



Векторная алгебра



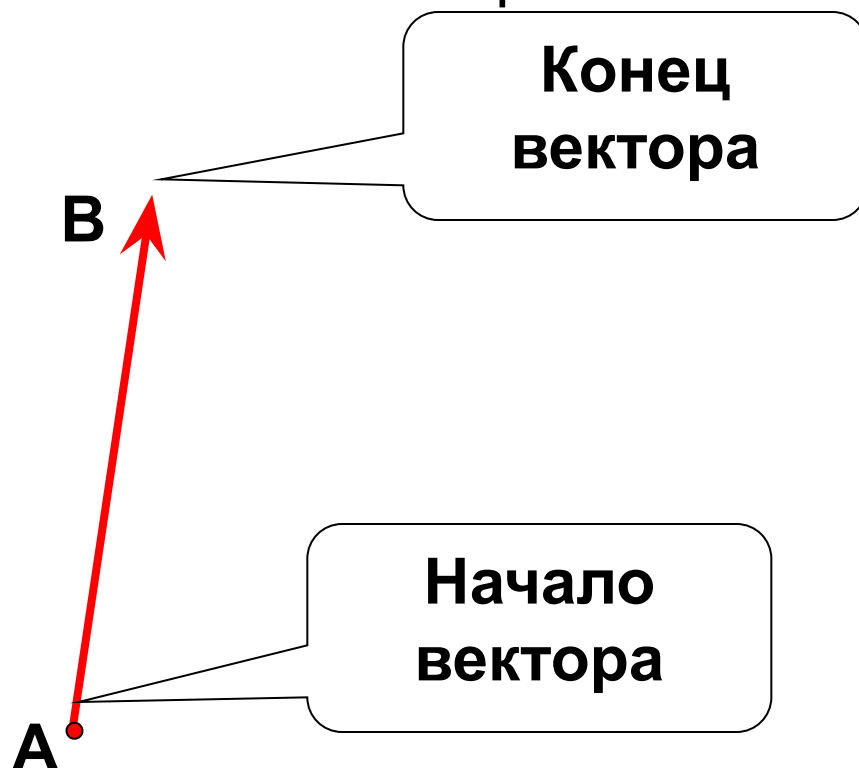
Уильям Роуэн Гамильтон
1805 — 1865

выдающийся ирландский математик и
физик XIX века.

Термин **вектор**
(от лат. Vector - “несущий”) впервые
появился в 1845 г. у ирландского
математика Уильяма Гамильтона

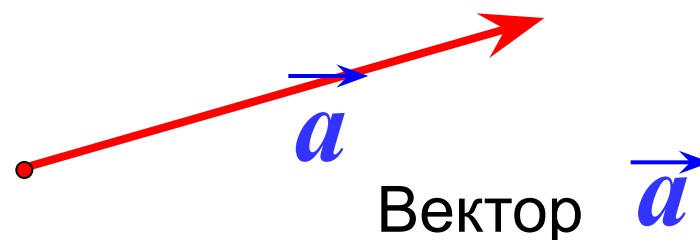
§ 1. Определение вектора.

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом, называется направленным отрезком или вектором



Вектор $\overrightarrow{AB}$

Длиной или модулем вектора называется длина отрезка AB $|\overrightarrow{AB}| = AB$





§ 1. Определение вектора.

Любая точка плоскости также является вектором.

В этом случае вектор называется нулевым

•
M

Вектор $\overrightarrow{MM}$

Вектор $\vec{0}$

Начало нулевого вектора совпадает с его концом, поэтому нулевой вектор не имеет какого-либо определенного направления. Иначе говоря, любое направление можно считать направлением нулевого вектора.

Длина нулевого считается равной нулю

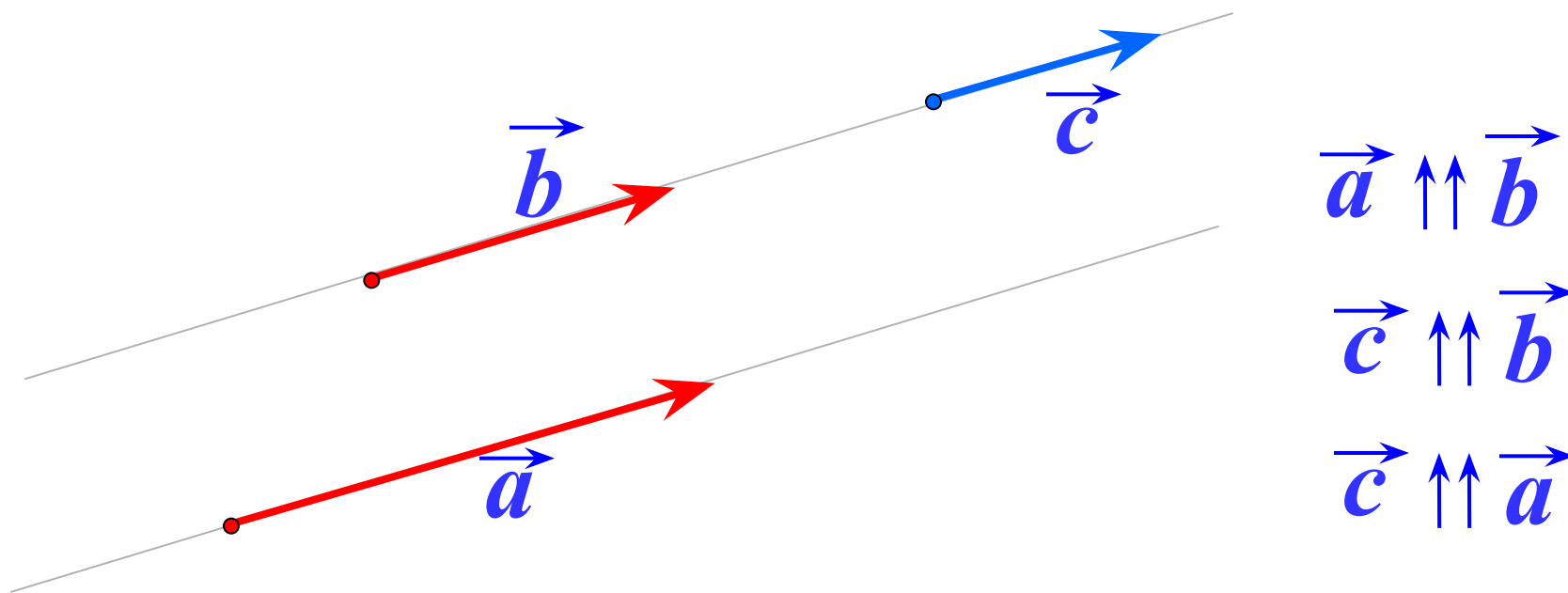
$$|\overrightarrow{MM}| = 0$$



§ 1. Определение вектора.

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные, сонаправленные векторы



Нулевой вектор считается коллинеарным, сонаправленным с любым вектором.

$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{a}$$

$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{c}$$

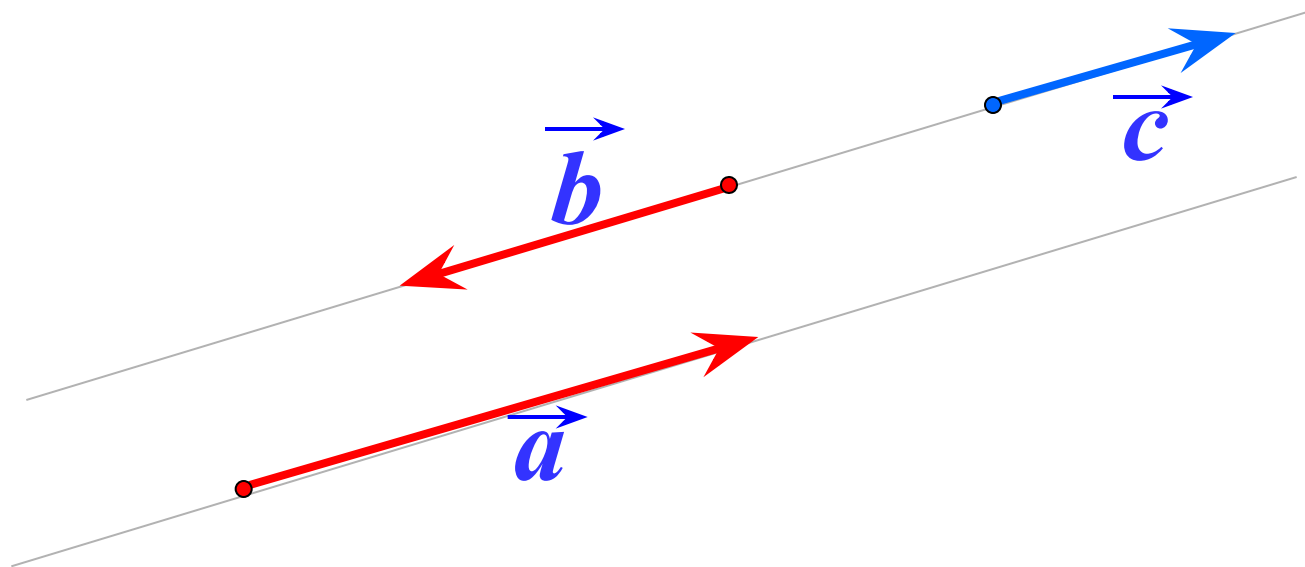
$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{b}$$



§ 1. Определение вектора.

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные,
противоположно направленные векторы



$$\vec{a} \updownarrow \vec{b}$$

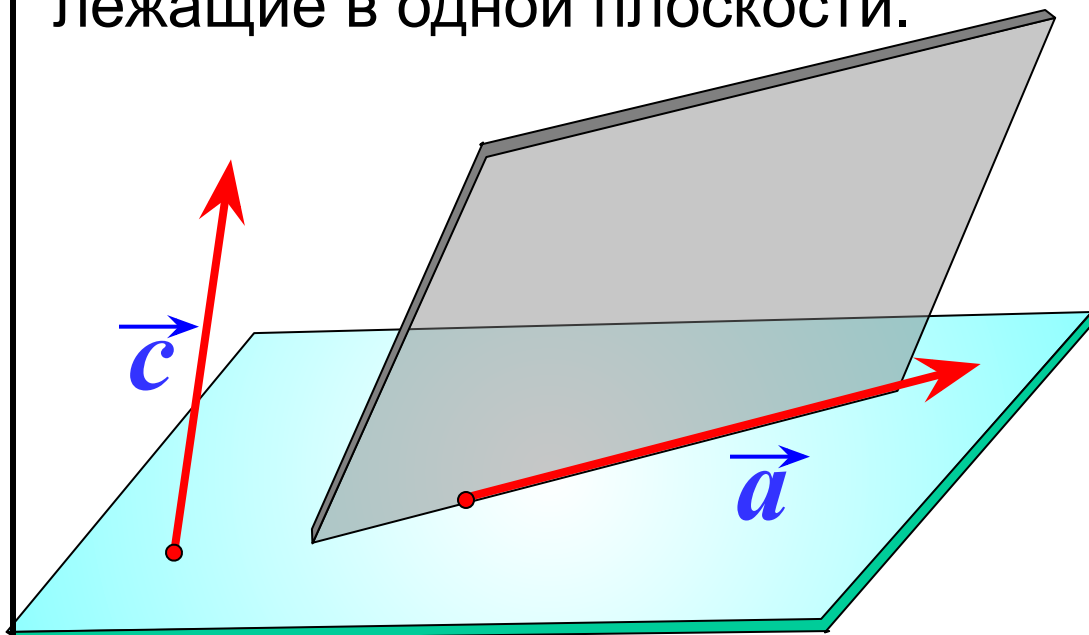
$$\vec{c} \updownarrow \vec{a}$$



§ 1. Определение вектора.

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

Другими словами, векторы называются компланарными, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

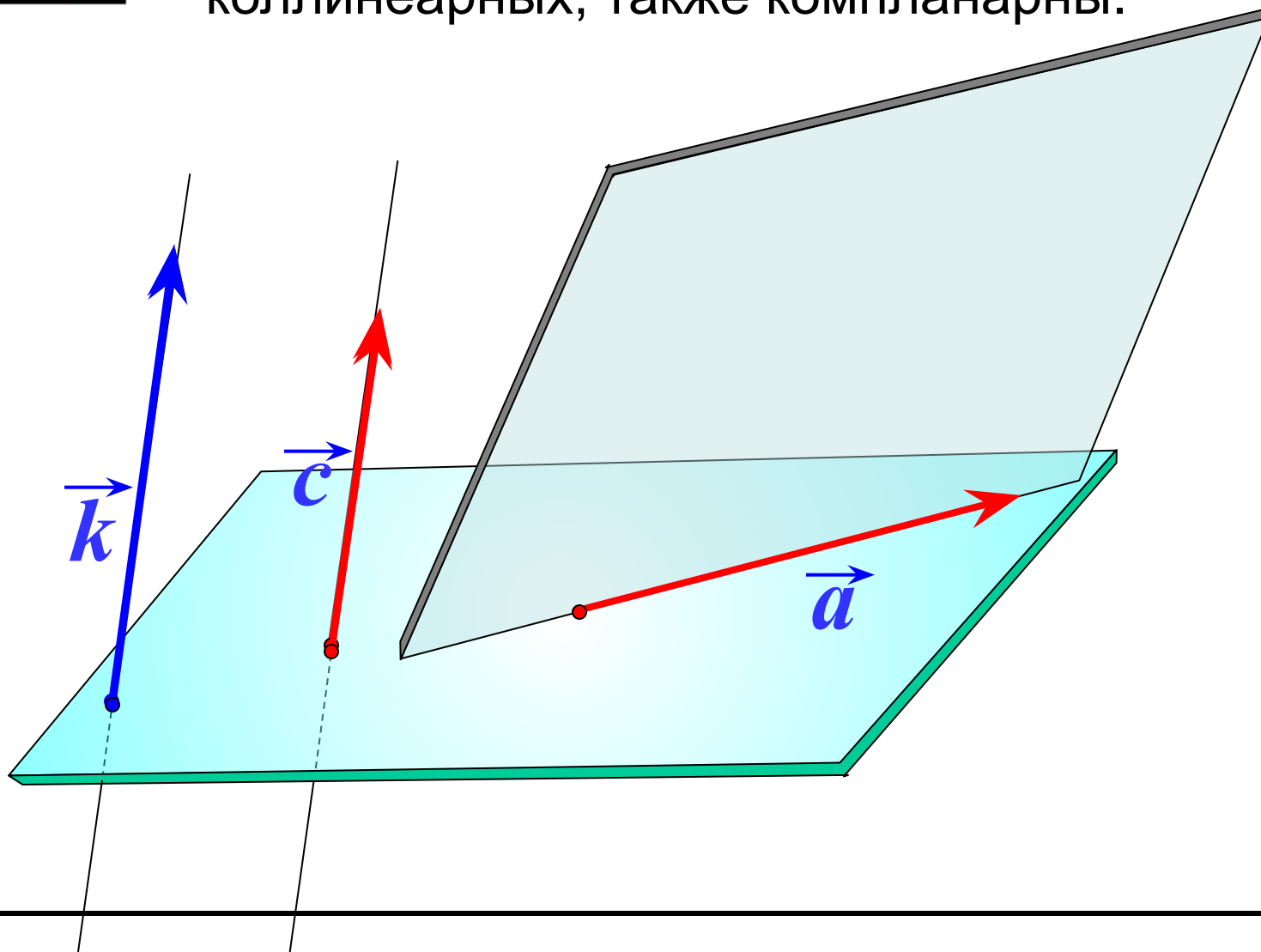


**Любые два вектора
компланарны.**



§ 1. Определение вектора.

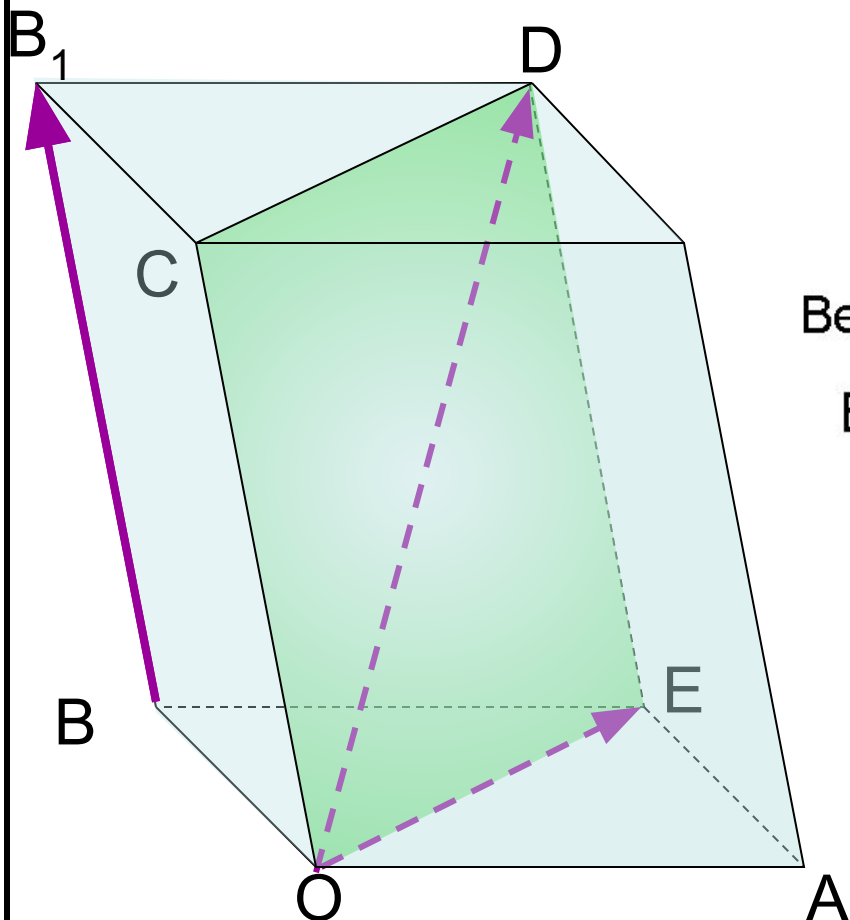
Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.





§ 1. Определение вектора.

Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными.



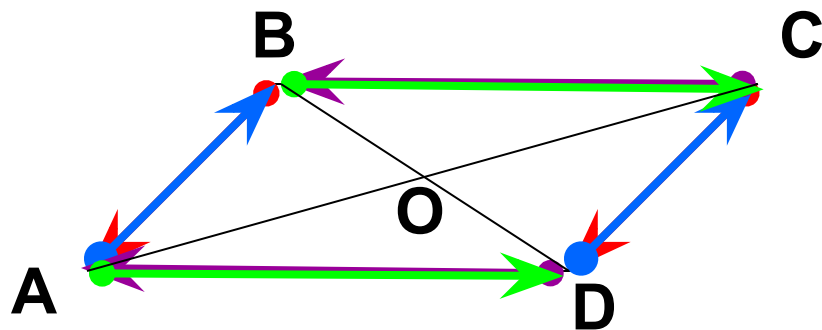
Векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ не компланарны

Векторы $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ компланарны



§ 1. Определение вектора.

Векторы называются равными,
если они сонаправлены и их длины равны.



$$1 \quad \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

$$2 \quad |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

ABCD – параллелограмм.

$$\vec{BA} = \vec{CD};$$

$$\vec{AB} = \vec{DC};$$

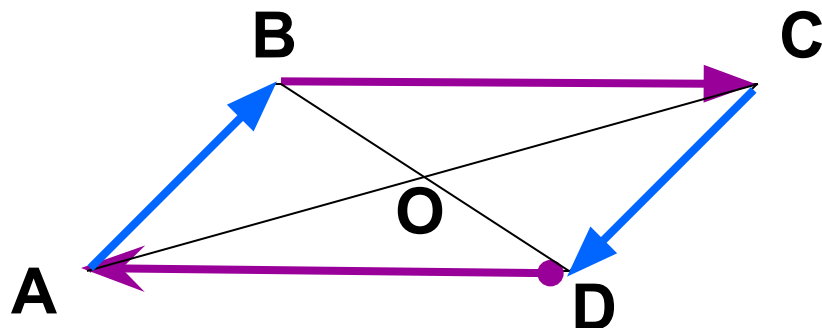
$$\vec{CB} = \vec{DA};$$

$$\vec{AD} = \vec{BC}.$$



§ 1. Определение вектора.

Векторы называются противоположными, если они противонаправлены и их длины равны.



$$1 \quad \vec{a} \updownarrow \vec{b}$$

$$2 \quad |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

ABCD – параллелограмм.

$$\vec{DA} = -\vec{BC}; \quad \vec{AB} = -\vec{CD};$$

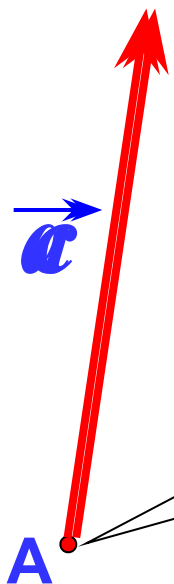


§ 1. Определение вектора.

Если точка A – начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что

вектор $\vec{a}$ отложен от точки A

От любой точки M можно отложить
вектор, равный данному вектору $\vec{a}$,
и притом только один.



Вектор $\vec{a}$ отложен от точки A

$$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{c}$$

$$\vec{a} = \vec{c}$$

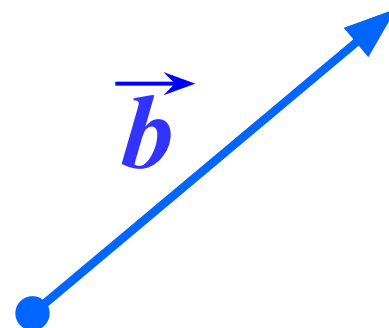
$$|\vec{a}| = |\vec{c}|$$



§ 1. Определение вектора.

Угол между векторами

Углом α между векторами называется наименьший угол, образуемый векторами при совмещении их начал.



$\vec{a}$



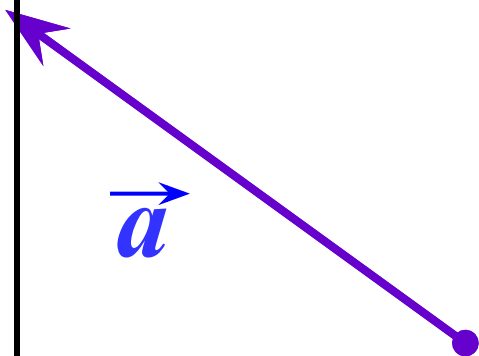
$\vec{b}$

• O

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = \alpha$$

Угол между векторами
равен α

$\vec{a}$ и $\vec{b}$

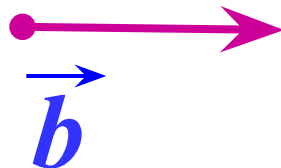
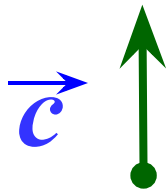




§ 1. Определение вектора.

Для коллинеарных векторов $\alpha = 0$ или $\alpha = 180^\circ$

Два вектора называются **ортогональными**, если угол между ними равен 90° .

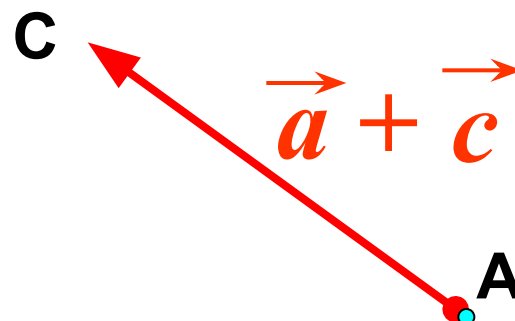
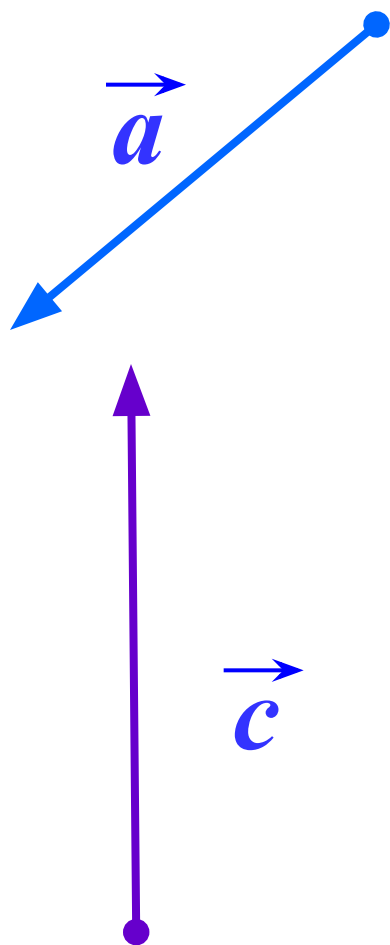


$$\vec{b} \perp \vec{c}$$



§ 2. Действия над векторами.

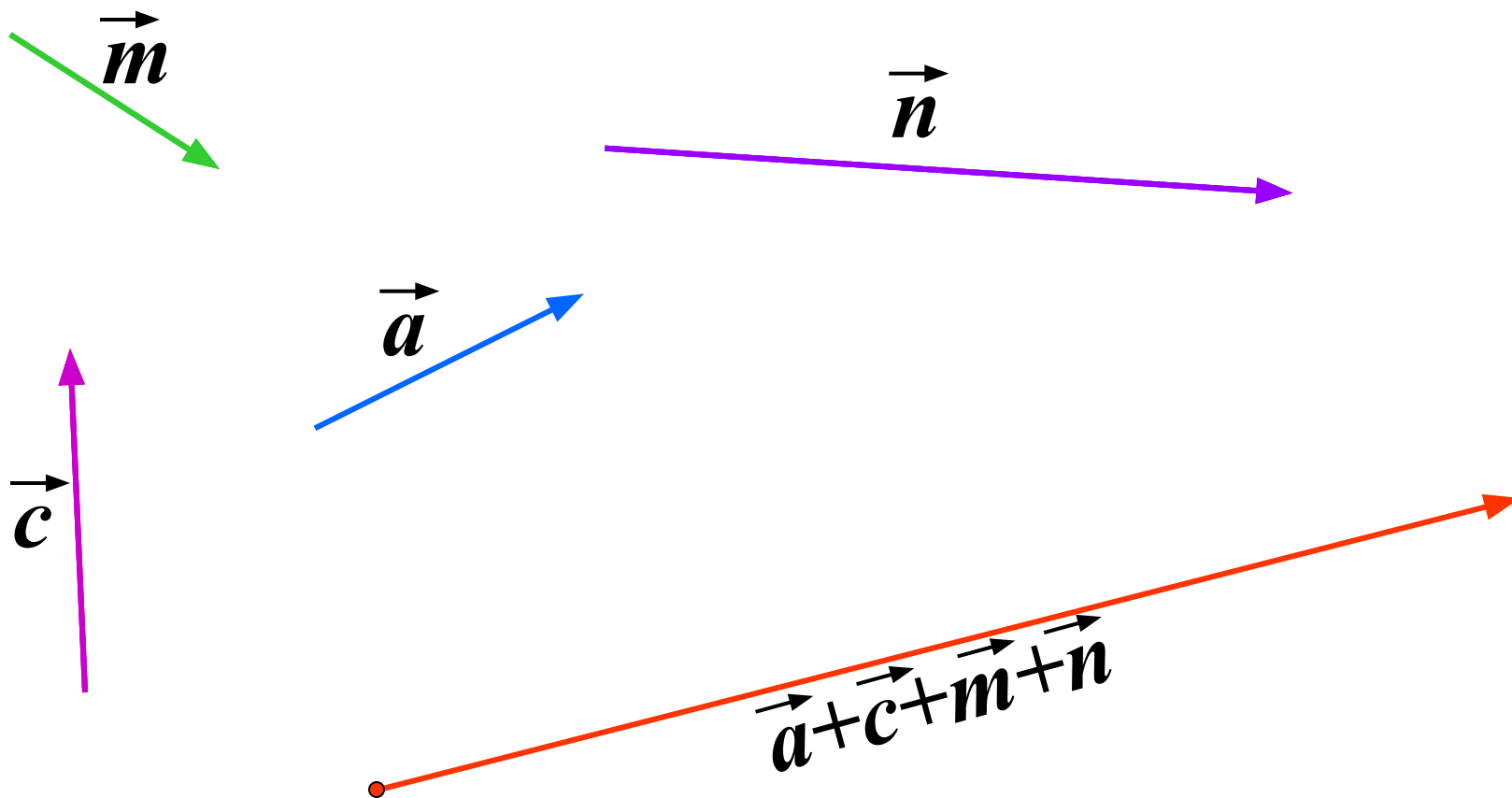
Сложение векторов. Правило треугольника.





§ 2. Действия над векторами.

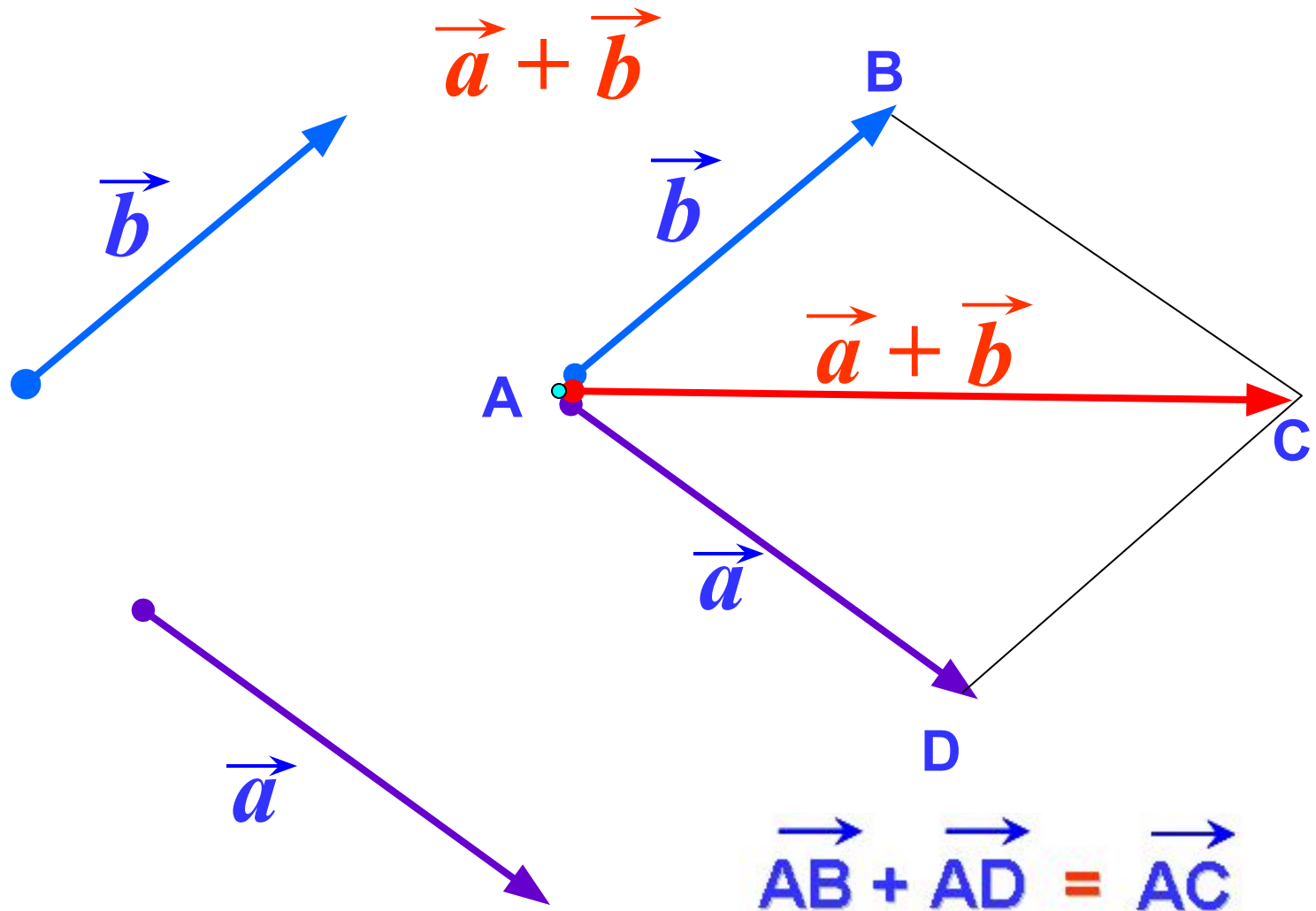
Сложение векторов. Правило многоугольника.





§ 2. Действия над векторами.

Сложение векторов. Правило параллелограмма.





§ 2. Действия над векторами.

Сложим первые две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (аксиома параллелограмма).
Количество сил уменьшилось на единицу.

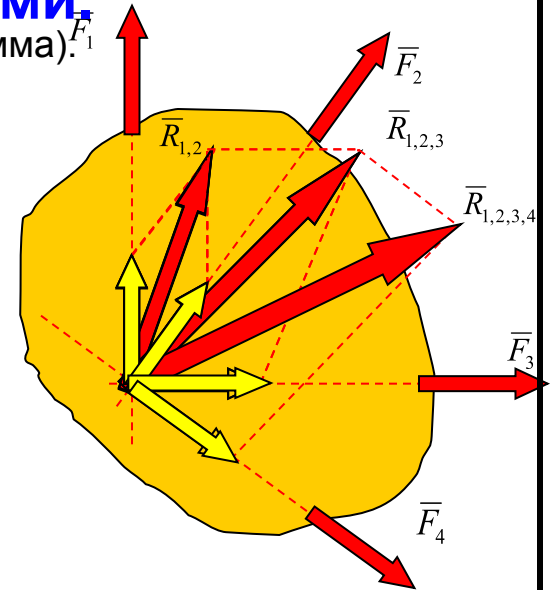
$$\vec{R}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Сложим полученную равнодействующую $\vec{R}_{1,2}$ со следующей силой $\vec{F}_3$.
Количество сил вновь уменьшилось на единицу.

$$\vec{R}_{1,2,3} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3$$

Повторим эту же операцию со следующей силой $\vec{F}_4$.
Осталась всего одна сила, эквивалентная исходной системе сил.

$$\vec{R}_{1,2,3,4} = \vec{R}_{1,2,3} + \vec{F}_4$$



Сложение сил построением параллелограммов можно заменить построением силового треугольника – выбирается одна из сил или изображается параллельно самой себе с началом в любой произвольной точке, все другие силы изображаются параллельными самим себе с началом, совпадающим с концом предыдущей силы.

Результатом такого сложения является вектор, направленный из начала первой силы к концу последней из сил.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \dots = \sum \vec{F}_i$$

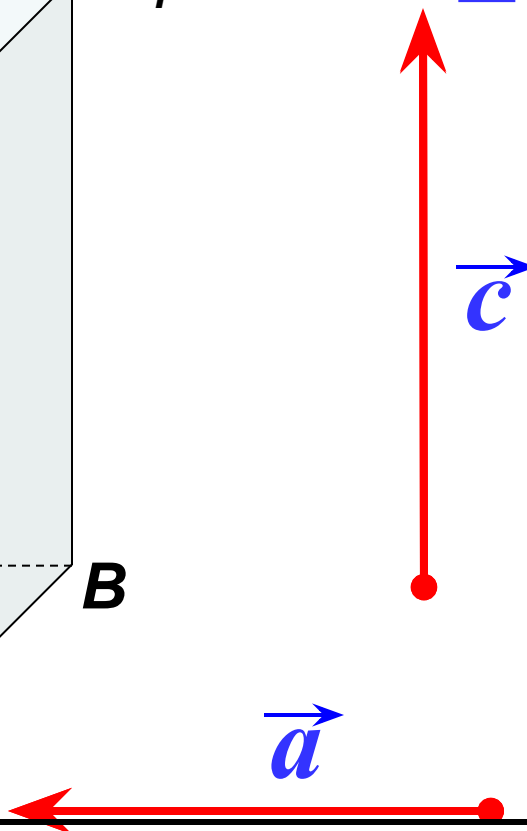
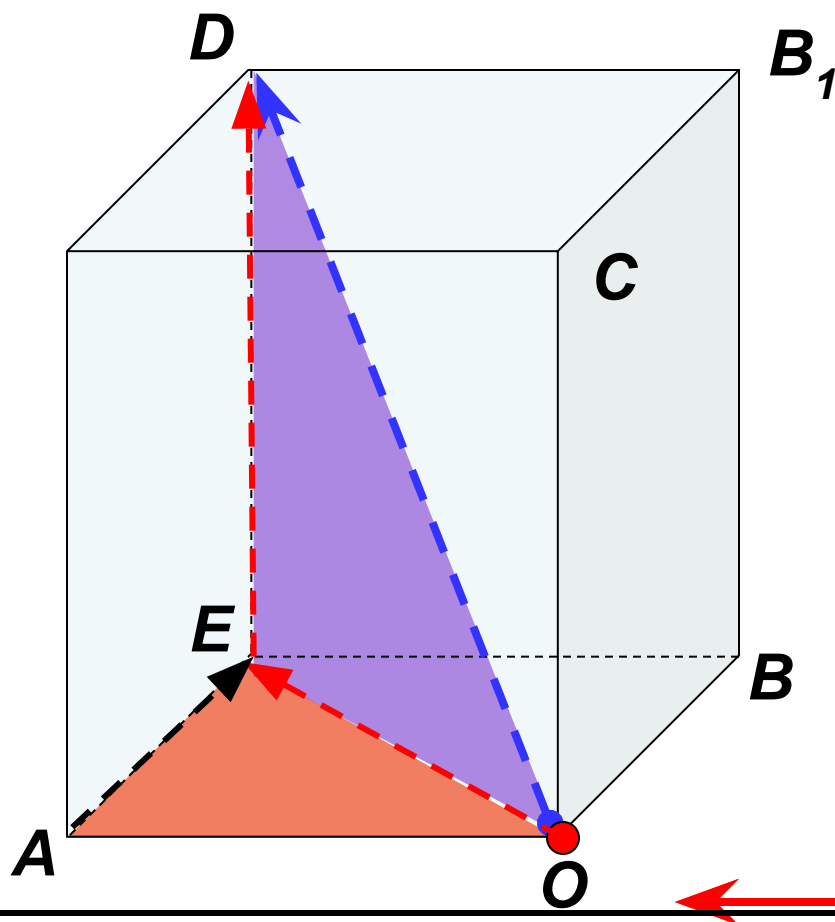


§ 2. Действия над векторами. Правило параллелепипеда.

из $\triangle OAE$

$$\vec{OD} = \vec{OE} + \vec{ED} = (\vec{OA} + \vec{AE}) + \vec{ED} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} =$$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



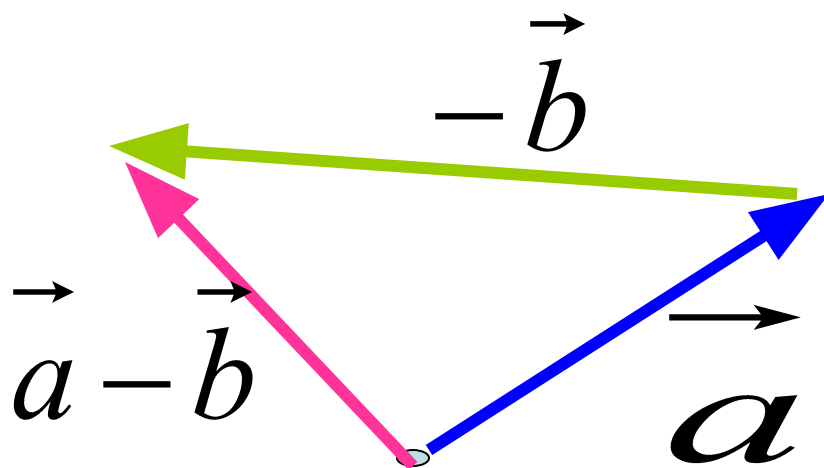


§ 2. Действия над векторами.

Вычитание векторов



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



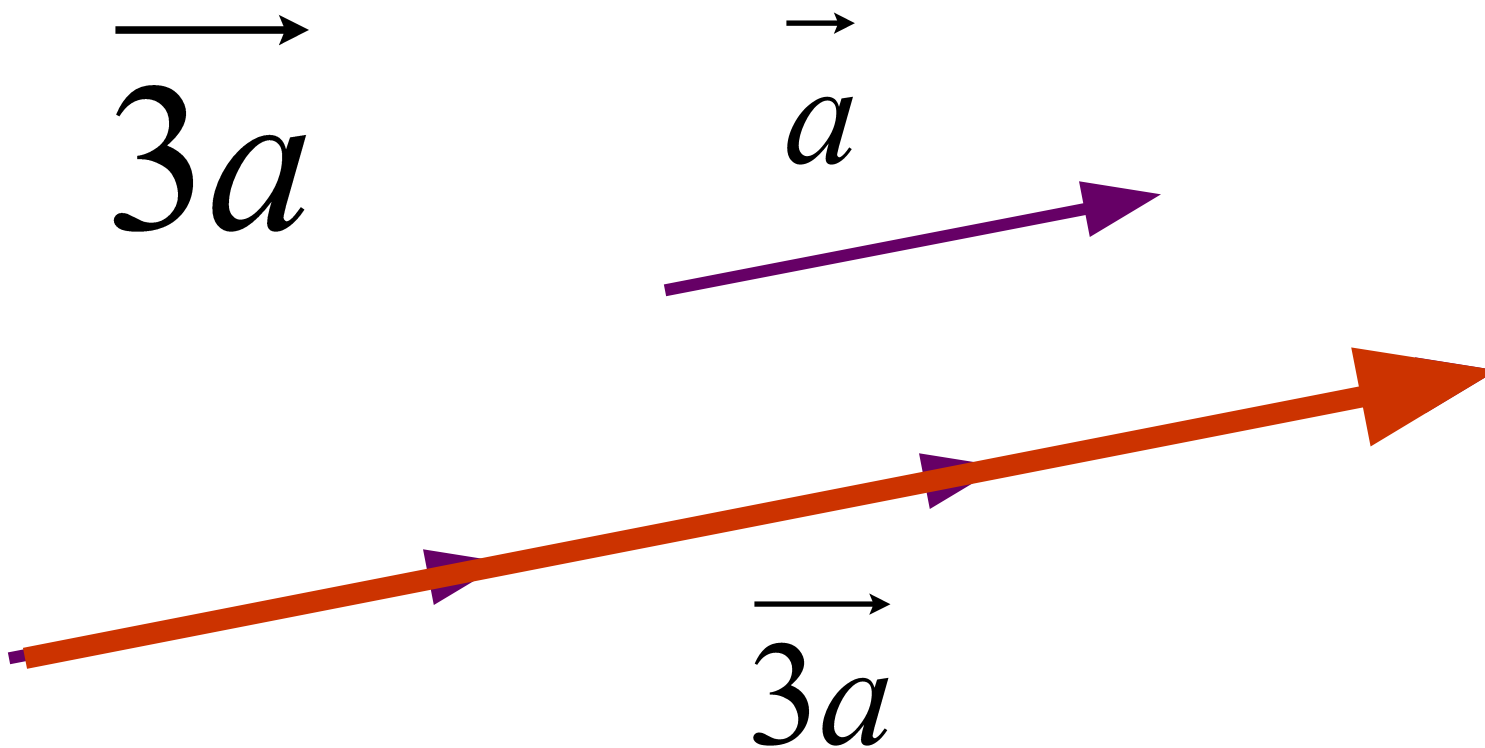


§ 2. Действия над векторами.

Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор, такой что:

$$1) |\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|, \quad 2) \vec{b} \parallel \vec{a}.$$





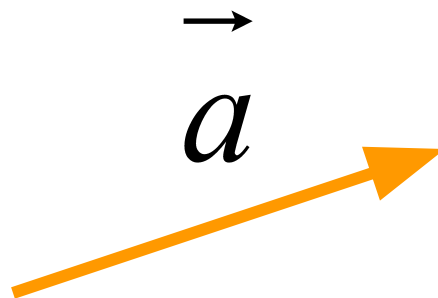
§ 2. Действия над векторами.

Умножение вектора на число

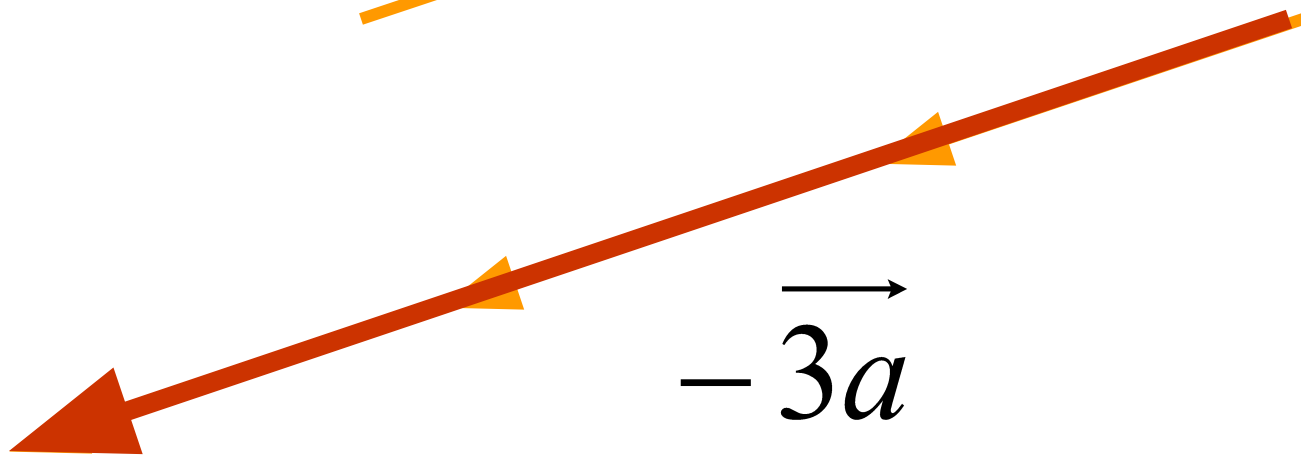
Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор, такой что:

$$1) |\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|, \quad 2) \vec{b} \parallel \vec{a}.$$

$\vec{-3a}$



$\vec{a}$



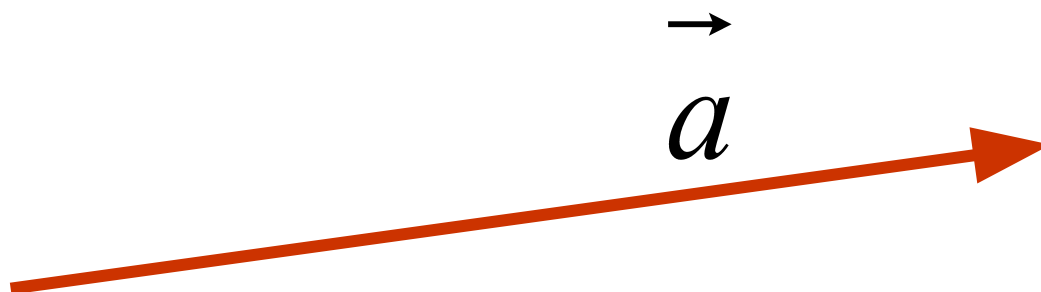
$\vec{-3a}$



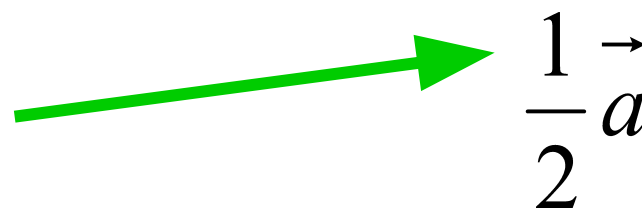
§ 2. Действия над векторами.

Умножение вектора на число

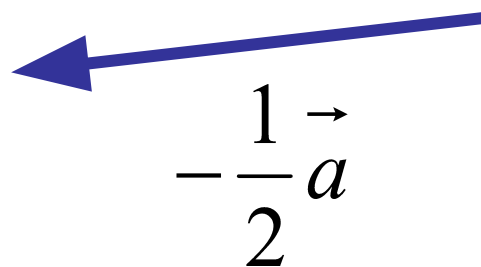
$$\frac{1}{2} \vec{a}$$



$$-\frac{1}{2} \vec{a}$$



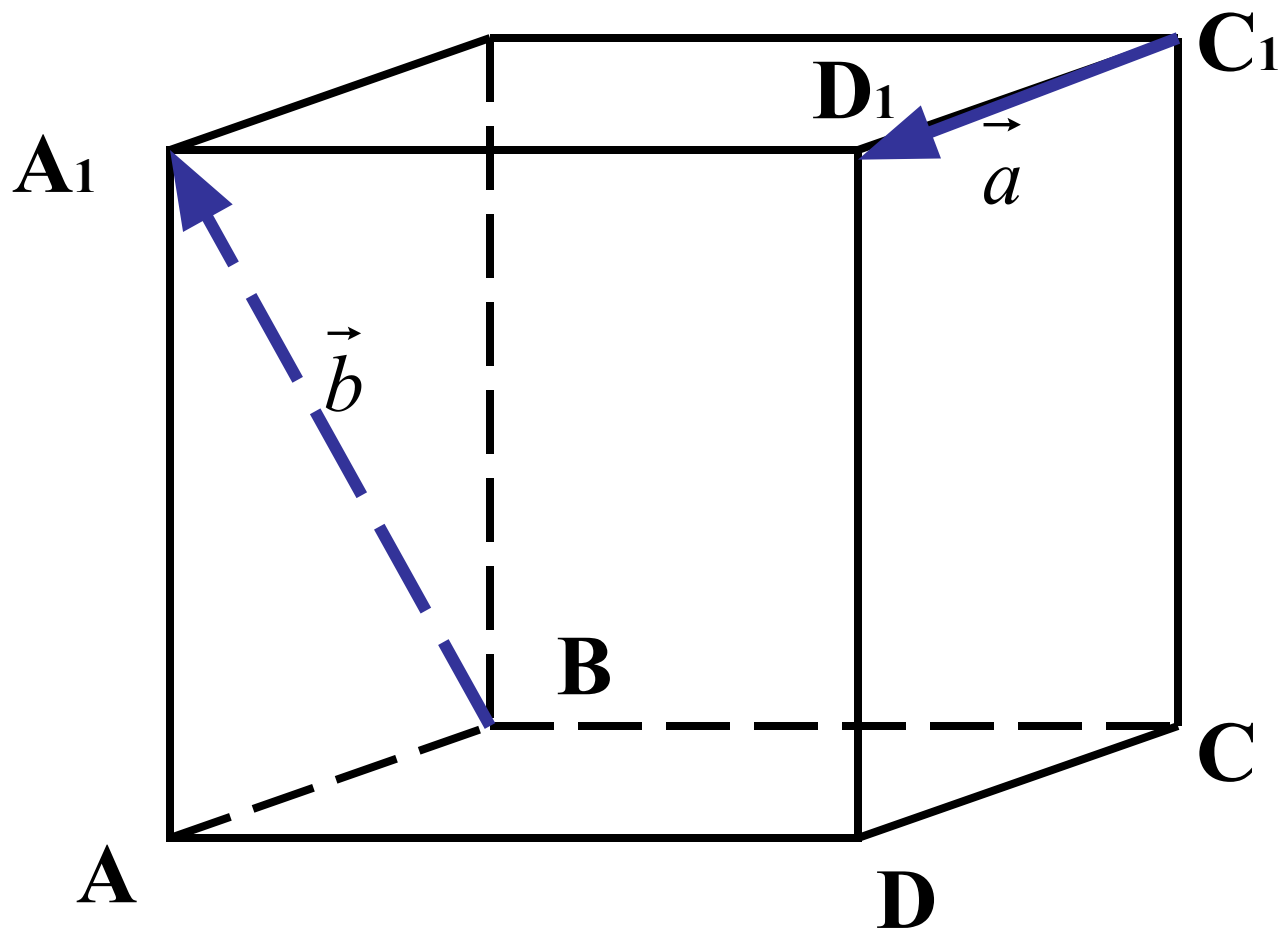
$$\frac{1}{2} \vec{a}$$



$$-\frac{1}{2} \vec{a}$$



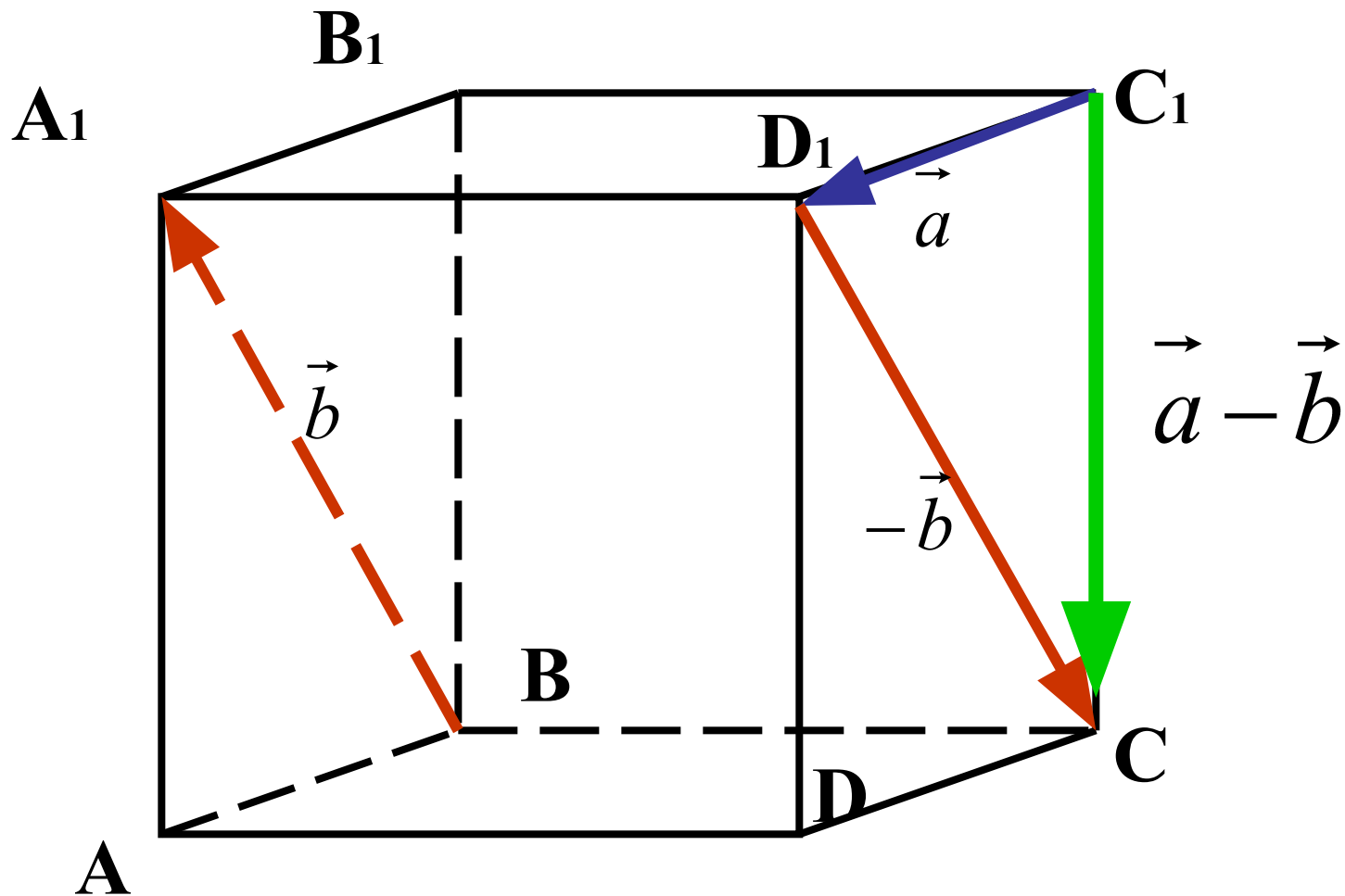
§ 2. Действия над векторами.





§ 2. Действия над векторами.

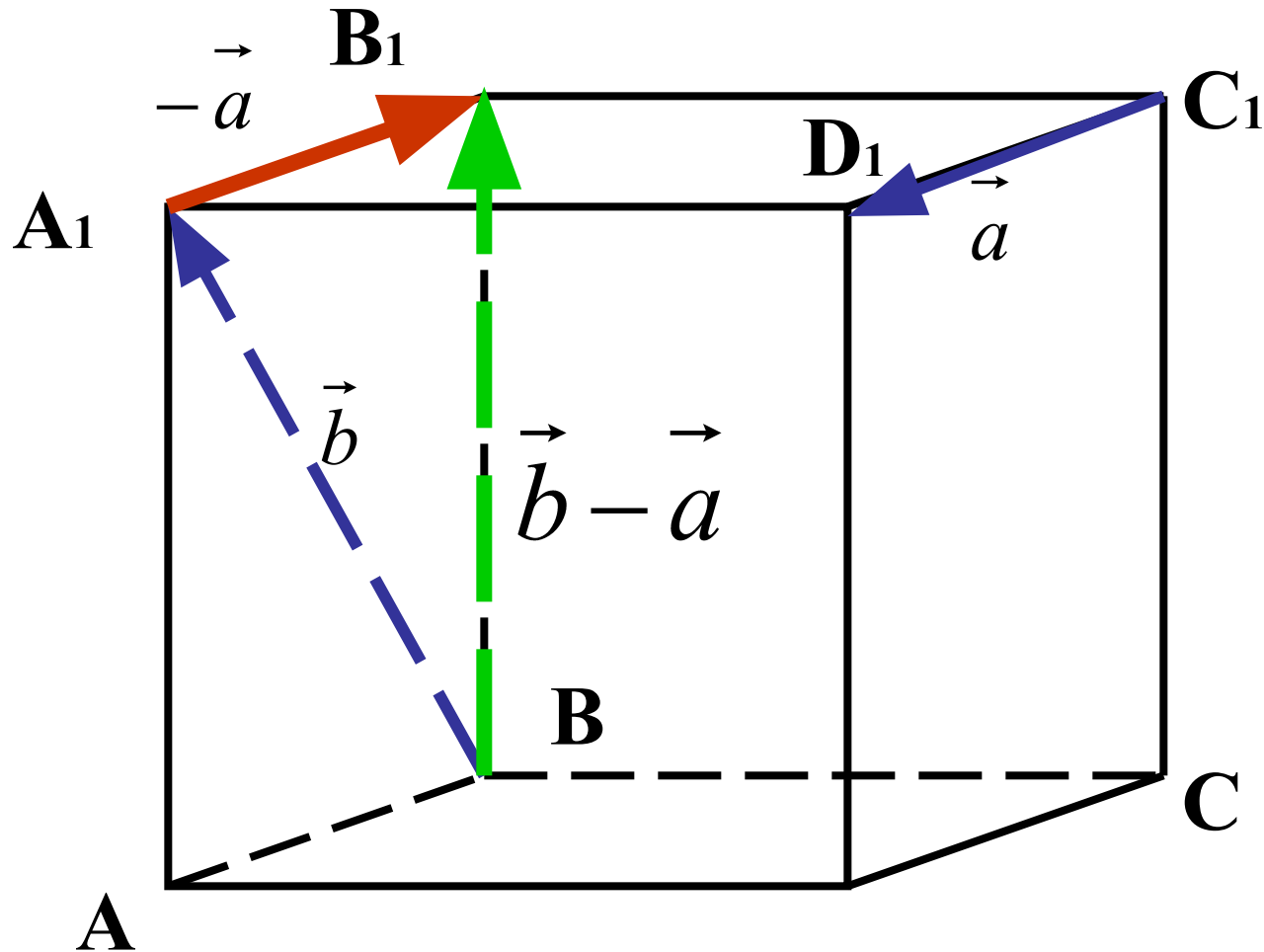
$$\vec{a} - \vec{b}$$





§ 2. Действия над векторами.

$$\vec{b} - \vec{a}$$





§ 3. Линейная зависимость векторов

Определение 1. *Линейной комбинацией* векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$

называется вектор

$$\overline{b} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n},$$

где λ_i – некоторые числа.

Определение 2. Вектора $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ называются *линейно зависимыми*, если существуют действительные числа λ_i , такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля, и при этом выполняется равенство:

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n} = \overline{0}.$$

Определение 2. Вектора $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ называются *линейно независимыми*, если из условия $\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n} = \overline{0}$

следует тривиальная комбинация $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.



§ 3. Линейная зависимость векторов

Теорема 1. Для линейной зависимости векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть вектора линейно зависимы. Тогда существуют числа λ_i , не равные нулю одновременно, такие, что $\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n} = 0$.

Пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда

$$\overline{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \overline{a_2} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \overline{a_n}, \quad \text{что доказывает необходимость.}$$

Достаточность.

Пусть для определенности $\overline{a_1} = \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n}$.

Тогда $(-1)\overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n} = 0$, причем $|-1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| > 0$.

Это и есть условие линейной зависимости.



§ 3. Линейная зависимость векторов

Для линейно зависимых векторов справедливы теоремы 2–6.

Теорема 2. Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой.

Теорема 3. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Теорема 4. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть три вектора $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ линейно зависимы. Тогда существуют не равные одновременно нулю три числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, такие, что

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3} = \overline{0}.$$

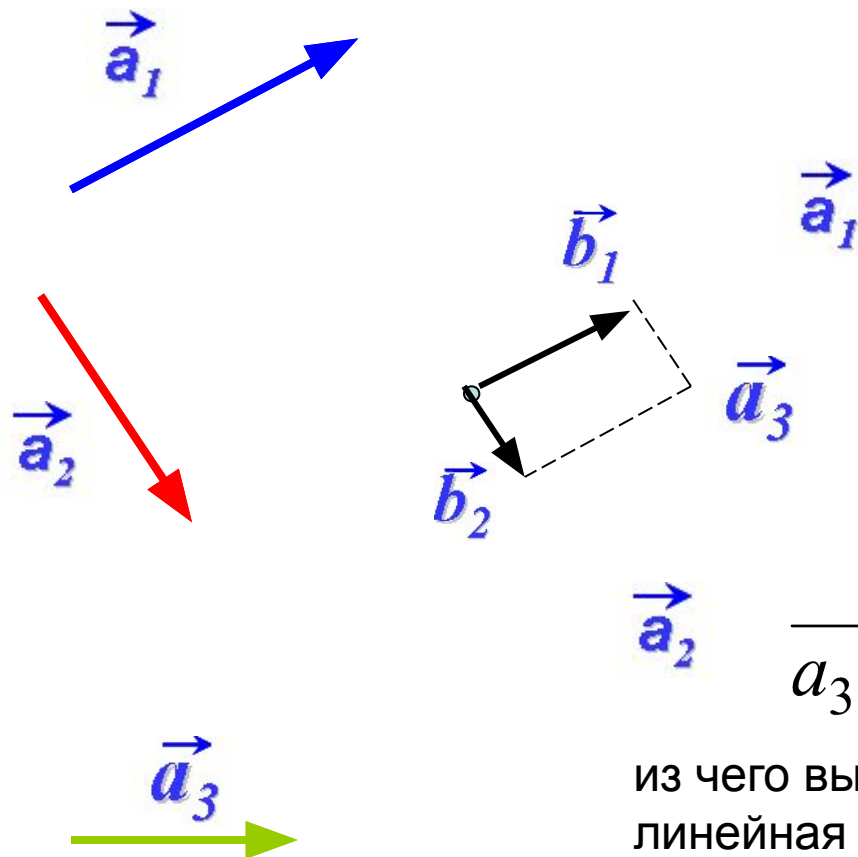
Тогда по теореме 1 один из векторов есть линейная комбинация двух остальных, и, значит, данные три вектора компланарны.



§ 3. Линейная зависимость векторов

Достаточность.

Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ компланарны, и пусть вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарны.



$$\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 \parallel \vec{b}_1 &\Rightarrow \vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \parallel \vec{b}_2 &\Rightarrow \vec{b}_2 = \lambda_2 \vec{a}_2 \end{aligned}$$

$$\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

из чего вытекает (вследствие теоремы 1)
линейная зависимость векторов

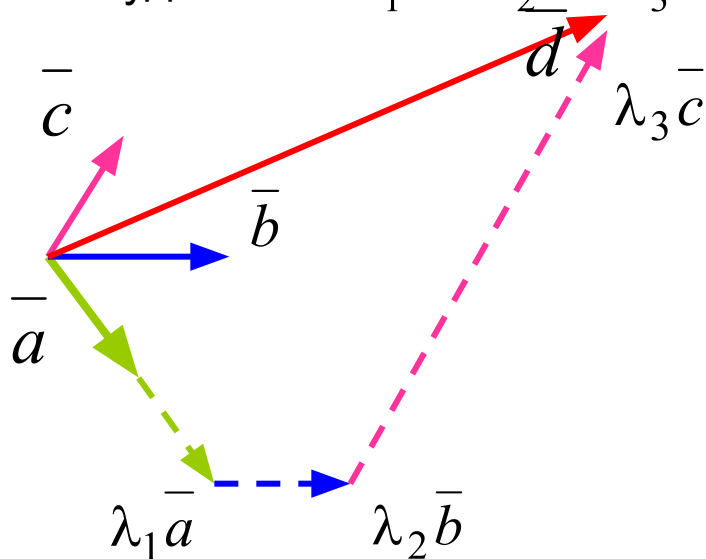


§ 3. Линейная зависимость векторов

Теорема 5. Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Действительно, можно подобрать, причем единственным образом, такие числа

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, что будет $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$.



Теорема 6. Если среди векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ имеется хотя бы один нулевой вектор, то вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависимы.



§ 3. Линейная зависимость векторов

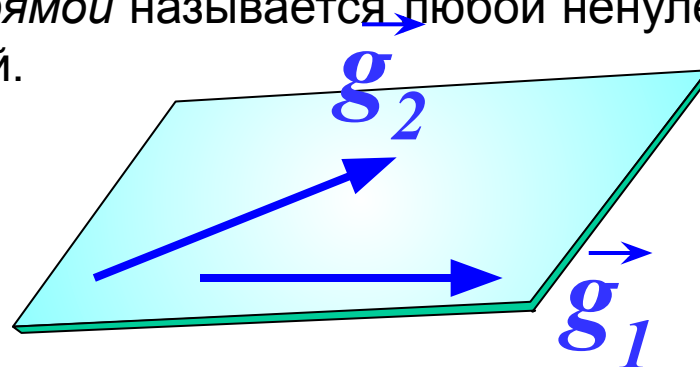
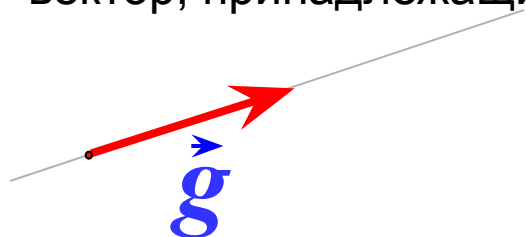
Свойства линейно независимых векторов:

- Один вектор линейно независим тогда и только тогда, когда он ненулевой.
- Два вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они неколлинеарны.
- Три вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они некомпланарны.



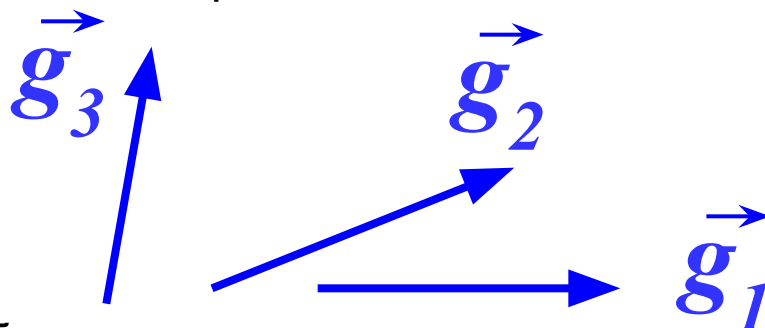
§ 4. Базис. Координаты вектора в базисе.

Определение 1. *Базисом на прямой* называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой.



Определение 2. *Базисом на плоскости* называется любая пара линейно независимых векторов, лежащих на этой плоскости.

Определение 3. *Базисом в пространстве* называется любая тройка линейно независимых векторов.

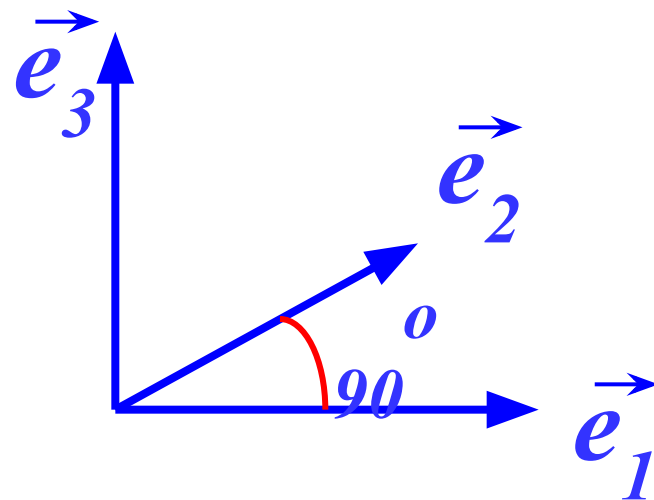
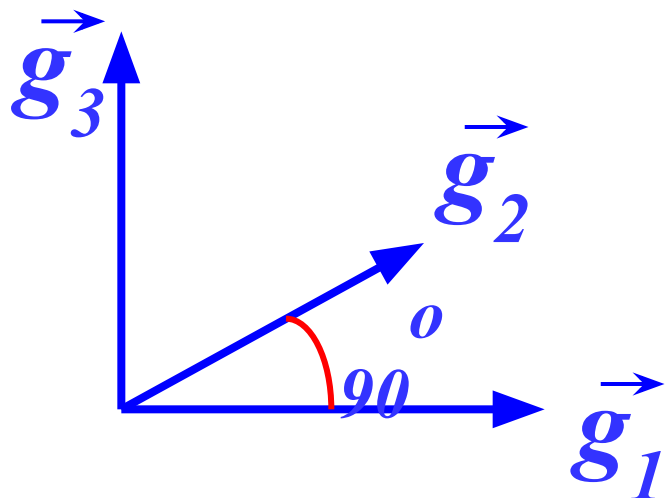


Будем обозначать базис в пространстве, составленный из линейно независимых векторов, как $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.



§ 4. Базис. Координаты вектора в базисе.

Определение 4. Базис называется *ортгональным*, если образующие его вектора попарно перпендикулярны.



Определение 5. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если образующие его вектора имеют единичную длину.

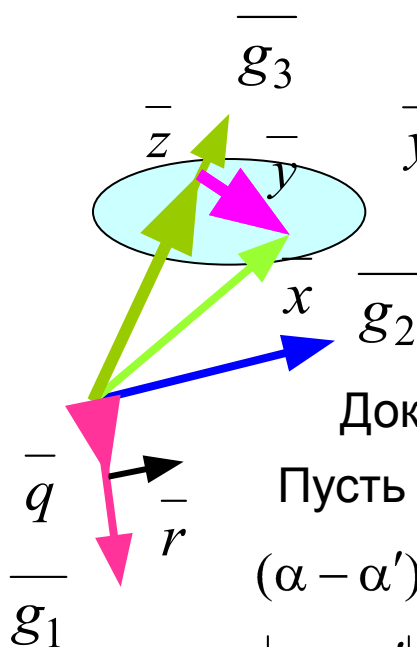
$$\begin{aligned} |\vec{e}_1| &= 1 \\ |\vec{e}_2| &= 1 \\ |\vec{e}_3| &= 1 \end{aligned}$$



§ 4. Базис. Координаты вектора в базисе.

Теорема 1. Любой вектор $\vec{x}$ в пространстве с базисом $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ может быть представлен, и причем единственным способом, в виде $x = \alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3$, где α, β, γ – некоторые числа.

Доказательство. Докажем вначале, что такие числа существуют.



$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, и в силу коллинеарности $\vec{z} = \gamma \vec{g}_3$.
 $\vec{y} = \vec{q} + \vec{r}$, и в силу коллинеарности $\vec{q} = \alpha \vec{g}_1, \vec{r} = \beta \vec{g}_2$

Следовательно, $\vec{y} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2$ и

$$\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3.$$

Докажем единственность разложения по данному базису.

Пусть $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3; \vec{x} = \alpha' \vec{g}_1 + \beta' \vec{g}_2 + \gamma' \vec{g}_3$.

$$(\alpha - \alpha') \vec{g}_1 + (\beta - \beta') \vec{g}_2 + (\gamma - \gamma') \vec{g}_3 = 0,$$

$$|\alpha - \alpha'| + |\beta - \beta'| + |\gamma - \gamma'| \neq 0$$

Но это условие и означает, что вектора $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ являются линейно зависимыми и не могут образовывать базис. Это, в свою очередь, доказывает единственность разложения



§ 4. Базис. Координаты вектора в базисе.

Определение 6. Числа α, β, γ в разложении $\bar{x} = \alpha \bar{g}_1 + \beta \bar{g}_2 + \gamma \bar{g}_3$ называются *координатами* вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3\}$.

Координаты – величины скалярные.

Для краткой записи вектора $\bar{x} = \alpha \bar{g}_1 + \beta \bar{g}_2 + \gamma \bar{g}_3$ в координатном представлении будем использовать следующую форму: $\bar{x}\{\alpha, \beta, \gamma\}$, т. е. каждому вектору в данном базисе можно поставить во взаимно однозначное соответствие матрицу-строку.



§ 5. Действия с векторами в координатном представлении.

В каждом конкретном базисе $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\}$ каждый вектор находится во взаимно-однозначном соответствии с упорядоченной тройкой чисел α, β, γ – своими координатами. Возникает вопрос о том, как выполнять операции с векторами в координатном представлении.

С другой стороны, ранее были изучены матрицы и операции над ними, и целесообразно было бы свести операции с векторами в координатном представлении к матричным операциям.

Теорема 1. Два вектора

$$\overline{x} = \xi_1 \overline{g_1} + \xi_2 \overline{g_2} + \xi_3 \overline{g_3} \quad \text{и} \quad \overline{y} = \eta_1 \overline{g_1} + \eta_2 \overline{g_2} + \eta_3 \overline{g_3}$$

равны тогда и только тогда, когда равны матрицы координат

$$\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}.$$



§ 5. Действия с векторами в координатном представлении.

Теорема 2. Пусть в некотором базисе даны два вектора $\bar{x}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ и $\bar{y}\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$. Тогда в этом базисе

- 1) $\alpha \bar{x} = \{\alpha \xi_1, \alpha \xi_2, \alpha \xi_3\},$
- 2) $\bar{x} + \bar{y} = \{\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \xi_3 + \eta_3\}.$

Иными словами: *при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число; при сложении векторов складываются их соответствующие координаты.*



§ 5. Действия с векторами в координатном представлении.

Тема 3. Два вектора

$$\bar{x} = \xi_1 \bar{g}_1 + \xi_2 \bar{g}_2 + \xi_3 \bar{g}_3 \quad \bar{y} = \eta_1 \bar{g}_1 + \eta_2 \bar{g}_2 + \eta_3 \bar{g}_3 \quad \text{на}$$

плоскости линейно зависимы тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты в некотором базисе пропорциональны, т. е.

Доказательство.
$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Необходимость. Пусть вектора $\bar{x}$ и $\bar{y}$ линейно зависимы, тогда по теореме 3.1 $\bar{x} = \lambda \bar{y}$, или в координатной форме
$$\begin{cases} \xi_1 = \lambda \eta_1 \\ \xi_2 = \lambda \eta_2 \end{cases}.$$
 Исключив λ из этих уравнений, получаем

$$\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0, \quad \text{что и означает равенство нулю определителя.}$$

Достаточность. Пусть
$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Тогда} \quad \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0,$$

$$\text{откуда} \quad \frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{\xi_2}{\eta_2}. \quad \text{Таким образом, вектора } \bar{x} \text{ и } \bar{y}$$

пропорциональны, а, значит, и линейно зависимы.



§ 5. Действия с векторами в координатном представлении.

Теорема 4. Три вектора в пространстве

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3, \quad \vec{y} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3 \quad \text{и} \quad \vec{z} = \kappa_1 \vec{g}_1 + \kappa_2 \vec{g}_2 + \kappa_3 \vec{g}_3$$

линейно зависимы тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Следствие. Равенства $\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0$ и $\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{vmatrix} = 0$

соответственно являются необходимыми и достаточными условиями коллинеарности пары векторов на плоскости и компланарности тройки векторов в пространстве.



§ 5. Действия с векторами в координатном представлении.

Пример 1. Показать, что вектора $\bar{a}\{3; -1; 2\}$, $\bar{b}\{1; -2; 0\}$, $\bar{c}\{-1; 7; 1\}$ образуют базис в трехмерном пространстве.

Решение.

Вычислим определитель, столбцы которого представляют координаты векторов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Так как определитель отличен от нуля, то столбцы линейно независимы, т. е. указанные вектора образуют базис.



§ 5. Действия с векторами в координатном представлении.

Пример 2.

Разложить вектор $\bar{c}$ по базису $\{\bar{p}; \bar{q}; \bar{r}\}$, где $\bar{c}\{11; -6; 5\}$,
 $\bar{p}\{3; -2; 1\}$, $\bar{q}\{-1; 1; -2\}$, $\bar{r}\{2; 1; -3\}$.

Решение.

Разложим вектор $\bar{c}$ по базису $\{\bar{p}; \bar{q}; \bar{r}\}$ с неопределенными коэффициентами α, β, γ :

$$\bar{c} = \alpha \bar{p} + \beta \bar{q} + \gamma \bar{r}.$$

В координатах это разложение представляет собой систему трех уравнений относительно α, β, γ :

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta + 2\gamma = 11 \\ -2\alpha + \beta + \gamma = -6 \\ \alpha - 2\beta - 3\gamma = 5 \end{cases}$$

Имеем:

$\Delta = 8$; $\Delta_\alpha = 16$; $\Delta_\beta = -24$; $\Delta_\gamma = 8$; откуда по правилу Крамера

$$\alpha = 2; \quad \beta = -3; \quad \gamma = 1.$$

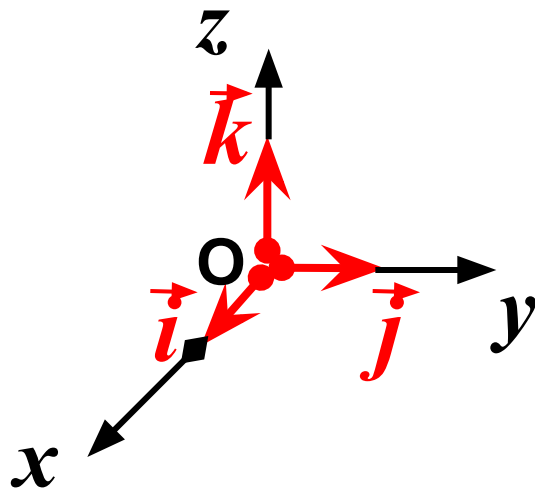
Ответ: $\bar{c} = 2\bar{p} - 3\bar{q} + \bar{r}$.



§ 6. Декартова система координат.

Определение 1. Совокупность базиса $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\}$ и точки O , в которую помещены начала всех базисных векторов, называется *декартовой системой координат* и обозначается $\{O, \overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\}$.

Определение 2. Система координат $\{O, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, состоящая из ортонормированного ортогонального базиса и точки O , называется *прямоугольной декартовой системой координат*.



Ox – ось абсцисс

Oy – ось ординат

Oz – ось аппликат



§ 6. Декартова система координат.



Рене́ Дека́рт
1596 — 1650,
— французский математик,,
создатель аналитической
геометрии и современной
алгебраической символики,

Родился в городе Лаэ (ныне г. Декарт).

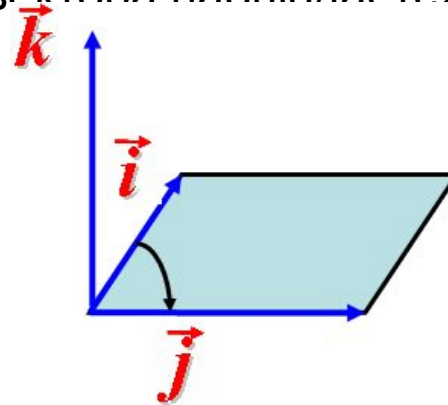
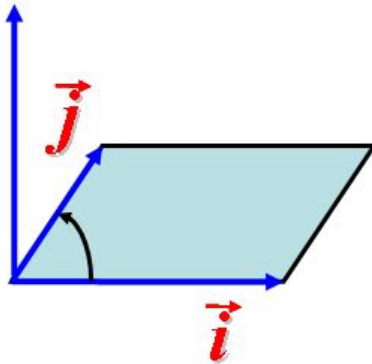
Декарт ввел математическую
символику, близкую к современной.
Коэффициенты он обозначал $a, b, c, \dots$, а
неизвестные — x, y, z . Натуральный
показатель степени принял
современный вид. Появилась черта над
подкоренным выражением.



§ 6. Декартова система координат.

$$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$$

Определение. Упорядоченная тройка ортов называется *правой*, если при совмещении начал векторов кратчайший поворот первого вектора ко второму с конца третьего вектора наблюдается против часовой стрелки. $\vec{k}$



Определение. Упорядоченная тройка ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ называется *левой*, если при совмещении начал векторов кратчайший поворот первого вектора ко второму с конца третьего вектора наблюдается по часовой стрелки.



§ 6. Декартова система координат.

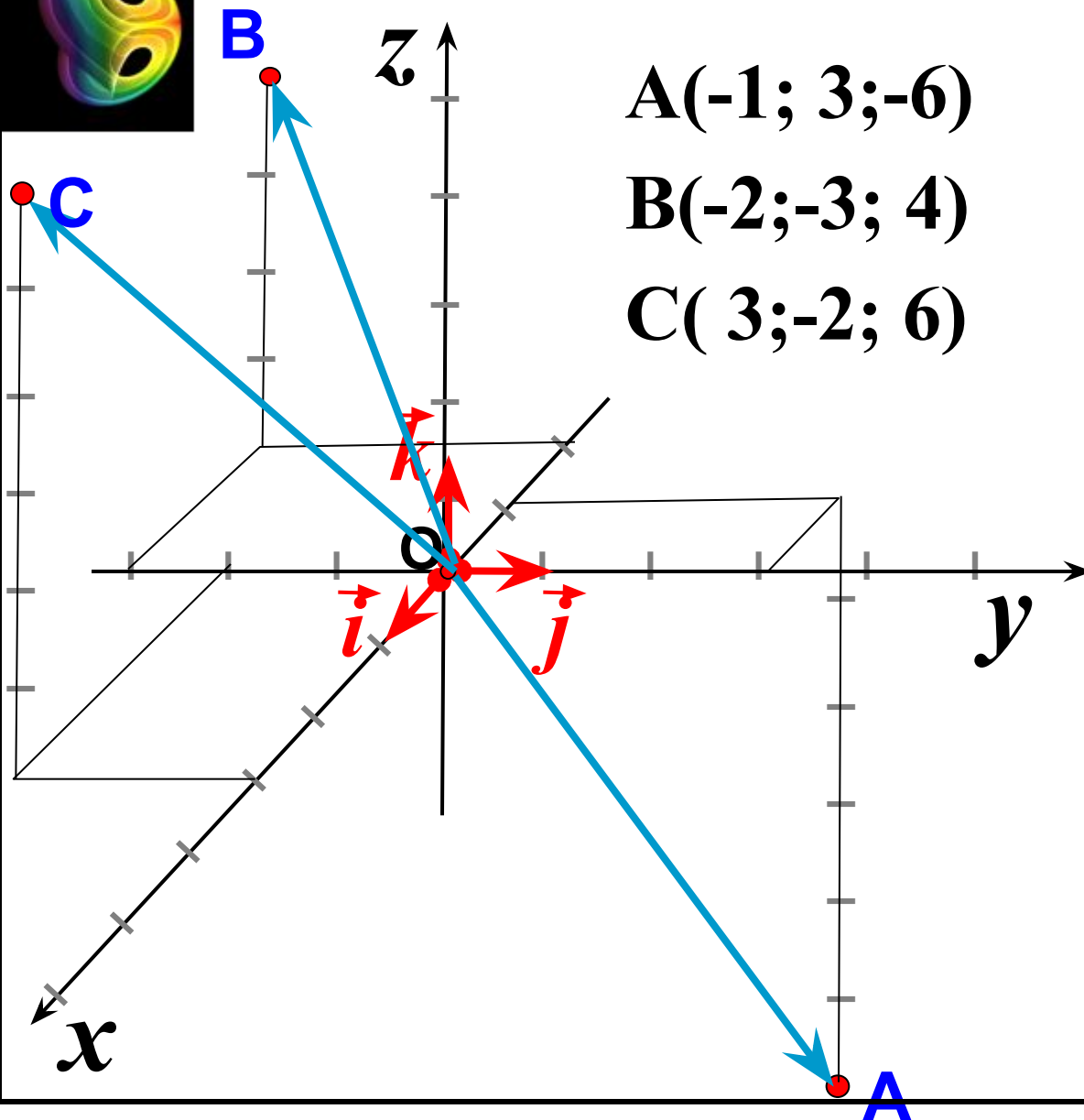
Если задана система координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, то произвольной точке M в пространстве можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор $\bar{r}$, начало которого находится в точке O , а конец в точке M .

Определение 3. Вектор $\bar{r} = \overline{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M в системе координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

Определение 4. Координаты радиус-вектора точки M называются *координатами точки* M в системе координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.



§ 6. Декартова система координат.



$$A(-1; 3; -6)$$

$$B(-2; -3; 4)$$

$$C(3; -2; 6)$$

$$\vec{OA}\{-1; 3; -6\}$$

$$\vec{OB}\{-2; -3; 4\}$$

$$\vec{OC}\{3; -2; 6\}$$



§ 6. Декартова система координат.

Задача 1. Выразить координаты вектора $\vec{AB}$ через координаты его начала A и конца B.

Из $\triangle AOB$, $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB}$

$B(x_2; y_2; z_2)$

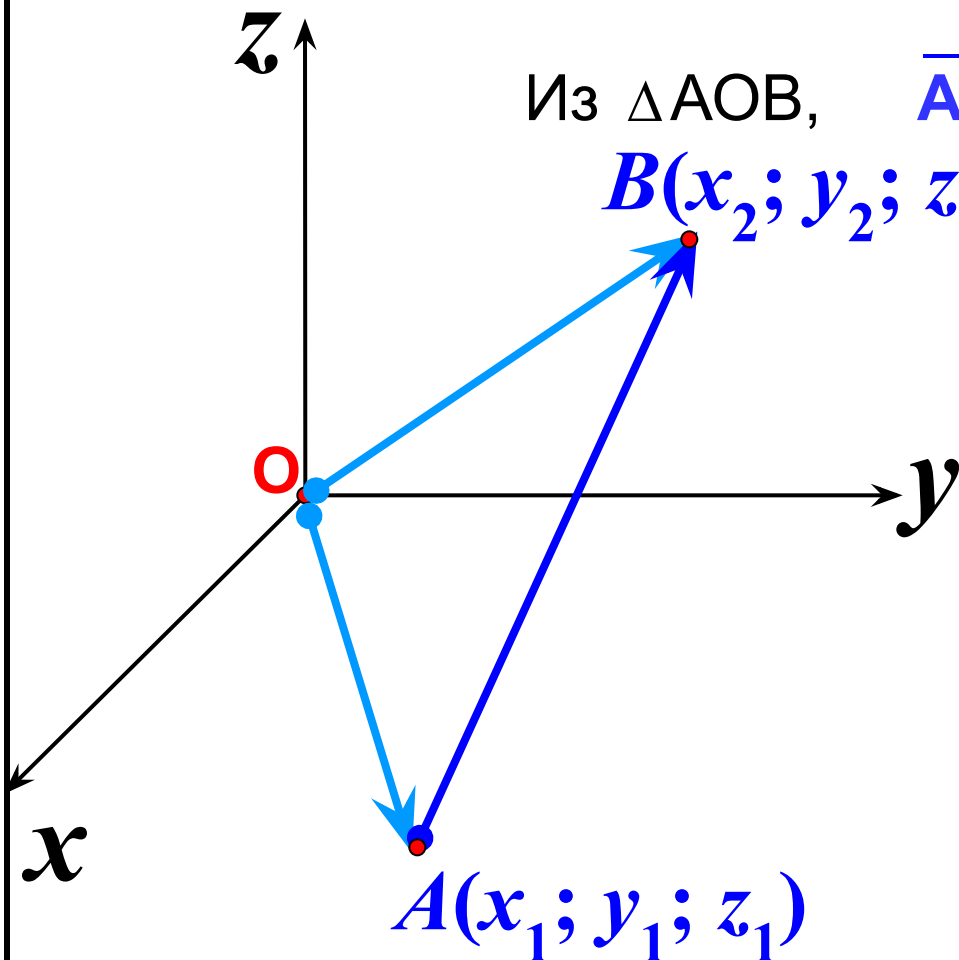
$$\vec{OA}\{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$+\vec{-OA}\{-x_1; -y_1; -z_1\}$$

$$+\vec{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{AB}\{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$$





§ 6. Декартова система координат.

Задача 2

(условие коллинеарности двух векторов в координатной форме).

Пусть два вектора $\vec{a} \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} \{b_x, b_y, b_z\}$ коллинеарны.

Тогда по теореме 3.1 существует такое число λ , при котором

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}, \text{ т. е. } a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \lambda (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}),$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \lambda b_x \\ a_y &= \lambda b_y \\ a_z &= \lambda b_z \end{aligned} \right\} \text{ или } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$$

– условие коллинеарности двух векторов.

Если два вектора коллинеарны, то их координаты пропорциональны.



§ 6. Декартова система координат.

Пример 1. Коллинеарны ли вектора

$$\vec{a} \{2; 6; -3\}; \vec{b} \{6; 18; -9\}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{6}{18} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3} \quad \vec{b} = 3\vec{a} \text{ или } \vec{a} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

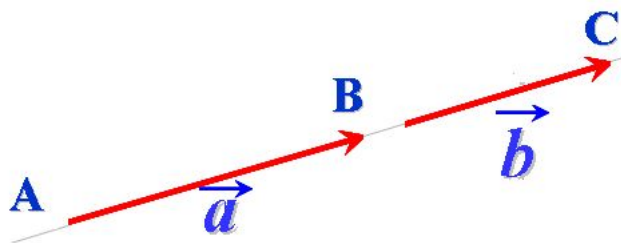


§ 6. Декартова система координат.

Пример 2.

В декартовой системе координат $A(1,3,0)$, $B(2,0,-1)$, $C(3,-3,-2)$. Доказать, что точки A , B , C лежат на одной прямой.

Решение



Очевидно, точки A , B , C лежат на одной прямой, если векторы $\overrightarrow{AB}\{\xi_1, \eta_1, \kappa_1\}$ и $\overrightarrow{AC}\{\xi_2, \eta_2, \kappa_2\}$ коллинеарны.

Для этого необходимо выполнение условия:

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Отсюда следует (теорема 5.2), что координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ должны быть пропорциональны.

$$\overrightarrow{AB}\{1, -3, -1\}; \overrightarrow{AC}\{2, -6, -2\}; \quad \frac{1}{2} = \frac{-3}{-6} = \frac{-1}{-2}.$$

Таким образом, точки A , B , C лежат на одной прямой.



§ 6. Декартова система координат.

Задача 3

(деление отрезка в данном отношении). В декартовой системе координат заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.
Найти координаты точки $M(x, y, z)$, делящей отрезок AB в отношении λ :

$$|\overline{AM}| / |\overline{MB}| = \lambda.$$

Решение

Векторы $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$ коллинеарны, сонаправлены, отношение их длин равно λ .

Тогда $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$.

Переходя к равенству соответствующих координат, получим:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y); \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

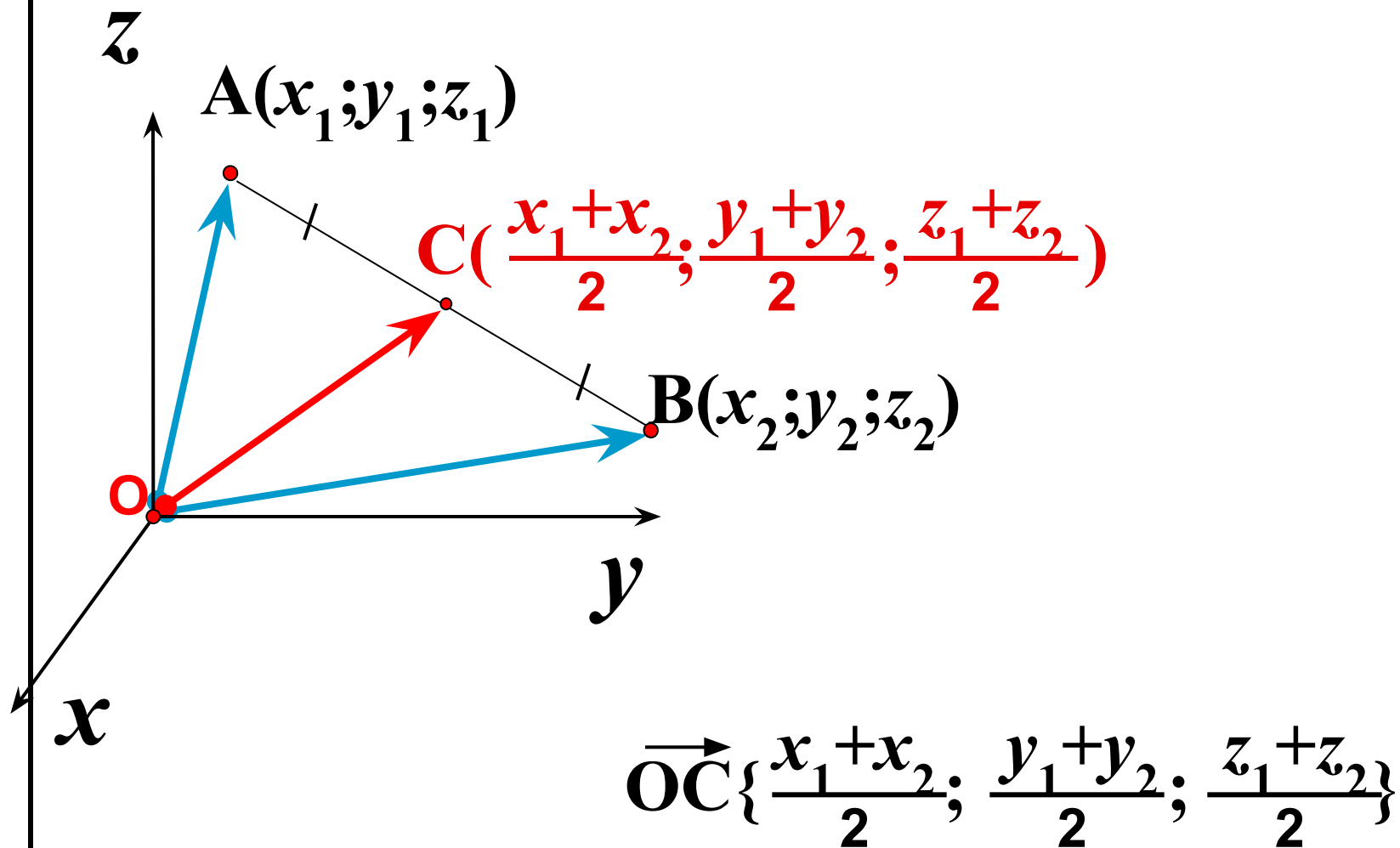
Выражая отсюда x, y, z , получим для координат точки M :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$



§ 6. Декартова система координат.

В частности, координаты середины отрезка ($\lambda=1$) равны полусумме соответствующих координат его концов.



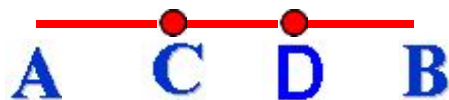


§ 6. Декартова система координат.

Пример.

Разделить отрезок AB ($A(3,5; 1)$, $B(2; 2)$) на три равные части.

Решение



$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

$$\lambda_c = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|} = \frac{1}{2},$$

$$x_c = \frac{3,5 + 0,5 \cdot 2}{1 + 0,5} = 3,$$

$$y_c = \frac{1 + 0,5 \cdot 2}{1 + 0,5} = \frac{4}{3}.$$

$$\lambda_D = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{DB}|} = 2,$$

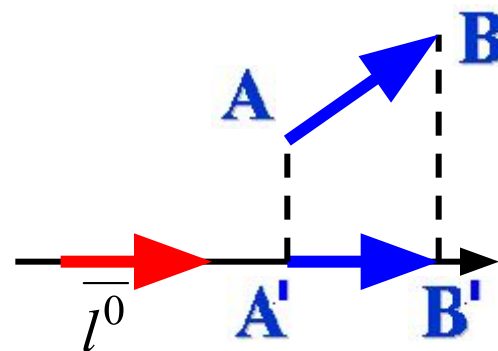
$$x_D = \frac{3,5 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = 2,5;$$

$$y_D = \frac{1 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{5}{3}.$$



§ 7. Проекция вектора на ось.

Пусть вектор $\overline{AB}$ лежит на некоторой оси l . Направление орта $\overline{l^0}$ соответствует направлению оси.



Определение 1. *Проекцией вектора*, лежащего на оси, на эту ось называется число, по абсолютной величине равное длине вектора и взятое со знаком плюс, если направление вектора совпадает с направлением оси и со знаком минус, если они противоположны.

Пусть вектор $\overline{AB}$ не лежит на некоторой оси l . Из точек A и B опустим перпендикуляры на ось. Вектор $\overline{A'B'}$ называется *компонентой вектора* по оси l . $\overline{AB}$

Определение 2. *Проекцией вектора, не лежащего на оси l* , на эту ось называется проекция его компоненты по оси l на эту же ось.

Проекция вектора на ось обычно обозначается так: $\text{пр}_l \overline{AB}$.



§ 7. Проекция вектора на ось.

Свойства проекций вектора на ось:

1. Проекция вектора на ось равна произведению длины вектора на косинус угла между вектором и осью:

$$\text{пр}_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos \theta, \text{ где } \theta - \text{угол между вектором и осью.}$$

2. Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций этих векторов на эту же ось, т. е. $\text{пр}_l(\overline{a} + \overline{b}) = \text{пр}_l \overline{a} + \text{пр}_l \overline{b}.$

3. Проекция на ось вектора, умноженного на число, равна произведению проекции вектора на это число, т. е.

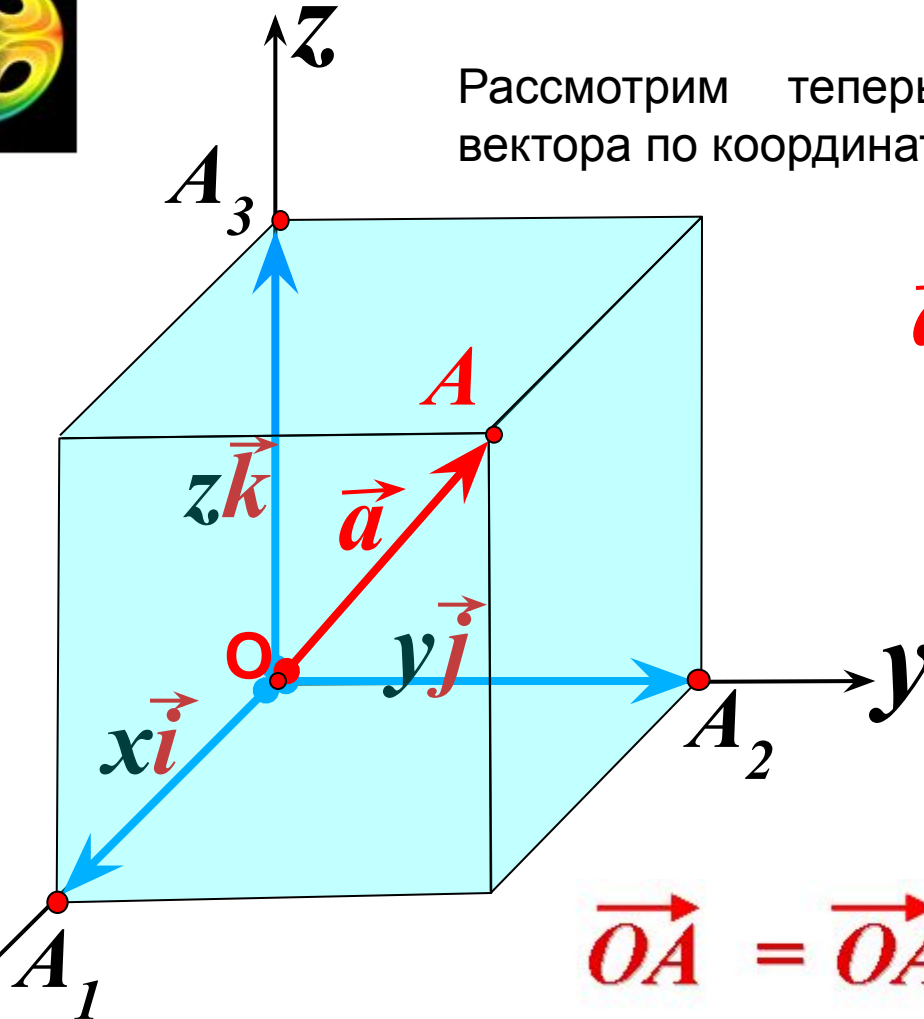
$$\text{пр}_l(\lambda \overline{a}) = \lambda \text{пр}_l \overline{a}.$$

4. Проекции на ось двух равных векторов равны между собой.



§ 7. Проекция вектора на ось.

Рассмотрим теперь вопрос о разложении вектора по координатным осям.



$$\vec{a} \{x;y;z\}$$

$$\vec{OA}_1 = x\vec{i}$$

$$\vec{OA}_2 = y\vec{j}$$

$$\vec{OA}_3 = z\vec{k}$$

$$\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3$$

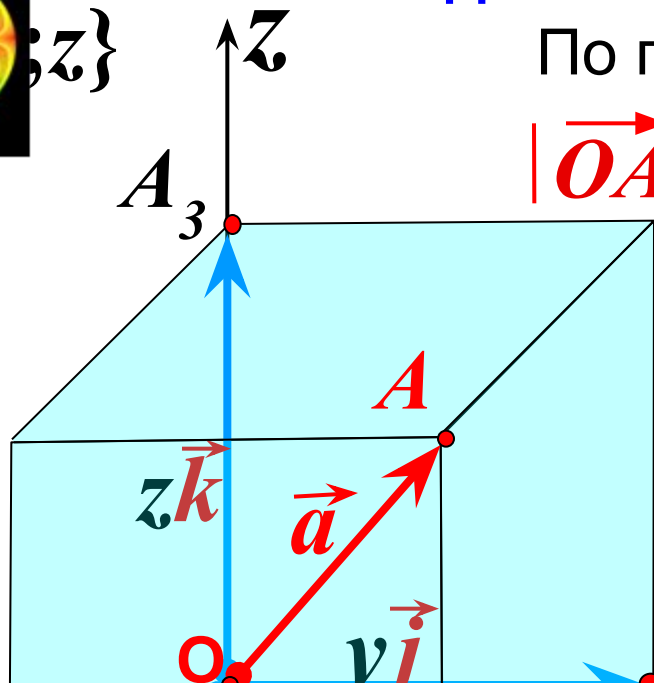
Такое представление вектора называется разложением его на компоненты (или составляющие) по координатным осям.



Вычисление длины вектора по его координатам

По правилу параллелепипеда

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{OA_1}|^2 + |\vec{OA_2}|^2 + |\vec{OA_3}|^2$$



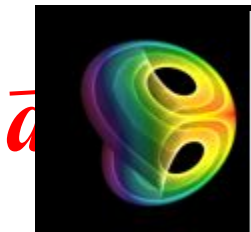
$$|\vec{OA_1}| = |x\vec{i}| = |x|$$

$$|\vec{OA_2}| = |y\vec{j}| = |y|$$

Длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат.

$$|\vec{a}|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}$$

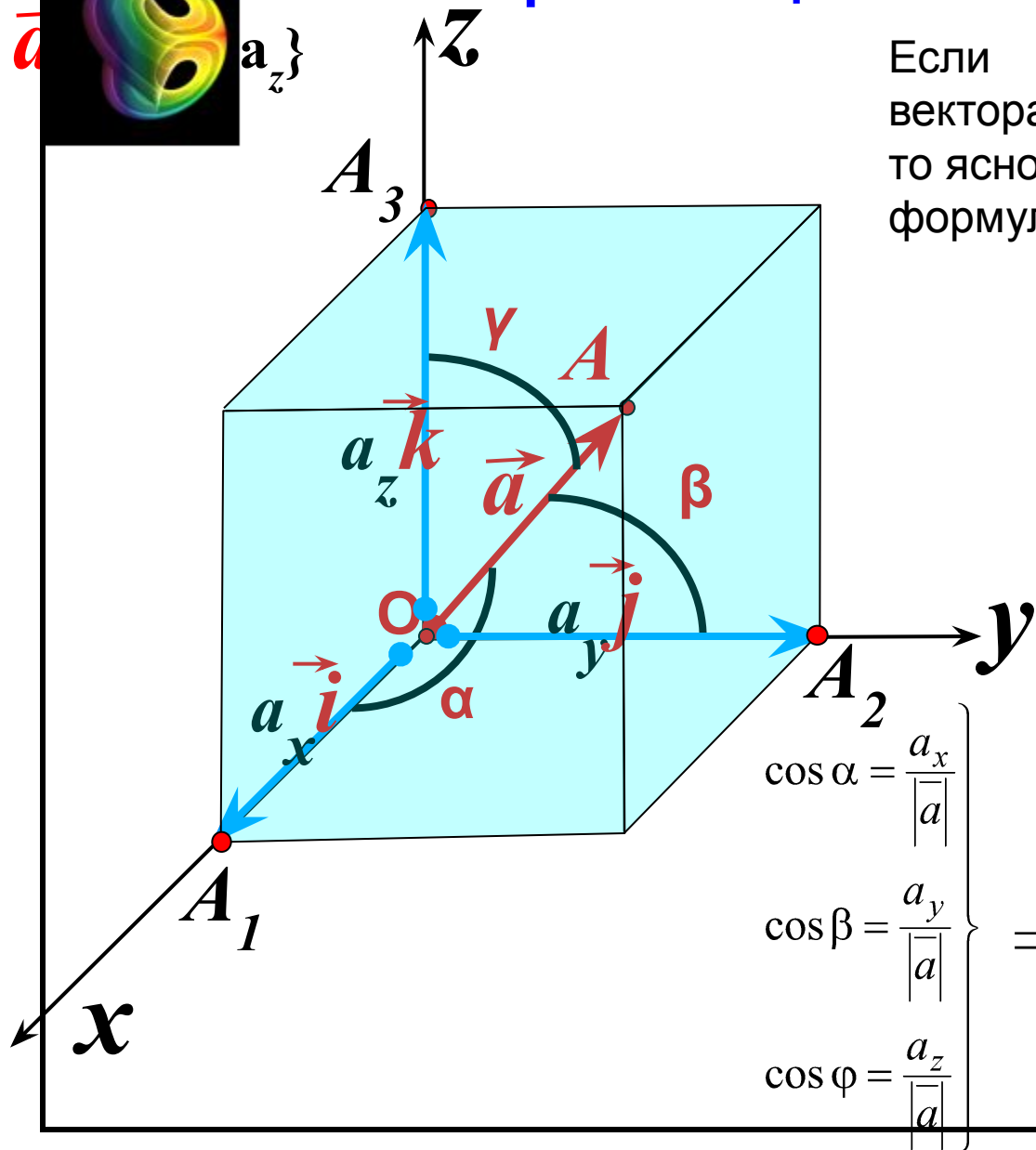


Направляющие косинусы вектора.

Если $a_x; a_y; a_z$ – проекции вектора на координатные оси, то ясно, что имеют место формулы:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= |\vec{a}| \cos \alpha \\ a_y &= |\vec{a}| \cos \beta \\ a_z &= |\vec{a}| \cos \gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_x}{|\vec{a}|} \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{|\vec{a}|} \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{|\vec{a}|} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$





§ 7. Проекция вектора на ось.

Пример 1. Даны точки $A(1, -1, 2)$ и $B(3, 2, 3)$.

Найти: Координаты вектора $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} \{3 - 1, 2 - (-1), 3 - 2\} = \overline{AB} \{2, 3, 1\}.$$

Найти: Длину вектора $\overline{AB}$:

Так как $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, значит $|\overline{AB}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$.

Найти: Разложение вектора $\overline{AB}$ по базису;

Так как $\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}$, значит $\overline{AB} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$.

Найти: Направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Найти: Единичный вектор (орт), соответствующий вектору $\overline{AB}$:

Так как $\overline{a^0} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$, значит $\overline{a^0} \left\{ \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right\}$.



§ 7. Проекция вектора на ось.

Пример 2.

Дан вектор $\overrightarrow{AB} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ и точки $B(1, 2, -1)$ и $C(2, 2, 5)$.

Найти координаты вектора $\overrightarrow{AC}$.

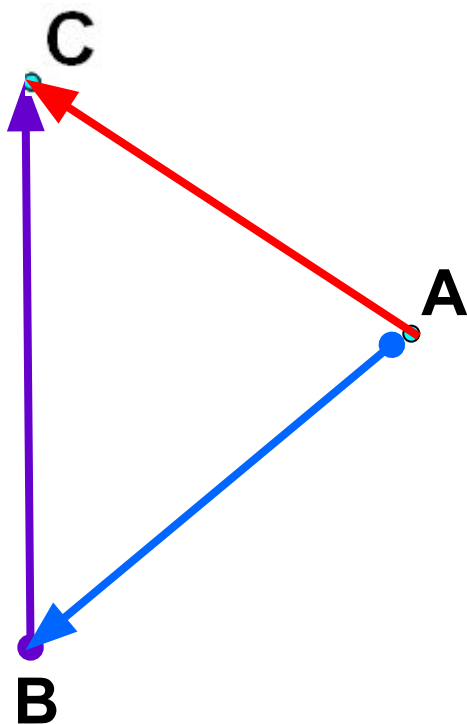
Решение

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC} \{1, 0, 6\}.$$

$$\overrightarrow{AC} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k} + \bar{i} + 6\bar{k} = 2\bar{i} + \bar{j} + 8\bar{k}.$$





§ 7. Проекция вектора на ось.

Пример 3.

Выяснить, при каких значениях параметров λ и μ вектора $\vec{a} = \lambda\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \mu\vec{k}$ коллинеарны.

Решение

Два вектора коллинеарны, если существует некая константа c такая, что имеет место соотношение

$$\vec{a} = c\vec{b}.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} = c(\vec{i} + \vec{j} + \mu\vec{k}),$$

откуда

$$(\lambda - c)\vec{i} + (2 - c)\vec{j} + (3 - \mu c)\vec{k} = 0.$$

Так как орты линейно независимы, ибо они представляют собою базис, то должны обращаться в нуль коэффициенты этой линейной комбинации, т. е.

$$\begin{cases} \lambda - c = 0 \\ 2 - c = 0 \\ 3 - \mu c = 0 \end{cases}, \quad \text{откуда} \quad \lambda = 2, \mu = \frac{3}{2}.$$



§ 8. Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

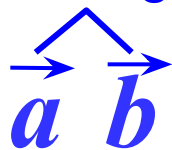
Если хотя бы один из векторов равен нулю, то скалярное произведение этих векторов равно нулю (по определению).

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Скаляр – лат. *scale* – лестница, шкала.

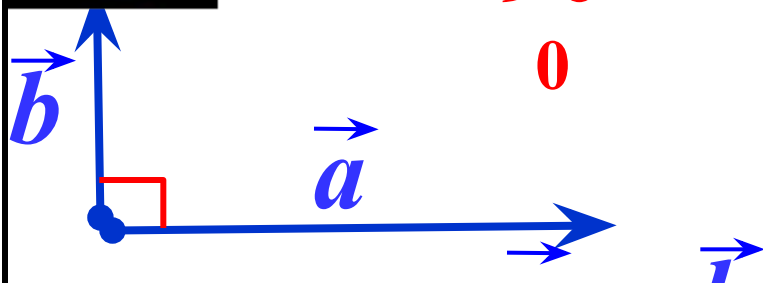
Ввел в 1845г. У. Гамильтон, ирландский математик.

§ 8. Скалярное произведение векторов.



90°

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$



Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

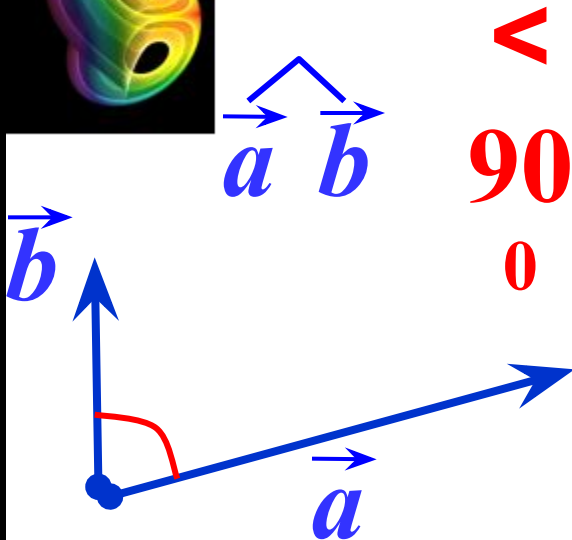
Обратно: если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

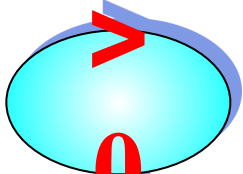
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$



§ 8. Скалярное произведение векторов.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$



 > 0

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый**.

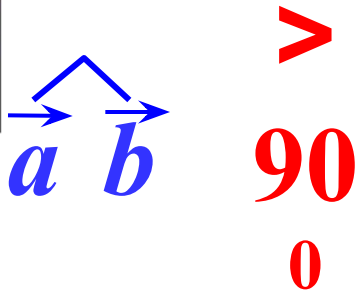
$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ образуют острый угол}$$



 $< 90^\circ$

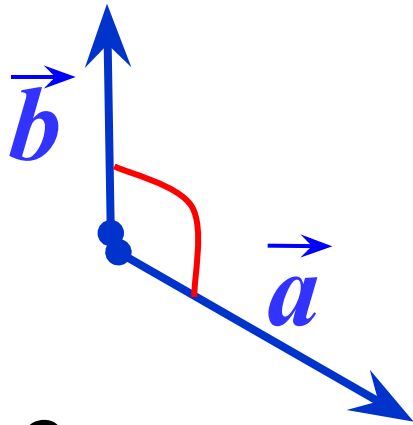


§ 8. Скалярное произведение векторов.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

<
0



Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда , когда угол между векторами **тупой**.

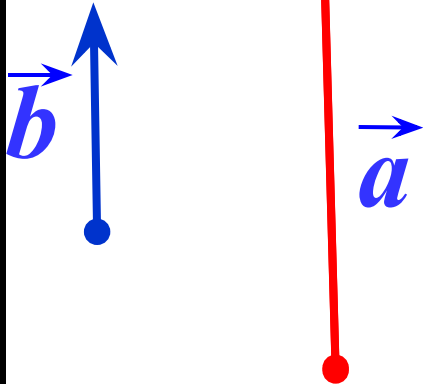
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \iff \vec{a} \cdot \vec{b} > 90$$

0

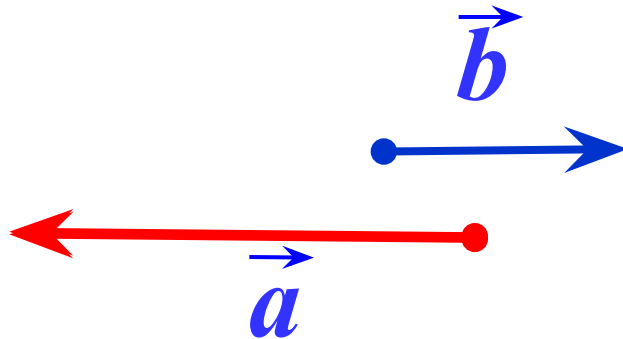


§ 8. Скалярное произведение векторов.

Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$



Если $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

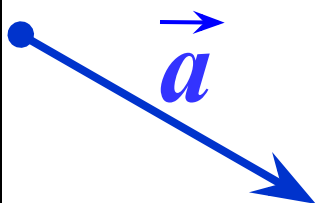
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

§ 8. Скалярное произведение векторов.



$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \vec{a} \quad \vec{a} \\ \searrow \end{array} = \mathbf{0}^0$$



$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos \mathbf{0}^0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется
скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$

Таким образом, $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ откуда $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Длина вектора равен квадратному корню из его скалярного квадрата.



§ 8. Скалярное произведение векторов.

Свойства скалярного произведения:

$$1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Действительно, $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$, тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Отсюда следует формула для нахождения проекции одного вектора на другой:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

2) Переместительное или коммутативное свойство: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$

3) Сочетательное (ассоциативное) свойство: $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}).$

4) Распределительное (дистрибутивное) свойство относительно сложения векторов:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$



§ 8. Скалярное произведение векторов.

Выведем формулу скалярного произведения в координатной форме.

$$\vec{a} \{a_x; a_y; a_z\} \quad \vec{b} \{b_x; b_y; b_z\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

т.к.

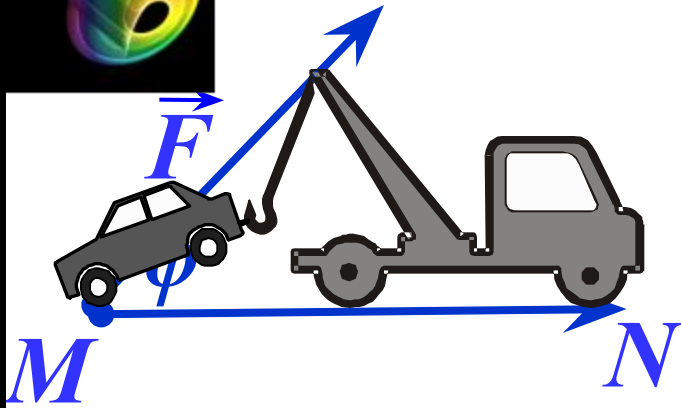
$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

В частности,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$



§ 8. Скалярное произведение векторов.



Скалярное произведение векторов встречается в физике. Например, из курса механики известно, что работа A постоянной силы $\vec{F}$ при перемещении тела из точки M в точку N равна произведению силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{MN}$ на косинус угла между ними.

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{MN}| \cos \phi$$

$$A = \vec{F} \cdot \vec{MN}$$



§ 8. Скалярное произведение векторов.

Скалярное произведение двух векторов позволяет решить следующие задачи векторной алгебры:

1. Нахождение угла между двумя векторами.

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \arccos \frac{\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \arccos \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Отсюда нетрудно получить **условие ортогональности (перпендикулярности)** двух векторов в координатной форме:

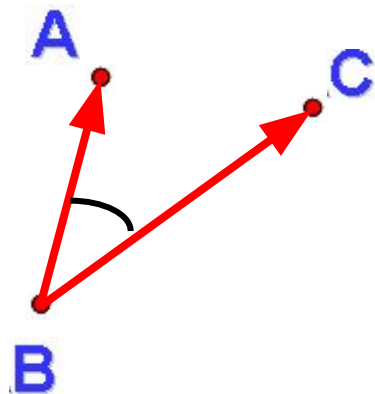
$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$



§ 8. Скалярное произведение векторов.

Пример 1. Даны вершины треугольника: $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$, $C(0; 0; 5)$. Найти $\angle ABC$.

Решение



$$\cos \angle ABC = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|}.$$

$$\overline{BA}\{1, -2, 2\}, \quad |\overline{BA}| = \sqrt{1+4+4} = 3,$$

$$\overline{BC}\{-1, -1, 4\}, \quad |\overline{BC}| = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2},$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = -1 + 2 + 8 = 9,$$

$$\cos \angle ABC = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \angle ABC = 45^\circ.$$

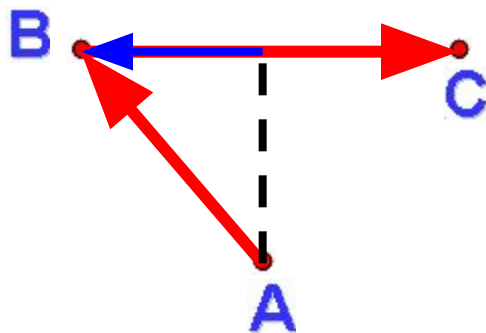


§ 8. Скалярное произведение векторов.

2. Нахождение проекции одного вектора на направление другого

Пример 2. Даны три точки $A(2; 3; 5)$, $B(1; 2; 2)$, $C(3; 5; 4)$. Найти $\text{пр}_{\overline{BC}} \overline{AB}$.

Решение



$$\overline{BC} \{2, 3, 2\}, \quad |\overline{BC}| = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17},$$

$$\overline{AB} \{-1, -1, -3\}, \quad |\overline{AB}| = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11},$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -2 - 3 - 6 = -11,$$

$$\text{пр}_{\overline{BC}} \overline{AB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BC}|} = -\frac{11}{\sqrt{17}}.$$



§ 8. Скалярное произведение векторов.

3. Нахождение длины вектора.

Пример 3. Дан вектор $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 2$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

Найти длину вектора $\vec{a}$.

Решение

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$. Найдем скалярный квадрат вектора $\vec{a}$.

$$\vec{a}^2 = (\vec{m} + \vec{n}) \cdot (\vec{m} + \vec{n}) = \vec{m}^2 + 2\vec{m} \cdot \vec{n} + \vec{n}^2 =$$

$$= |\vec{m}|^2 + 2|\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cos(\vec{m} \wedge \vec{n}) + |\vec{n}|^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{3} + 4 = 8 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 12.$$

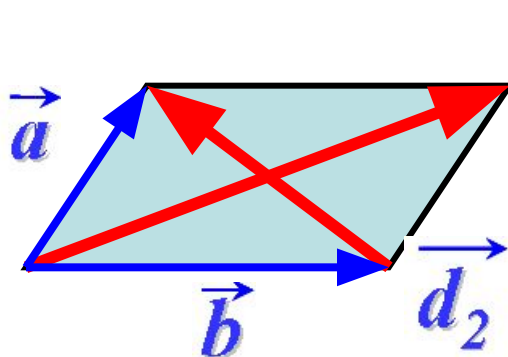
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = 2\sqrt{3}.$$



§ 8. Скалярное произведение векторов.

Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, где $\vec{m}, \vec{n}$ – единичные векторы, угол между которыми равен 60° .

Решение



$$\begin{aligned}\vec{d}_1 &= \vec{a} + \vec{b} & \vec{d}_1 &= 3\vec{m} - \vec{n} \\ \vec{d}_2 &= \vec{a} - \vec{b} & \vec{d}_2 &= \vec{m} + 3\vec{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{d}_1|^2 &= (3\vec{m} - \vec{n}) \cdot (3\vec{m} - \vec{n}) = 9|\vec{m}|^2 - 6\vec{m} \cdot \vec{n} + |\vec{n}|^2 = \\ &= 9|\vec{m}|^2 - 6|\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cos(\vec{m} \wedge \vec{n}) + |\vec{n}|^2 = 9 - 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 1 = 7. & |\vec{d}_1| &= \sqrt{7} \\ |\vec{d}_2|^2 &= (\vec{m} + 3\vec{n}) \cdot (\vec{m} + 3\vec{n}) = |\vec{m}|^2 + 6\vec{m} \cdot \vec{n} + 9|\vec{n}|^2 = 13. \\ & |\vec{d}_2| &= \sqrt{13}\end{aligned}$$



§ 8. Скалярное произведение векторов.

Доказательство ортогональности векторов

Пример 5. При каком значении α ортогональны вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{a} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + 2\vec{k}$.

Решение

Принимая во внимание условие ортогональности двух векторов $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$, получим $1 \cdot 2 + 2 \cdot \alpha + 1 \cdot 2 = 0$. $\alpha = -2$

5) Задачи с механическим содержанием

Пример 6. Даны три постоянные силы $\vec{F}_1\{5; 3; -2\}$, $\vec{F}_2\{2; -4; 6\}$, $\vec{F}_3\{1; 7; 3\}$, приложенные в одной точке. Найти работу равнодействующей этих сил на прямолинейном перемещении из положения $M_1(4,4,6)$ в положение $M_2(7,5,2)$.

Решение

Равнодействующая сила $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$.

Вектор перемещения $\vec{S} = \vec{M}_1 M_2\{3, 1, -4\}$.

Искомая работа $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 8 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot (-4) = 2$.



§ 9. Векторное произведение векторов.

Введем еще одну операцию над векторами. Эта операция существует только в трехмерном векторном пространстве, на плоскости она не определена.

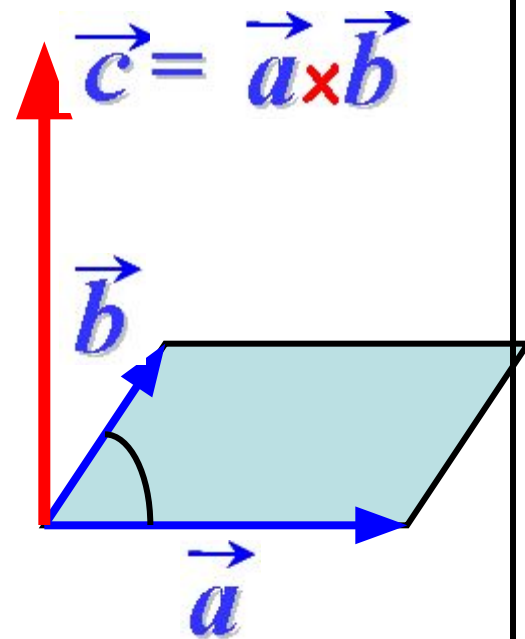
Векторным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий трем требованиям:

1) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$

2) $\vec{c} \perp (\vec{a}, \vec{b})$

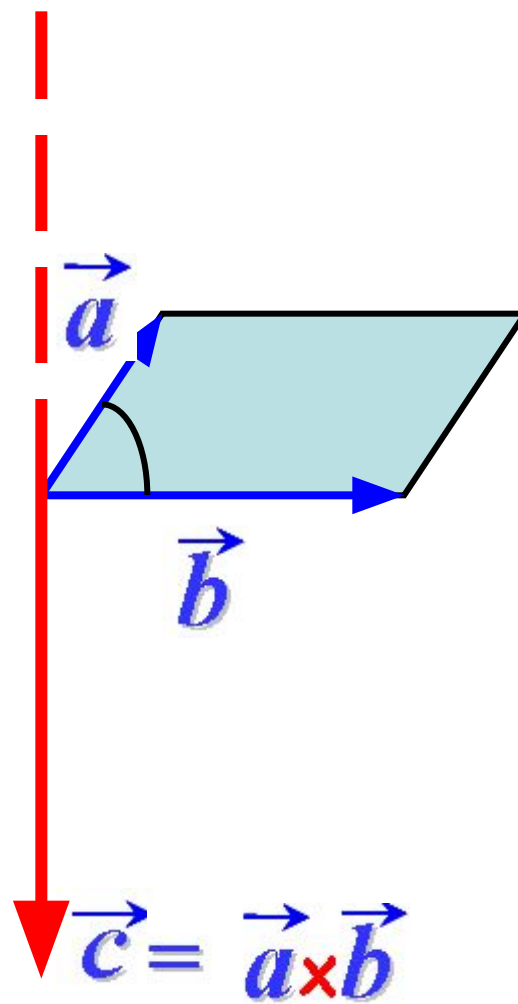
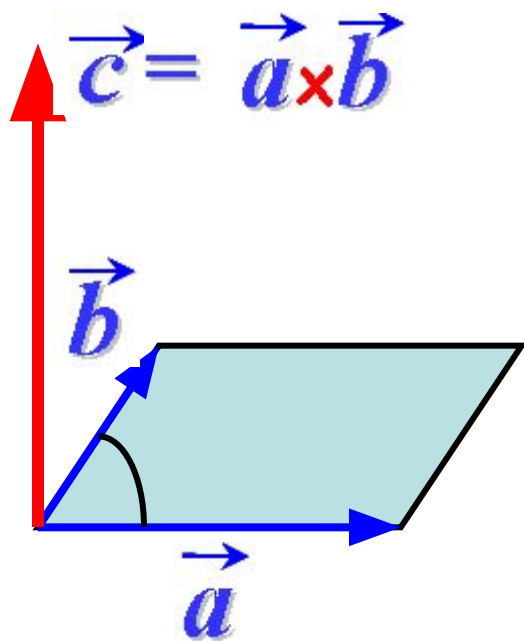
3) Тройка векторов
является правой.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$





§ 9. Векторное произведение векторов.





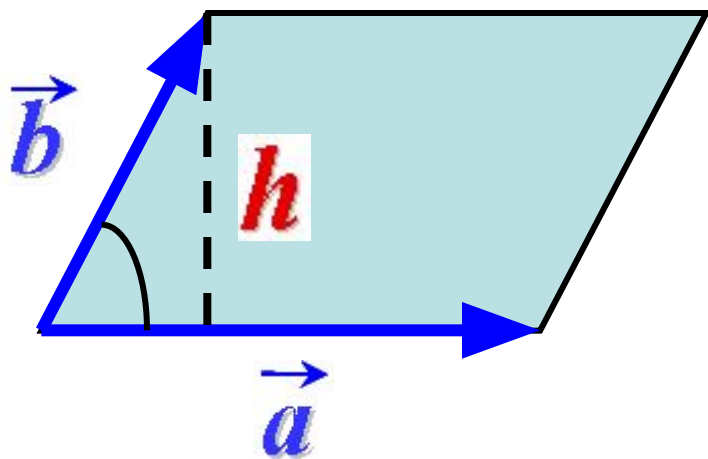
§ 9. Векторное произведение векторов.

Геометрический смысл векторного произведения.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

$$|\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a} \vec{b}}) = h$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot h = S$$



Для неколлинеарных векторов модуль их векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.



§ 9. Векторное произведение векторов.

Свойства векторного произведения:

$$1) \quad \bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}.$$

Свойство очевидно, так как синус – функция нечетная.

2) Свойство сочетательности относительно скалярного множителя:

$$\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b}).$$

3) Распределительное свойство относительно сложения векторов:

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c},$$

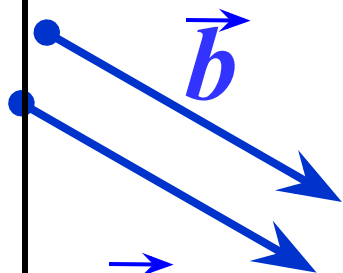
$$(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{c} + \bar{d}) = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{a} \times \bar{d} + \bar{b} \times \bar{d}.$$



§ 8. Векторное произведение векторов.

Если вектора коллинеарные, то

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = 0^0, 180^0$$



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin 0^0 = 0$$

Признак коллинеарности векторов:

Для того чтобы два ненулевых вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было бы равно нулю.

В частности, имеем для ортов:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$



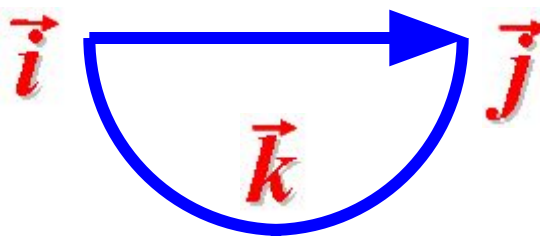
§ 9. Векторное произведение векторов.

Рассмотрим векторные произведения различных ортов.

Очевидно, что векторное произведение двух различных ортов будет равно третьему орту, взятому:

- со знаком **+**, если тройка ортов правая;
- со знаком **-**, если тройка ортов левая.

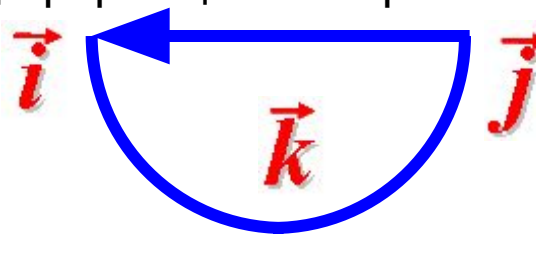
Если векторы правой тройки изменять непрерывно, то в любой момент такой деформации эта тройка векторов будет оставаться правой тройкой.



Тогда

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}\end{aligned}$$

Если векторы левой тройки изменять непрерывно, то в любой момент такой деформации эта тройка векторов будет оставаться левой тройкой.



Тогда

$$\begin{aligned}\vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i} \\ \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j}\end{aligned}$$



§ 9. Векторное произведение векторов.

Выразим теперь векторное произведение через координаты векторов, его составляющих.

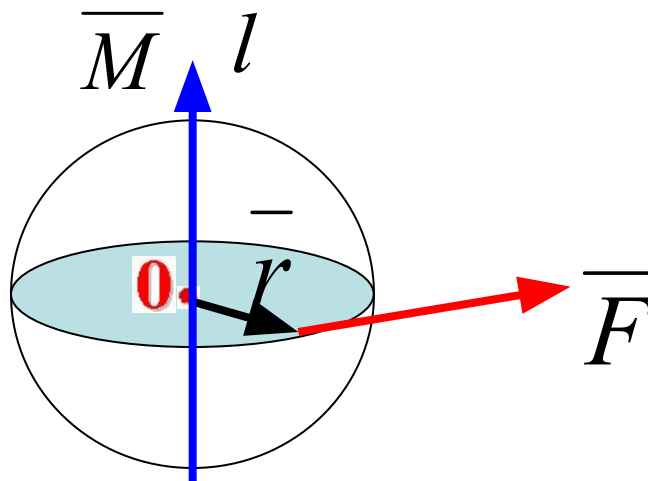
$$\begin{aligned}
 \bar{a} \times \bar{b} &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = \\
 &= a_x b_x \bar{i} \times \bar{i} + a_y b_x \bar{j} \times \bar{i} + a_z b_x \bar{k} \times \bar{i} + a_x b_y \bar{i} \times \bar{j} + a_y b_y \bar{j} \times \bar{j} + a_z b_y \bar{k} \times \bar{j} + \\
 &\quad + a_x b_z \bar{i} \times \bar{k} + a_y b_z \bar{j} \times \bar{k} + a_z b_z \bar{k} \times \bar{k} = \\
 &= (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k} =
 \end{aligned}
 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



§ 9. Векторное произведение векторов.

Векторное произведение имеет простую механическую интерпретацию.



Если сила $\vec{F}$ поворачивает тело вокруг оси l , то момент $\vec{M}$ силы $\vec{F}$ относительно т. О, равен

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$



§ 9. Векторное произведение векторов.

Векторное произведение двух векторов позволяет решить следующие задачи векторной алгебры.

1) *Нахождение площади параллелограмма и треугольника*

Действительно, площадь параллелограмма, сторонами которого служат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна модулю их векторного произведения

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|,$$

а площадь треугольника со сторонами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

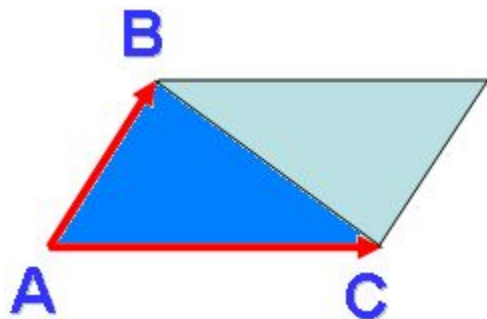


§ 9. Векторное произведение векторов.

Пример 1.

Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(0, 1, 2)$, $B(0, 4, -1)$, $C(2, 1, -1)$.

Решение



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|,$$

$$\overline{AB} \{0, 3, -3\}; \quad \overline{AC} \{2, 0, -3\}.$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \{-9, -6, -6\},$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{81 + 36 + 36} = \sqrt{153},$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{\sqrt{153}}{2} \approx 6,18$$



§ 9. Векторное произведение векторов.

Пример 2. Найти площадь треугольника, построенного на векторах

$2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{b}$, если известно, что

$$|\vec{a}| = 1, \quad |\vec{b}| = 2, \quad \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Решение

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}|,$$

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = 2\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{b} = 2\vec{a} \times \vec{b},$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |2\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1.$$

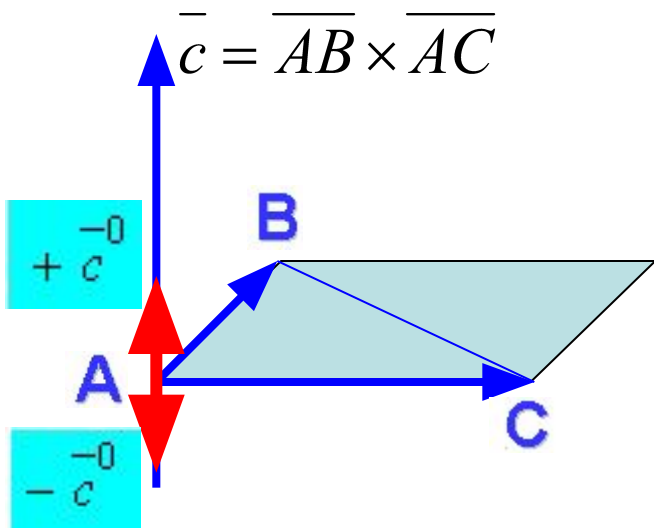


§ 9. Векторное произведение векторов.

2) Нахождение векторов, перпендикулярных данной плоскости

Пример 3. Найти единичный вектор, перпендикулярный к плоскости, в которой лежат точки $A(0, 1, 2)$, $B(0, 4, -1)$, $C(2, 1, -1)$.

Решение



В силу определения векторного произведения векторов

$$\bar{c} = \overline{AB} \times \overline{AC}.$$

$$\overline{AB}\{0, 3, -3\}, \quad \overline{AC}\{2, 0, -3\},$$

$$\bar{c} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \{-9, -6, -6\},$$

Поставленной задаче удовлетворяют два единичных вектора

$$\pm \bar{c} = \pm \frac{-9\bar{i} - 6\bar{j} - 6\bar{k}}{\sqrt{153}}.$$



§ 9. Векторное произведение векторов.

3) Доказательство коллинеарности векторов

Пример 4. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1 = \vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{c}_2 = 2\vec{a} + \vec{b}$ построенные по векторам $\vec{a}\{2, 1, 1\}$ и $\vec{b}\{0, 3, 1\}$?

Решение

Условие коллинеарности: $\vec{c}_1 \times \vec{c}_2 = 0$. $\vec{c}_1\{2, -2, 0\}$, $\vec{c}_2\{4, 5, 3\}$.

$$\vec{c}_1 \times \vec{c}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 6\vec{j} + 18\vec{k} \neq 0, \text{ т. е. вектора неколлинеарны.}$$

4) Задачи механического содержания

Пример 5. Сила $\vec{F}\{4; 2; 1\}$ приложена в точке $B\{3; 2; 4\}$. Найти момент этой силы относительно точки $A\{5; -1; 6\}$.

Решение

$$\vec{AB}\{-2; 3; -2\}, \quad \vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 6\vec{j} - 16\vec{k}.$$



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

§ 10. Смешанное произведение векторов.

Определение 1.

Смешанным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a}$ и векторного произведения вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, т. е. выражение

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Свойства смешанного произведения:

- 1) Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке перемножаемых векторов.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

- 2) При перестановке двух соседних векторов модуль смешанного произведения не меняется, а знак меняется на противоположный, т. к. тройка меняет свою ориентацию.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$$

- 3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, т.е. порядок знаков умножения не важен.

Поэтому принято смешанное произведение обозначать $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.



§ 10. Смешанное произведение векторов.

Выразим теперь смешанное произведение через координаты векторов, его составляющих.

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad \text{или} \quad \bar{b} \times \bar{c} = \left\{ \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right\}.$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} + a_y \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$



§ 10. Смешанное произведение векторов.

Теорема 1. Смешанное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

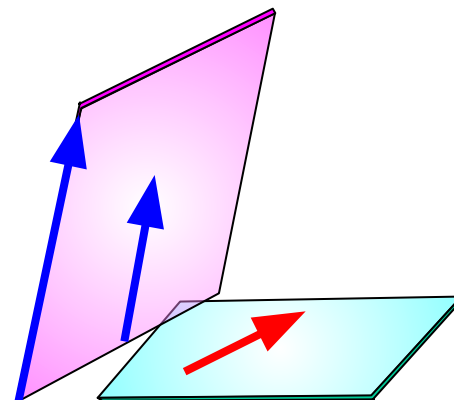
Доказательство.

Необходимость.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0.$$

Возможны два случая.

1) $\vec{b} \times \vec{c} = 0$, т.е. вектора коллинеарны,

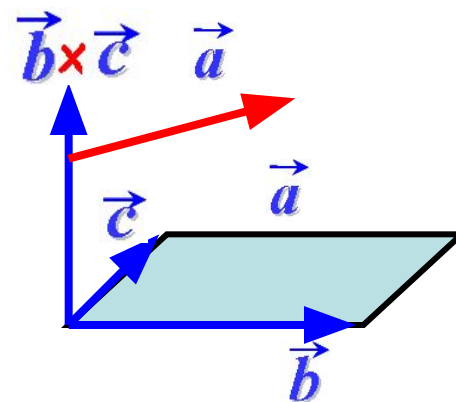


а три вектора, два из которых коллинеарны, всегда компланарны.

2) $\vec{b} \times \vec{c} \neq 0$, но $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

Тогда $\vec{a} \perp (\vec{b} \times \vec{c})$.

Это значит, что три вектора лежат в одной плоскости.



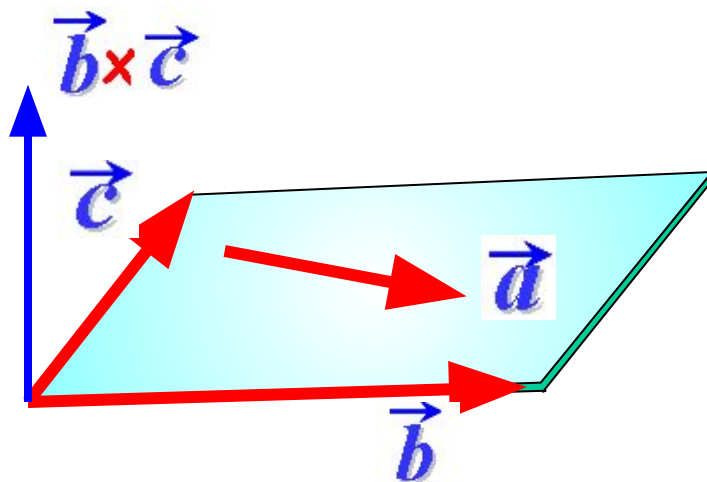


§ 10. Смешанное произведение векторов.

Достаточность.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны.

Тогда их можно поместить в одной плоскости.



Вектор $\vec{b} \times \vec{c}$ перпендикулярен плоскости, а, следовательно, и $\vec{a}$

Тогда по правилам скалярного произведения $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

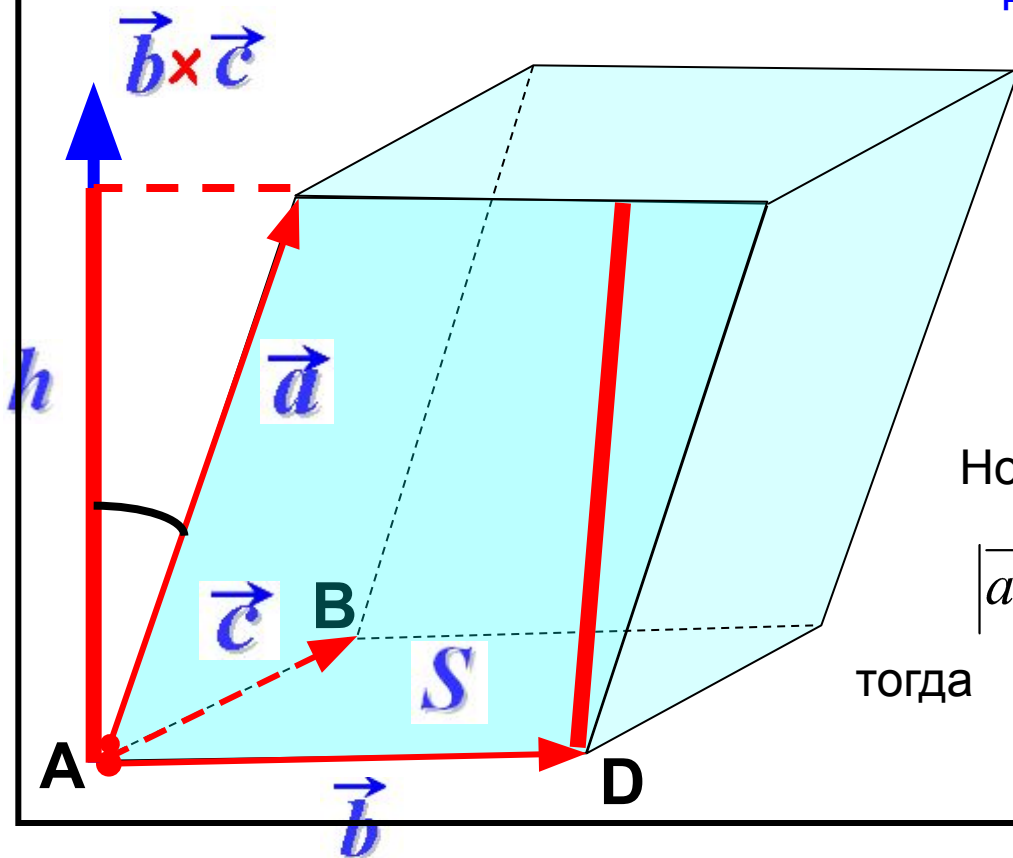


§ 10. Смешанное произведение векторов.

Установим геометрический смысл смешанного произведения векторов.

Теорема 2. Смешанное произведение $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ некопланарных векторов равно объему параллелепипеда, сторонами которого служат эти векторы, взятому со знаком $+$, если тройка векторов правая, и со знаком $-$, если тройка левая.

Доказательство.



$$\begin{aligned}\overline{a}\overline{b}\overline{c} &= \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \\ &= |\overline{a}| \cdot |\overline{b} \times \overline{c}| \cdot \cos(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}) = \\ &= |\overline{a}| \cdot \cos(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}) \cdot |\overline{b} \times \overline{c}|.\end{aligned}$$

Но

$$|\overline{a}| \cdot \cos(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}) = \pm h, \quad |\overline{b} \times \overline{c}| = S,$$

тогда

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \pm S \cdot h = \pm V.$$



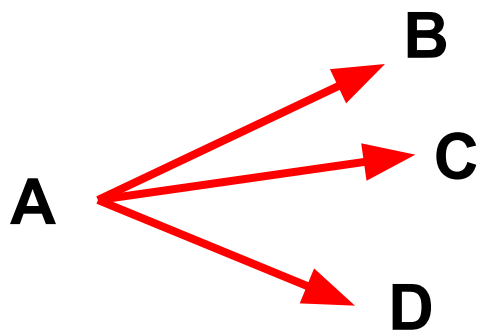
§ 10. Смешанное произведение векторов.

Смешанное произведение трех векторов позволяет решить следующие задачи векторной алгебры:

1) *Доказательство компланарности (линейной зависимости) трех векторов*

Пример 1. Показать, что точки $A(1, 2, 1)$, $B(3, 3, 3)$, $C(4, 1, 2)$ и $D(5, 4, 5)$ лежат в одной плоскости.

Решение



$$\overline{AB}\{2; 1; 2\}, \overline{AC}\{3; -1; 1\}, \overline{AD}\{4; 2; 4\}.$$

Если точки A , B , C и D лежат в одной плоскости, то и вектора лежат в одной плоскости, а тогда смешанное произведение этих векторов равно нулю.

$$(\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, точки лежат в одной плоскости.



§ 10. Смешанное произведение векторов.

Пример 2. Доказать, что вектора $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ линейно зависимы и найти эту линейную зависимость.

Решение

$$(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Следовательно, векторы компланарны, а значит, они линейно зависимы,}$$

т. е. существуют константы λ , μ и ν такие, что $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = 0$.

$$\lambda(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) + \mu(3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) + \nu(\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) = 0,$$

$$(\lambda + 3\mu + \nu)\vec{i} + (\lambda + 4\mu + 2\nu)\vec{j} + (2\lambda + \mu - 3\nu)\vec{k} = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda + 3\mu + \nu = 0 \\ \lambda + 4\mu + 2\nu = 0 \\ 2\lambda + \mu - 3\nu = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda + 3\mu + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ -5\mu - 5\nu = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda + 3\mu + \nu = 0 \\ \mu = -\nu \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda - 3\nu + \nu = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = 2\nu \\ \mu = -\nu \end{array}$$

Данная система имеет бесчисленное множество решений.

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = 2\nu\vec{a} - \nu\vec{b} + \nu\vec{c} = 0.$$

откуда получим искомую линейную зависимость: $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$



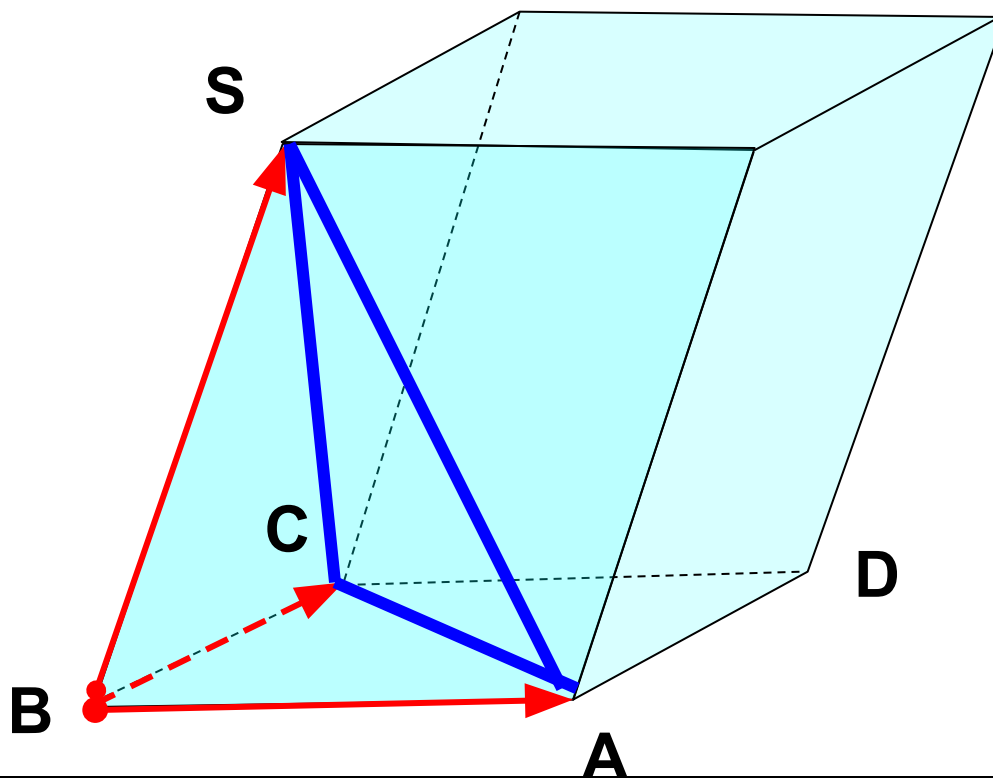
§ 10. Смешанное произведение векторов.

2) Нахождение объема параллелепипеда и тетраэдра

Объем параллелепипеда вычисляется по формуле $V = S_{ABCD} \cdot h$,

а объем пирамиды – $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h$. Так как $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, то

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V.$$





§ 10. Смешанное произведение векторов.

Пример 3. В пирамиде $ABCD$ найти высоту, опущенную из вершины A , если в прямоугольной декартовой системе координат $A(2, 1, 0)$, $B(2, -1, 2)$, $C(0, 1, 3)$, $D(-1, 1, 0)$.

Решение

$$\overrightarrow{DA}\{3, 0, 0\}, \quad \overrightarrow{DB}\{3, -2, 2\} \quad \overrightarrow{DC}\{1, 0, 3\},$$

$$\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \{-6, -7, 2\},$$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + (-7)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{89},$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-18| = |-3|.$$

Знак «-» показывает, что тройка векторов левая.

$$H = \frac{3 \cdot V}{S} = \frac{3 \cdot 3}{\sqrt{89}/2} \approx 1,91.$$

