Определение: общей декартовой системой координат на плоскости (пространстве) называется геометрический образ, состоящий из точки О и базиса В

Аффинная система координат на плоскости

$B = (\overline{e_1}, \overline{e_2})$ - бази V_2 в

$R = (O, \overline{e_1}, \overline{e_2})$

Аффинная система координат в пространстве

$B = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$ - баз V_3: в

О- начало координат

$\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ -координатные векторы

Оси координат – прямые, проходящие через начало координат и параллельные координатным векторам

Пусть дан репер $R = \{O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$

М – произвольная точка пространства

$\overrightarrow{OM}$ - радиус-вектор точки М

Определение: кординатами точки М в репере R называются координатами вектора $\overline{OM}$ в соответствующем базисе:

$$M(x, y, z)_R \Leftrightarrow \overline{OM}(x, y, z)_R \Leftrightarrow \overline{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$$

Определение: Система координат называется прямоугольно декартовой, если базис этой системы является ортонормированным

Обозначается $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ ил $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ $\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0$

Геометрический смысл координат точки М в ПДСК

M(x, y, z)

$OM_1M_2M_3$ - координатная ломаная точки М,

M_1 - проекция точки М на ось ох

$\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$, то $\overrightarrow{OM_1} = |x|$

$x = OM_1$, есл M_1 - точка положительн7ой полуоси ох

$x = -OM_1$, ес M_1 - точка отрицательной полуоси ох

$x = 0$, есл M_1 совпадает с точкой О

(аналогично для y и z)

Простейшие задачи

1. <u>*Определение координат вектора по координатам его конца и начала*</u>

$R = \{O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$

$M_2(x_2, y_2, z_2)$

Найти координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$

$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$

$M_1(x_1, y_1, z_1) \Rightarrow \overrightarrow{OM_1}(x_1, y_1, z_1) \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} = x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2} + z_1\overrightarrow{e_3}$

$M_2(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \overrightarrow{OM_2}(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \overrightarrow{OM_2} = x_2\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + z_2\overrightarrow{e_3}$

$$\overline{M_1M_2} = \left(x_2\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + z_2\overrightarrow{e_3}\right) - \left(x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2} + z_1\overrightarrow{e_3}\right) = e_1(x_2 - x_1) + e_2\left(y_2 - y_1\right) + e_3(z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Определение: *координаты вектора* равны разности координат начала и конца вектора

2. Деление отрезка в данном отношении

M_1 и M_2 - точки плоскости, λ принадлежит R, λ≠-1

Определение: Будем говорить, что точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ в данном отношении λ, если $\lambda = \frac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}}$

Из определения следует: $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2} \Rightarrow \overrightarrow{M_1M} \| \overrightarrow{MM_2}$

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2} = (-1)\cdot\overrightarrow{MM_2} = -\overrightarrow{MM_2}$$

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}}$$

Исходя из доказательства получаем, что $\lambda \neq \frac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{M_2M}}$

3. Расстояние между двумя точками

$A(x_1, y_1)$

$B(x_2, y_2)$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Теорема: Расстояние между двумя точками, заданными своими координатами в ПДСК, равно корню квадратному из суммы квадратов разностей соответствующих координат

4. Вычисление площади ориентированного треугольника

Треугольник называется *ориентированным*, если указан порядок расположения вершин.

Площадь ориентированного треугольника – число, абсолютная величина которого равна площади данного треугольника и которое положительно, если ориентация треугольника совпадает с положительной ориентацией плоскости, и отрицательно – в противном случае.

Определение: *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов называют число, равное произведению длин этих векторов но косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

Свойства:

1. *Коммутативность*

Вытекает из скалярного произведения

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

2. *Скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора*

$$\overline{a^2} = |\vec{a}|^2$$

Доказательство:

$$\overline{a^2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2$$

3. *Скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного вектора на проекцию второго вектора на первый*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$$

Доказательство:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \qquad \overrightarrow{OB_1} = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

Рассмотрим ΔBOB_1 :

$$\angle B_1 = 90^0 \Rightarrow OB = \frac{OB_1}{\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})}$$

$$OB_1 = OB \cdot \cos(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

$$OB_1 = \frac{OB}{\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})} = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} \Rightarrow |\vec{b}| = \frac{\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}}{\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})} \Rightarrow \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$$

4. Числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения

$$(\alpha \cdot \vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

а) $\alpha = 0$ то левая и правая части равны 0

б) $\alpha \neq 0$

$\alpha > 0 \Rightarrow \alpha\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ (по определению произведения вектора на число)

$\Rightarrow \angle\alpha\vec{a}\hat{}\vec{b}) = \angle(\vec{a}\hat{}\vec{b})$

Тогда, $(\alpha\vec{a})\vec{b} = |\alpha\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos(\alpha\vec{a}\hat{}\vec{b}) = \alpha|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\vec{b})$

$\alpha < 0$

$|\alpha| = -\alpha$ $\Rightarrow \alpha\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a} \Rightarrow \cos(\alpha\vec{a}\hat{}\vec{b}) = -\cos(\vec{a}\hat{}\vec{b})$

$\angle(\alpha\vec{a}\hat{}\vec{b}) = 180^0 - \angle(\vec{a}\hat{}\vec{b})$

$(\alpha\vec{a})\vec{b} = |\alpha\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos((\alpha\vec{a}\hat{}\vec{b})) = -\alpha \cdot |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos((\alpha\vec{a}\hat{}\vec{b})) = \alpha \cdot |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\vec{b})$

5. Скалярное произведение равно нулю, тогда и только тогда, когда векторы перпендикулярны

Доказательство:

Необходимость

Дано: $\vec{a} \perp \vec{b}$

Доказать: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\varphi = 90^0$, $\cos\varphi = 0$ т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot 0 = 0$

Достаточность

Дано: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Доказать: $\vec{a} \perp \vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 0$

По условию $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow \cos\varphi = 90^0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

6. *Дистрибутивность*

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

7. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

Скалярное произведение векторов, заданными координатами

Рассмотрим векторное пространство V_3

$B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ - ортонормированный базис

Теорема: скалярное произведение двух векторов, заданных координатами равно сумме произведений соответствующих координат

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \ \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k} \qquad \vec{b} = b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j} + b_3 \cdot \vec{k}$$

Пусть $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}) \cdot (b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j} + b_3 \cdot \vec{k}) =$

$$= a_1 b_1 \vec{i}^2 + a_1 b_2 \vec{i}\vec{j} + a_1 b_3 \vec{i}\vec{k} + a_2 b_1 \vec{j}\vec{i} + a_2 b_2 \vec{j}^2 + a_2 b_3 \vec{j}\vec{k} + a_3 b_1 \vec{k}\vec{i} + a_3 b_2 \vec{k}\vec{j} + a_3 b_3 \vec{k}^2$$

Т.к. $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ и $\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1$

В итоге: $$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Длина вектора

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, тогда $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$

Угол между векторами

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a}\hat{}\vec{b}) \Rightarrow \cos(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Все выше сказанное справедливо для V_2