  $A_2 = 4 > 0$ . Поэтому по достаточному условию второго порядка стационарная точка  $\hat{x}^1 \notin \text{locmax}$ . Очевидно, что  $S_{\text{abctmax}} = +\infty$   
 $f(x_1, 0) \rightarrow +\infty$  при  $x_1 \rightarrow +\infty$ .

## Функции нескольких переменных

Матрица вторых производных  $\begin{pmatrix} 4\ln 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  по критерию Сильвестра не является ни положительно, ни отрицательно определенной и более того не является ни неположительно определенной матрицей ( $A \not\leq 0$ ) и ни неотрицательно определенной матрицей ( $A \not\geq 0$ ).

Следовательно, не выполняется необходимое условие ни локального максимума, ни локального минимума. Поэтому стационарные точки  $\hat{x}^2, \hat{x}^3 \notin \text{locextr } f$ .

Очевидно, что  $S_{\text{абсmax}} = +\infty$ . Действительно, функция  $f(x_1, 0) = x_1^2 + 2e^{-x_1^2} \rightarrow +\infty$  при  $x_1 \rightarrow +\infty$ . Значит, у функции  $f$  имеется единственный локальный экстремум в точке  $\hat{x} = (0, 0)$ , не являющийся абсолютным.

# Функции нескольких переменных

## Пример 11.

Можно ли утверждать, что если функция одной переменной имеет в какой либо точке локальный минимум, то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки слева от точки функция убывает, а справа возрастает?

**Нет.** Контрпример: 
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Ясно, что  $\hat{x} = 0 \in \text{absmin } f$ . С другой стороны, в любой окрестности нуля и справа, и слева производная  $f'(x) = 2x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ , принимает как положительные, так и отрицательные значения, т.е. функция  $f$  и возрастает, и убывает.



# Функции нескольких переменных

## Пример 12.

Имеется бесконечное число локальных максимумов, но нет ни одного локального минимума:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \sin x_2 - x_1^2$$

Необходимое условие экстремума 1-го порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 = 0; \\ \cos x_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Стационарные точки:  $\hat{x}^k = \left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

Для проверки условий 2-го порядка надо выписать матрицу вторых производных в каждой стационарной точке:

$$A = \left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\sin x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A|_{(0, \frac{\pi}{2} + 2n\pi)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A|_{(0, \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Функции нескольких переменных

Матрица  $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  по критерию Сильвестра является отрицательно определённой:  $A_1 = -2 < 0$ ,  $A_2 = 2 > 0$ .

Поэтому по достаточному условию второго порядка

$$\left(0, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \in \text{locmax } f \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

Матрица  $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  по критерию Сильвестра не является неотрицательно определённой матрицей ( $A \not\geq 0$ ). Следовательно, не выполняется необходимое условие локального минимума.

Поэтому точки  $\left(0, \frac{\pi}{2} + (2n + 1)\pi\right)$  не доставляют локального минимума. Точки локального минимума могли быть только среди стационарных точек, но там их не оказалось. Следовательно, нет ни одного локального минимума.

# Функции нескольких переменных

## Задачи, упражнения на дом

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2} \rightarrow \text{extr.}$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \text{extr.}$$

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1 x_2 + x_2^2 - 16x_1 - 12x_2 \rightarrow \text{extr.}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - x_1 x_2 + x_1 - 2x_3 \rightarrow \text{extr.}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 3x_2 x_3 - x_1 \rightarrow \text{extr.}$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2 \rightarrow \text{extr.}$$

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 x_2 - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 \rightarrow \text{extr.}$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 - x_2)^4 \rightarrow \text{extr.}$$

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \text{extr.}$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \ln(x_1^2 + x_2^2) \rightarrow \text{extr.}$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3 (6 - x_1 - x_2) \rightarrow \text{extr.}$$

# Функции нескольких переменных

## Задачи и упражнения на дом

$$f(x_1, x_2) = e^{2x_1+3x_2}(8x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2) \rightarrow \text{extr.}$$

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1^2-x_2}(5 - 2x_1 + x_2) \rightarrow \text{extr.}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2^2x_3^3(7 - x_1 - 2x_2 - 3x_3) \rightarrow \text{extr.}$$

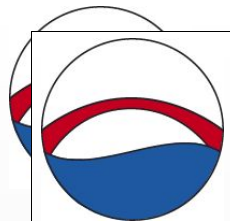
$$f(x_1, x_2) = \int_{-1}^1 (t^2 + x_2 t + x_1)^2 dt \rightarrow \min$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \int_{-1}^1 (t^3 + x_3 t^2 + x_2 t + x_1)^2 dt \rightarrow \min.$$

Найти экстремумы неявно заданной функции двух переменных

$$x_3 = f(x_1, x_2), \quad \text{если}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_3 - x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0$$



**СПАСИБО!**