

**Определение:** общей декартовой системой координат на плоскости (пространстве) называется геометрический образ, состоящий из точки  $O$  и базиса  $B$

Аффинная система координат на плоскости

$$B = (\overline{e_1}, \overline{e_2}) \quad - \text{ базис } V_2 \text{ в}$$

$$R = (O, \overline{e_1}, \overline{e_2})$$

Аффинная система координат в пространстве

$$B = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}) \quad - \text{ базис } V_3 \text{ в}$$

$O$ - начало координат

$$\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3} \quad - \text{ координатные векторы}$$

Оси координат – прямые, проходящие через начало координат и параллельные координатным векторам

Пусть дан репер  $R = \{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$

$M$  – произвольная точка пространства

$\overline{OM}$  – радиус-вектор точки  $M$

Определение: координатами точки  $M$  в репере  $R$  называются координатами вектора  $\overline{OM}$  в соответствующем базисе:

$$M(x, y, z)_R \Leftrightarrow \overline{OM}(x, y, z)_R \Leftrightarrow \overline{OM} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2} + z\overline{e_3}$$

Определение: Система координат называется прямоугольно декартовой, если базис этой системы является ортонормированным

Обозначается  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  ил  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ,  $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$   $\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0$

Геометрический смысл координат точки М в ПДСК

$M(x, y, z)$

$OM_1M_2M_3$  - координатная ломаная точки М,

$M_1$  - проекция точки М на ось  $ox$

$\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$ , то  $OM_1 = |x|$

$x = OM_1$  , если  $M_1$  - точка положительной полуоси  $ox$

$x = -OM_1$  , если  $M_1$  - точка отрицательной полуоси  $ox$

$x = 0$  , если  $M_1$  совпадает с точкой  $O$

(аналогично для  $y$  и  $z$ )

# Простейшие задачи

## 1. Определение координат вектора по координатам его конца и начала

$$R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

$$M_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$M_2(x_2, y_2, z_2)$$

Найти координаты вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \Rightarrow \overrightarrow{OM_1}(x_1, y_1, z_1) \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$$

$$M_2(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \overrightarrow{OM_2}(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \overrightarrow{OM_2} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= (x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3) - (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3) = e_1(x_2 - x_1) + e_2(y_2 - y_1) + e_3(z_2 - z_1) \\ &\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \end{aligned}$$

**Определение:** координаты вектора равны разности координат начала и конца вектора

## 2. Деление отрезка в данном отношении

$M_1$  и  $M_2$  - точки плоскости,  $\lambda$  принадлежит  $\mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq -1$

**Определение:** Будем говорить, что точка  $M$  делит направленный отрезок  $\overline{M_1M_2}$  в данном отношении  $\lambda$ , если  $\lambda = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}$

Из определения следует:  $\overline{M_1M} = \lambda \overline{MM_2} \Rightarrow \overline{M_1M} \parallel \overline{MM_2}$

$$\overline{M_1M} = \lambda \overline{MM_2} = (-1) \cdot \overline{MM_2} = -\overline{MM_2}$$

$$\lambda = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}$$

Исходя из доказательства получаем, что  $\lambda \neq \frac{\overline{M_1M}}{\overline{M_2M}}$

### 3. Расстояние между двумя точками

$$\begin{array}{l} A(x_1, y_1) \\ B(x_2, y_2) \end{array} \quad \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Теорема: Расстояние между двумя точками, заданными своими координатами в ПДСК, равно корню квадратному из суммы квадратов разностей соответствующих координат

### 4. Вычисление площади ориентированного треугольника

Треугольник называется *ориентированным*, если указан порядок расположения вершин.

Площадь ориентированного треугольника – число, абсолютная величина которого равна площади данного треугольника и которое положительно, если ориентация треугольника совпадает с положительной ориентацией плоскости, и отрицательно – в противном случае.

**Определение:** *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов называют число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

### **Свойства:**

#### *1. Коммутативность*

Вытекает из скалярного произведения

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

#### *2. Скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора*

$$\overline{a^2} = |\vec{a}|^2$$

**Доказательство:**

$$\overline{a^2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2$$

3. Скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного вектора на проекцию второго вектора на первый

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$$

**Доказательство:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \quad \overrightarrow{OB_1} = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

Рассмотрим  $\triangle BOB_1$  :

$$\angle B_1 = 90^\circ \Rightarrow OB = \frac{OB_1}{\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})}$$

$$OB_1 = OB \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

$$OB_1 = \frac{OB}{\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})} = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} \Rightarrow |\vec{b}| = \frac{\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}}{\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})} \Rightarrow \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$$

4. Числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения

$$(\alpha \cdot \vec{a}) \vec{b} = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

а)  $\alpha = 0$  то левая и правая части равны 0

б)  $\alpha \neq 0$

$\alpha > 0 \Rightarrow \alpha \vec{a} \uparrow \vec{a}$  (по определению произведения вектора на число)

$$\Rightarrow \angle(\alpha \vec{a} \wedge \vec{b}) = \angle(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

Тогда,  $(\alpha \vec{a}) \vec{b} = |\alpha \vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha \vec{a} \wedge \vec{b}) = \alpha |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$

$\alpha < 0$   
 $|\alpha| = -\alpha \Rightarrow \alpha \vec{a} \updownarrow \vec{a} \Rightarrow \cos(\alpha \vec{a} \wedge \vec{b}) = -\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$

$$\angle(\alpha \vec{a} \wedge \vec{b}) = 180^\circ - \angle(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

$$(\alpha \vec{a}) \vec{b} = |\alpha \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\alpha \vec{a} \wedge \vec{b})) = -\alpha \cdot |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\alpha \vec{a} \wedge \vec{b})) = \alpha \cdot |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$$



5. Скалярное произведение равно нулю, тогда и только тогда, когда векторы перпендикулярны

**Доказательство:**

Необходимость

Дано:  $\vec{a} \perp \vec{b}$

Доказать:  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\cos \varphi = 0$  т.е.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot 0 = 0$

Достаточность

Дано:  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Доказать:  $\vec{a} \perp \vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = 0$

По условию  $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow \cos \varphi = 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

6. Дистрибутивность

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

7.  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$

# Скалярное произведение векторов, заданными координатами

Рассмотрим векторное пространство  $V_3$

$B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  - ортонормированный базис

**Теорема:** скалярное произведение двух векторов, заданных координатами равно сумме произведений соответствующих координат

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k} \quad \vec{b} = b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j} + b_3 \cdot \vec{k}$$

Пусть 
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}) \cdot (b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j} + b_3 \cdot \vec{k}) =$$

$$= a_1 b_1 \vec{i}^2 + a_1 b_2 \vec{i}\vec{j} + a_1 b_3 \vec{i}\vec{k} + a_2 b_1 \vec{j}\vec{i} + a_2 b_2 \vec{j}^2 + a_2 b_3 \vec{j}\vec{k} + a_3 b_1 \vec{k}\vec{i} + a_3 b_2 \vec{k}\vec{j} + a_3 b_3 \vec{k}^2$$

Т.к.  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$  и  $\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1$

В итоге:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

## Длина вектора

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \text{ тогда } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

## Угол между векторами

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) \Rightarrow \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

*Все выше сказанное справедливо для  $V_2$*