

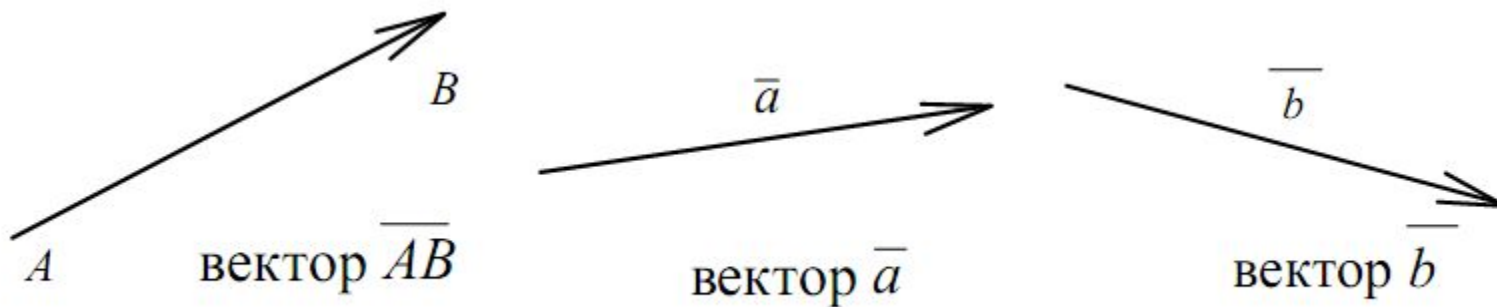
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Основные определения

Векторы

Определение. Вектором назовём направленный отрезок, т.е. отрезок прямой, ограниченный двумя точками, одна из которых называется начальной, а другая конечной.

Изображение и обозначения



Определение 2.2. *Модуль вектора есть положительное число, равное длине вектора, т. е. расстоянию между его начальной и конечной точками.*

Обозначение модуля: $|\overline{AB}|$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$.

Вектор, у которого конечная точка совпадает с начальной, называется нуль-вектор и обозначается $\vec{0}$. Направление нулевого вектора не определено.

Определение 2.3. *Векторы равны, если они одинаково направлены и длины их равны.*

Определение 2.4. *Вектор, длина которого равна единице, называют единичным вектором.*

Определение 2.5. Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной или на параллельных прямых.

Два коллинеарных вектора называются одинаково направленными, если их концы B и D лежат по одну сторону от прямой AC , содержащей их начала (см. рис. 2.2). В противном случае они называются противоположно направленными.

Два вектора, противоположно направленные, но имеющие одинаковые длины, называются противоположными.

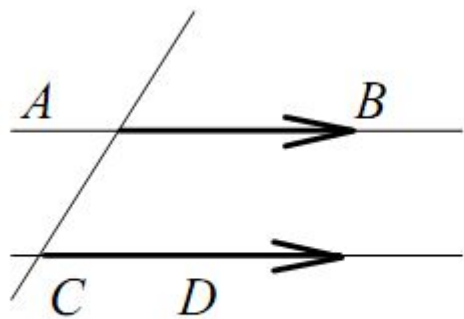


Рис. 2.2

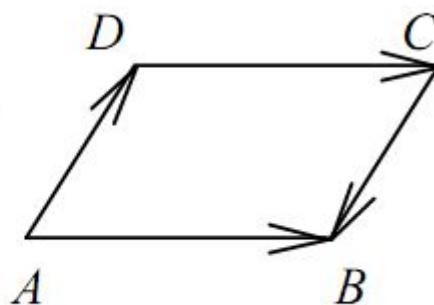


Рис. 2.3

Компланарные векторы

Определение 2.6. Векторы, лежащие в одной плоскости (или в параллельных плоскостях), называются компланарными.

Вектор, точка приложения которого может быть выбрана произвольно, называют свободным.

Линейные операции над векторами

К линейным операциям относятся операции умножения вектора на число, сложения и вычитания векторов.

Умножение вектора на число. Произведением вектора \bar{a} на число λ называется вектор \bar{c} , коллинеарный вектору \bar{a} , имеющий длину $|\bar{c}| = |\lambda| |\bar{a}|$, одинаково направленный с вектором \bar{a} при $\lambda > 0$ и противоположно направленный при $\lambda < 0$.

Таким образом, векторы \bar{a} , \bar{c} коллинеарны тогда, и только тогда, когда $\bar{c} = \lambda \bar{a}$.

Сложение векторов. Отложим вектор $\vec{a} = \overline{AB}$ от некоторой точки A (рис. 2.4), затем от точки B отложим вектор $\vec{b} = \overline{BC}$.

Вектор \overline{AC} , соединяющий начало первого вектора и конец второго, называется суммой и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$. Эту же сумму можно получить другим способом. Пусть точка A – общее начало векторов, $\overline{AB} = \vec{a}$ и $\overline{AC} = \vec{b}$. Построим на этих векторах как на сторонах параллелограмм (рис. 2.5).

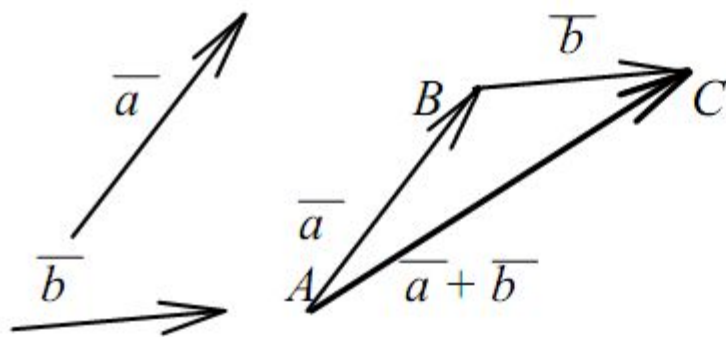


Рис. 2.4

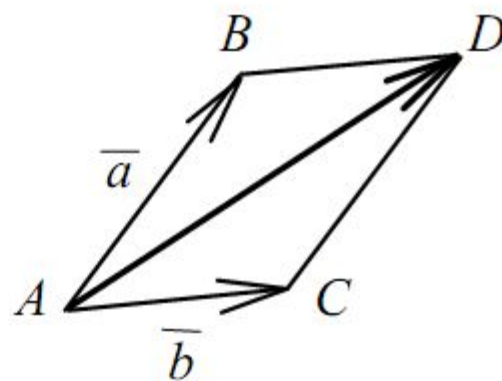


Рис. 2.5

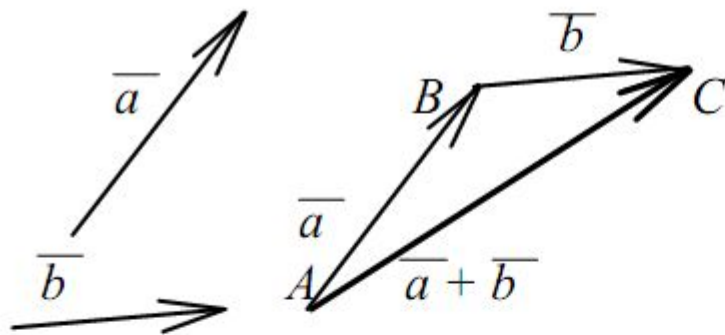


Рис. 2.4

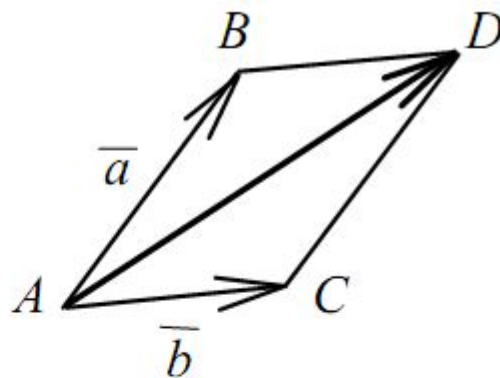


Рис. 2.5

Диагональ параллелограмма – вектор

$$\overline{AD} = \overline{a} + \overline{b} = \begin{cases} \overline{AB} + \overline{BD}, \\ \overline{AC} + \overline{CD} \end{cases}$$

является суммой векторов \overline{a} и \overline{b} , т. к. вектор в пространстве можно переносить параллельно самому себе и, значит, $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.

Замечание. Операция сложения векторов распространяется на любое конечное число слагаемых векторов. Чтобы сложить три вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} (рис. 2.6), расположим их так, чтобы конец первого служил началом второго, а конец второго – началом третьего, т. е. $\vec{a} = \overline{AB}$, $\vec{b} = \overline{BC}$, $\vec{c} = \overline{CD}$. Суммой векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} является вектор \overline{AD} , соединяющий начало первого и конец последнего вектора (метод замыкающей) $\overline{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

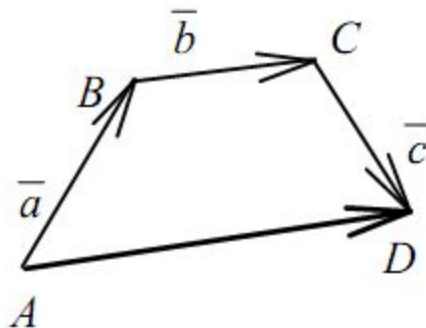


Рис. 2.6

Вычитание векторов. Разностью двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется третий вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, равный сумме векторов \vec{a} и $(-\vec{b})$, если $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ (см. рис 2.7).

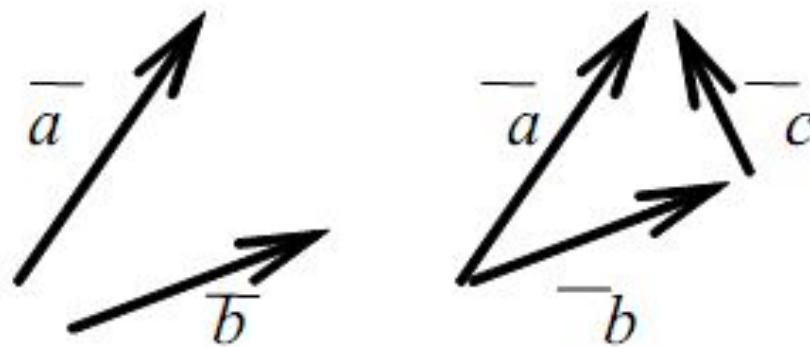


Рис. 2.7

Свойства линейных операций над векторами

1. Переместительный закон (коммутативности):

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}.$$

2. Сочетательный закон (ассоциативности):

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).$$

3. Нулевой вектор играет роль нуля на множестве векторов:

$$\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}.$$

4. Сумма противоположных векторов равна нуль-вектору:

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}.$$

-
3. Если каждый из векторов умножить на число α , то и сумма этих векторов умножится на число α :

$$\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}.$$

4. Модуль суммы векторов не больше суммы модулей этих векторов:

$$|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|.$$

5. Модуль суммы векторов не меньше разности модулей этих векторов:

$$|\bar{a} + \bar{b}| \geq |\bar{a}| - |\bar{b}|.$$

Линейная зависимость векторов. Аффинный базис

Определение 2.8. Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ называется линейно зависимой, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все равные нулю, для которых справедливо равенство

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k = 0. \quad (2.1)$$

При этом левая часть равенства (2.1) называется линейной комбинацией векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$.

Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ называются линейно независимыми, если равенство (2.1) выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

Теорема 1.4. *Если система векторов линейно зависима, то хотя бы один из векторов всегда можно представить в виде линейной комбинации остальных.*

Действительно, пусть в равенстве (2.1) $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\bar{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\bar{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\bar{a}_k$$

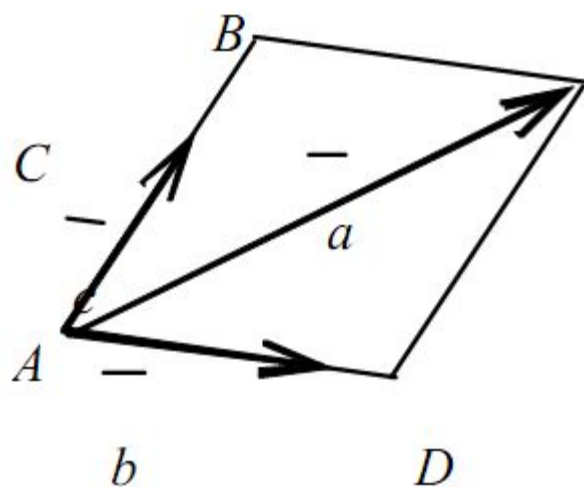
Справедливо и обратное утверждение: если один из векторов представлен в виде линейной комбинации остальных, то эта система векторов линейно зависима.

Следствие. Коллинеарные векторы \bar{a} и \bar{b} линейно зависимы, поскольку

$$\bar{b} = \lambda \bar{a}. \quad (2.3)$$

Справедливо и обратное утверждение: два линейно зависимых вектора коллинеарны.

Теорема 1.5. *Всякие три вектора \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} , принадлежащие одной плоскости, линейно зависимы.*



Следствие. Для того чтобы три вектора в трёхмерном пространстве были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы. Если три вектора не компланарны, то они линейно независимы.

Базис на плоскости

Определение 2.9. Базисом на плоскости (в двумерном пространстве, которое будем обозначать E_2) называются любые два линейно независимых вектора.

Пусть \bar{a} – любой вектор на плоскости, \bar{b} и \bar{c} – базис. По теореме 5 следует: $\bar{a} = \alpha_1 \bar{b} + \alpha_2 \bar{c}$. Говорят, что вектор \bar{a} разложен по базису \bar{b} , \bar{c} ; числа α_1 и α_2 называются *аффинными координатами* вектора \bar{a} на плоскости (или в пространстве E_2): $\bar{a} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Базис в трехмерном пространстве

Определение 2.10. В трёхмерном пространстве (будем обозначать E^3) базисом называются любые три линейно независимых вектора, т. е. всякие три некопланарных вектора.

Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – базис. Тогда любой четвёртый вектор можно представить в виде их линейной комбинации (см. формулу 2.2)

$$\bar{d} = \alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b} + \alpha_3 \bar{c}, \quad \text{или} \quad \bar{d} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – координаты вектора \bar{d} в базисе $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Если векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ имеют общее начало в точке O и точка M является концом вектора \bar{d} , то вектор

$$\bar{d} = \overline{OM} = \alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b} + \alpha_3 \bar{c}$$

называется *радиус-вектором точки M в базисе $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$* , при этом числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называются *аффинными координатами точки M* .

Проекция вектора на ось

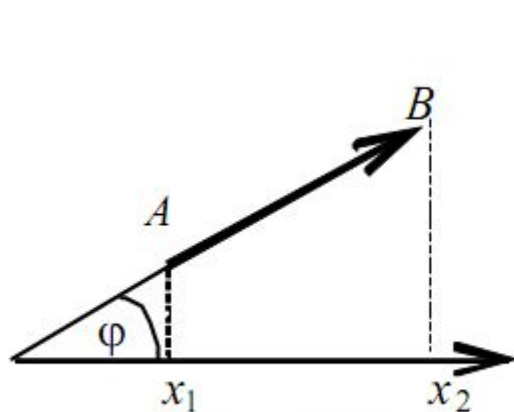


Рис. 2.11

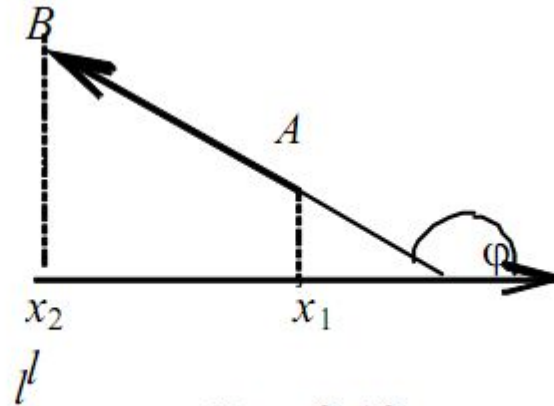


Рис. 2.12

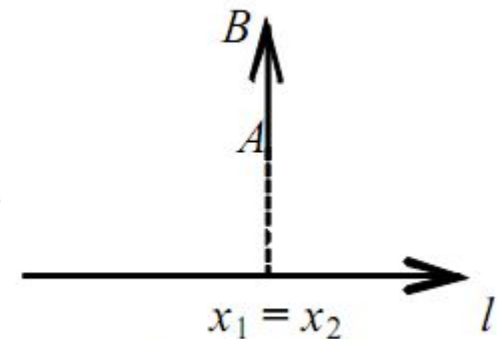


Рис. 2.13

Определение 2.11. Разность $x_2 - x_1$ называется проекцией вектора \overline{AB} на ось l .

При этом:

если угол φ между осью и вектором – острый, то $x_1 < x_2$ и проекция положительна (рис. 2.11);

если угол φ между осью и вектором – тупой, то $x_1 > x_2$ и проекция отрицательна (рис. 2.12);

если угол $\varphi = 90^\circ$, то $x_1 = x_2$ и проекция равна нулю (рис. 2.13).

Теоремы о проекциях

Проекция вектора \overline{AB} на ось l обозначается символом $\text{пр}_l \overline{AB}$.

Теорема 2.1. Проекция вектора \overline{a} на ось l равна произведению модуля вектора \overline{a} на косинус угла φ между вектором и осью:

$$\text{пр}_l \overline{a} = |\overline{a}| \cos \varphi = |a| \cos(\overline{a}, \hat{l}).$$

Теорема 2.2. Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось:

$$\text{пр}_l(\overline{a} + \overline{b}) = \text{пр}_l \overline{a} + \text{пр}_l \overline{b}.$$

Следствие. $\text{пр}_l(\overline{a} - \overline{b}) = \text{пр}_l \overline{a} - \text{пр}_l \overline{b}$.

Теорема 2.3. Если вектор \overline{a} умножить на число $\lambda > 0$, то его проекция на ось l увеличится в λ раз:

$$\text{пр}_l(\lambda \overline{a}) = \lambda \text{пр}_l \overline{a}.$$

Прямоугольный декартов базис

Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве E_3 , образованную тремя взаимно перпендикулярными осями с общим началом в точке O (рис. 2.14). Одну из осей называют *осью абсцисс* и обозначают Ox , вторую – *осью ординат* и обозначают Oy , третью – *осью аппликат* и обозначают Oz . На каждой из осей выберем единичный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением оси:

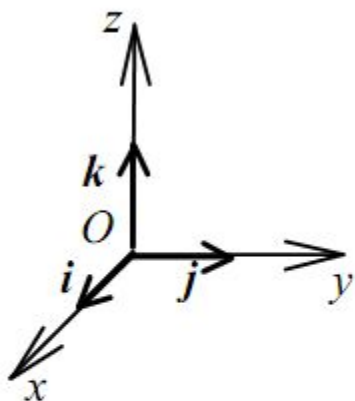


Рис. 2.14

$$\bar{i} \in Ox, \bar{j} \in Oy, \bar{k} \in Oz; |\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1.$$

Эти векторы называются *ортами*. Так как орты некопланарны, то они образуют базис, который называется *декартовым ортогональным базисом*. Орты можно записывать \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} , ввиду их единственности, без черты.

Рассмотрим вектор \bar{a} в пространстве E_3 . Перенесём его параллельно самому себе в точку O (см. рис. 2.15).

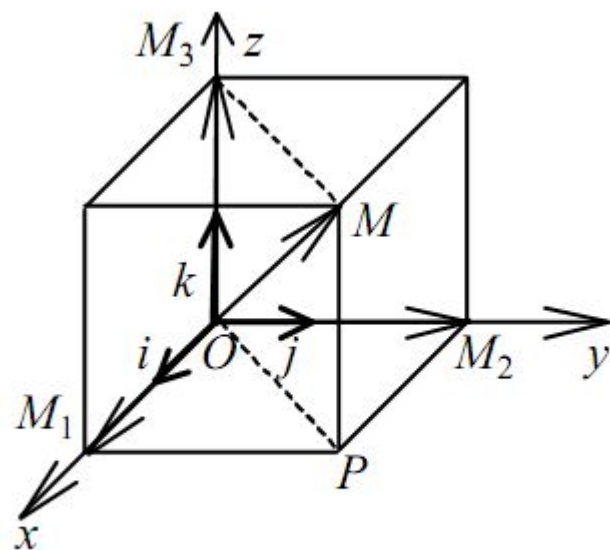


Рис. 2.15

$\bar{a} = \overline{OM}$ – радиус-вектор точки M .

$$\bar{a} = a_x i + a_y j + a_z k$$

$$\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

числа a_x, a_y, a_z – проекции вектора \bar{a} на координатные оси

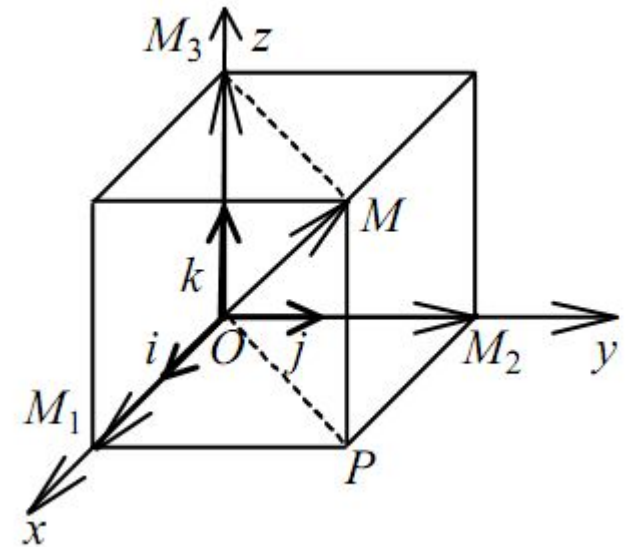
$a_x i, a_y j, a_z k$ – составляющие вектора \bar{a}

Длина вектора

$$|\vec{a}|^2 = OM^2 = OM_1^2 + OM_2^2 + OM_3^2,$$

$$OM_1 = a_x, \quad OM_2 = a_y, \quad OM_3 = a_z,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$



Длина вектора, заданного концами – расстояние между точками

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

Направляющие косинусы вектора

Направление вектора в пространстве определяется углами α , β и γ между вектором и положительным направлением соответствующих осей координат Ox , Oy , Oz ; $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ называются направляющими косинусами вектора.

$$\left. \begin{array}{l} a_x = |\vec{a}| \cos \alpha \\ a_y = |\vec{a}| \cos \beta \\ a_z = |\vec{a}| \cos \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Введём единичный вектор \bar{a}_0 по направлению \bar{a}

$$\bar{a} = |\bar{a}| \bar{a}_0,$$

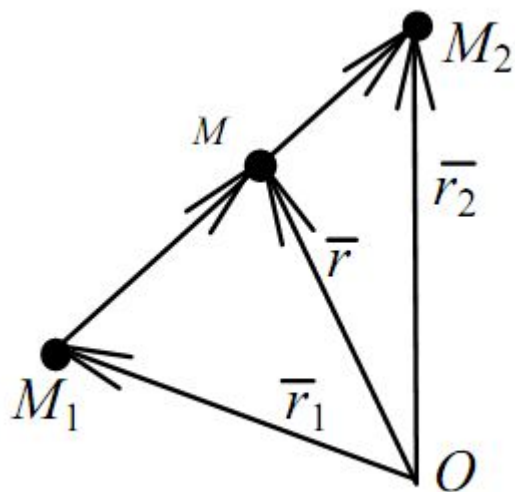
$$\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{a_x}{|\bar{a}|} i + \frac{a_y}{|\bar{a}|} j + \frac{a_z}{|\bar{a}|} k,$$

$$\bar{a}_0 = i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma,$$

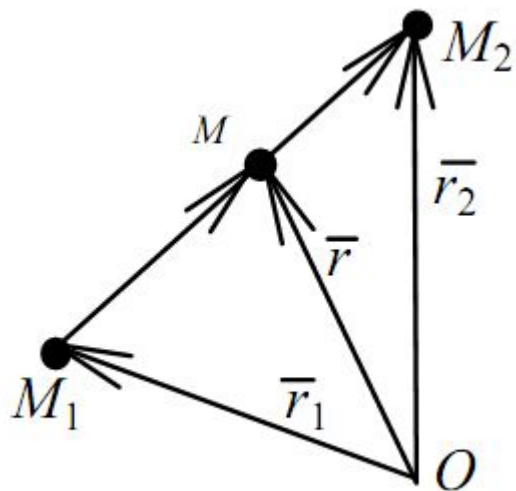
Деление отрезка в данном отношении

Разделить отрезок M_1M_2 в данном отношении $\lambda > 0$ – значит найти такую точку M , что

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda, \text{ или } M_1M = \lambda MM_2. \quad (2.12)$$



$$\bar{r} - \bar{r}_1 = \lambda(\bar{r}_2 - \bar{r}), \text{ или } \bar{r}(1 + \lambda) = \lambda\bar{r}_2 + \bar{r}_1$$



$$\bar{r} - \bar{r}_1 = \lambda(\bar{r}_2 - \bar{r}), \text{ или } \bar{r}(1 + \lambda) = \lambda\bar{r}_2 + \bar{r}_1$$

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_1 + \lambda\bar{r}_2}{1 + \lambda} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \\ z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \end{cases}$$

Скалярное произведение

Определение 2.12. Скалярным произведением двух векторов \bar{a} и \bar{b} называется скаляр – число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение обозначается

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \left(\overset{\wedge}{\bar{a}, \bar{b}} \right), \quad (2.17)$$

или $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi$, где φ – угол между векторами

Свойства скалярного произведения

1. Коммутативность: $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$.

2. Скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения:

$$(\lambda \cdot \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \lambda \bar{b}) = \lambda (\bar{a}, \bar{b}).$$

3. Скалярное произведение подчиняется сочетательному закону:

$$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}.$$

4. Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то либо один из векторов равен нулю, либо равен нулю косинус угла между ними, т. е. векторы перпендикулярны. Обратно: если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\cos \varphi = 0$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

5. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2}$$

Вычисление проекции вектора на вектор

$$(a, b) = |b| \cdot \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = |a| \cdot \text{пр}_{\bar{a}} \bar{b},$$

$$\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{b}|}, \quad \text{или} \quad \text{пр}_{\bar{a}} \bar{b} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}|}.$$

Скалярное произведение в декартовой системе координат

$$\bar{a} \{a_x, a_y, a_z\} \text{ и } \bar{b} \{b_x, b_y, b_z\}$$

скалярные произведения единичных векторов:

$$i \cdot i = |i|^2 \cos 0 = 1, \quad j \cdot j = 1, \quad k \cdot k = 1,$$

$$i \cdot j = |i| \cdot |j| \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad i \cdot k = 0, \quad j \cdot k = 0.$$

Скалярное произведение орт

	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

Теперь вычислим скалярное произведение, воспользовавшись его свойствами:

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot \bar{b} &= (a_x i + a_y j + a_z k) \cdot (b_x i + b_y j + b_z k) = \\ &\quad \underline{a_x b_x i \cdot i} + a_x b_y i \cdot j + a_x b_z i \cdot k + \\ &\quad + a_y b_x j \cdot i + \underline{a_y b_y j \cdot j} + a_y b_z j \cdot k + a_z b_x k \cdot i + a_z b_y k \cdot j + \underline{a_z b_z k \cdot k}.\end{aligned}$$

Все слагаемые, кроме подчёркнутых, обращаются в ноль, окончательно получаем

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (2.18)$$

Скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных проекций

Итоговые формулы

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi, \text{ где } \varphi = \left(\hat{\bar{a}, \bar{b}} \right),$$

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

$$\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Векторное произведение

Определение 2.13. Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор \vec{c} , который подчиняется следующим условиям:

- вектор \vec{c} перпендикулярен плоскости перемножаемых векторов (рис. 2.24), т. е. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

- вектор \vec{c} направлен так, что если смотреть с его конца вдоль вектора, то поворот от \vec{a} к \vec{b} совершается против часовой стрелки (т. е. ориентирован так же, как вектор \vec{k} относительно векторов \vec{i} и \vec{j});

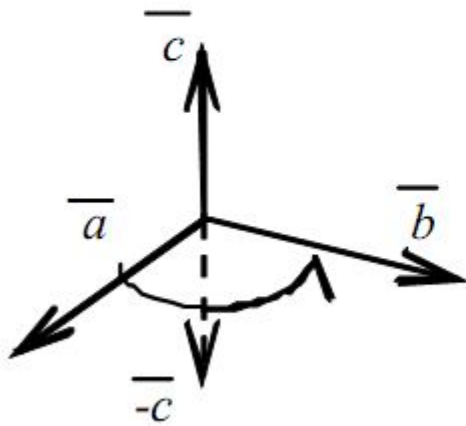


Рис. 2.24

Модуль векторного произведения

• модуль вектора \bar{c} численно равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах \bar{a} и \bar{b} как на его сторонах:

$$S_{\text{параллелогр.}} = |\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin \left(\overset{\wedge}{\bar{a}, \bar{b}} \right). \quad (2.21)$$

Обозначается векторное произведение символами

$$\bar{a} \times \bar{b} \text{ или } [\bar{a}, \bar{b}].$$

Основные свойства векторного произведения

1. При перемене мест сомножителей векторное произведение меняет знак на противоположный:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}].$$

2. Константу можно выносить за знак векторного произведения, т. е. векторное произведение подчиняется сочетательному закону относительно числового множителя:

$$\lambda[\bar{a}, \bar{b}] = [\lambda\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda\bar{b}].$$

3. Векторное произведение подчиняется распределительному закону:

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}.$$

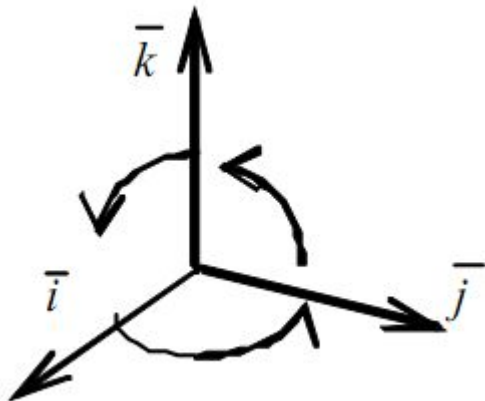
4. Если векторное произведение двух векторов равно нулю, то либо один из векторов равен $\bar{0}$, либо $\sin \varphi = 0$, т. е. векторы коллинеарны. В частности,

$$|\bar{a} \times \bar{a}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \sin 0 = 0.$$

Таким образом, для того чтобы два ненулевых вектора \bar{a} и \bar{b} были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось нуль-вектору $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$.

Векторное произведение в декартовой системе координат

$$\bar{a} = a_x i + a_y j + a_z k, \quad \bar{b} = b_x i + b_y j + b_z k$$



$$[i, i] = [j, j] = [k, k] = 0$$

$$[i, j] = k$$

$$[j, k] = i, [k, j] = -i, [k, i] = j, [i, k] = -j, [j, i] = -k$$

Векторное произведение орт

	i	j	k
i	0	k	$-j$
j	$-k$	0	i
k	j	$-i$	0

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

С помощью определения векторного произведения можно решать задачу о вычислении площади треугольника, построенного на векторах как на сторонах (рис 2.26).

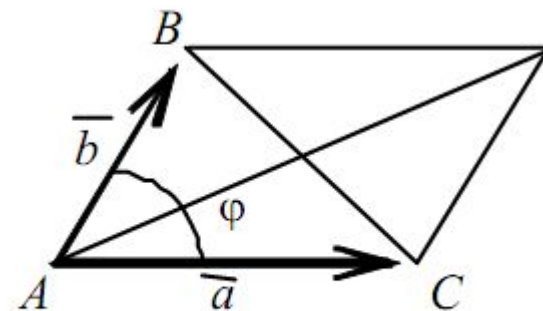


Рис. 2.26

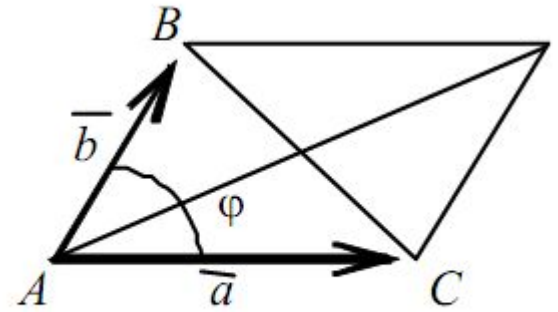


Рис. 2.26

По определению модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах:

$$S_{\text{параллелограмм}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi,$$

$$\text{где } \varphi = \left(\hat{\vec{a}}, \vec{b} \right).$$

следовательно,

$$\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\Delta}.$$

Смешанное произведение трёх векторов

Определение 2.14. Смешанным произведением трёх векторов \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} называется **число**, равное скалярному произведению вектора \bar{a} на векторное произведение векторов $[\bar{b}, \bar{c}]$.

Обозначается оно так: $\bar{a} \cdot [\bar{b}, \bar{c}] = (\bar{a} \bar{b} \bar{c})$.

Смешанное произведение в декартовой системе координат

Пусть даны векторы

$$\bar{a} = a_x i + a_y j + a_z k, \quad \bar{b} = b_x i + b_y j + b_z k, \quad \bar{c} = c_x i + c_y j + c_z k.$$

Найдём $[\bar{a}, \bar{b}] \cdot \bar{c}$.

Вычислим предварительно векторное произведение

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} k = d_x i + d_y j + d_z k,$$

где $\bar{d} = [\bar{a}, \bar{b}]$.

скалярное произведение

$$(\bar{d}, \bar{c}) = d_x c_x + d_y c_y + d_z c_z.$$

Окончательно смешанное произведение равно

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z.$$

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл смешанного произведения

Построим на векторах как на рёбрах параллелепипед

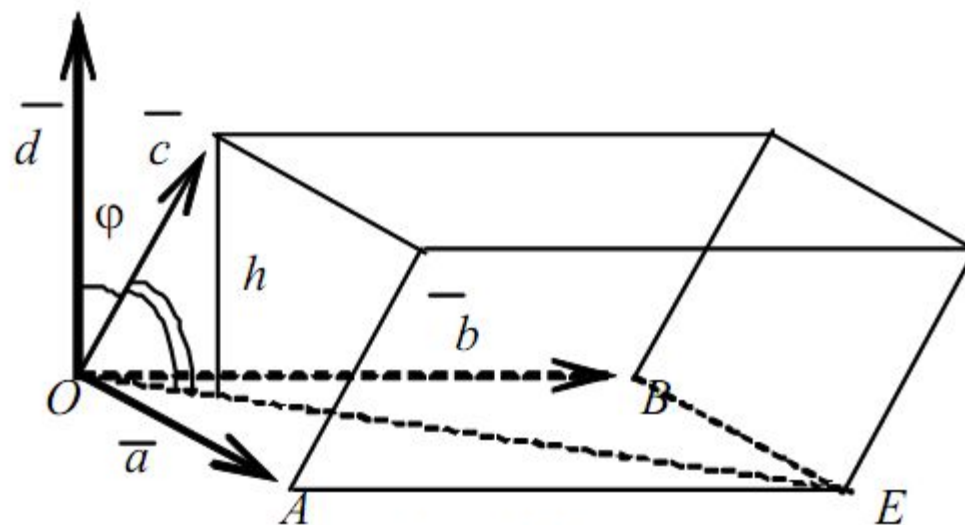
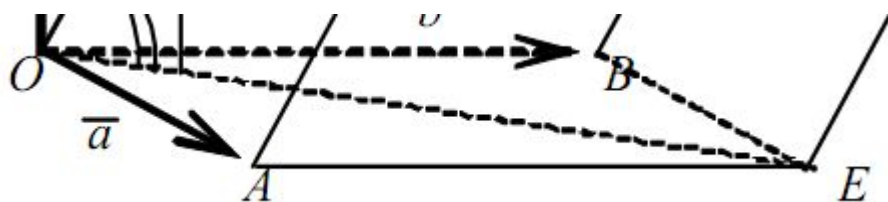


Рис 2.28

Найдём вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, модуль которого равен площади параллелограмма $OBEA$:

$$|\vec{d}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = S.$$



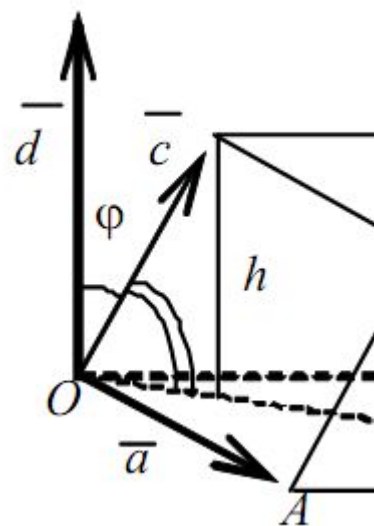
Далее, умножив скалярно $\vec{d} \cdot \vec{c}$, вычислим смешанное произведение векторов

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \varphi = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \varphi,$$

где φ – угол между векторами \vec{d} и \vec{c} ,

$$|\vec{c}| \cdot \cos \varphi = |\vec{c}| \cdot \sin(90 - \varphi) = h,$$

где h – высота параллелепипеда.



$$V_{\text{пар}} = S_{\text{осн}} \cdot h = \pm \bar{a} \bar{b} \bar{c}.$$

- Если угол $\varphi < \frac{\pi}{2}$, то $|\bar{c}| \cdot \cos \varphi > 0$, $\bar{a} \bar{b} \bar{c} = V$.
 - Если угол $\varphi > \frac{\pi}{2}$, то $|\bar{c}| \cdot \cos \varphi < 0$, $\bar{a} \bar{b} \bar{c} = -V$.
-

Вывод: модуль смешанного произведения трёх векторов равен объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах как на рёбрах.

Свойства смешанного произведения

1. • При перемене мест двух сомножителей смешанное произведение меняет знак на противоположный:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}.$$

5. • Циклическая перестановка векторов не меняет знака смешанного произведения:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b}.$$

6. • Операции векторного умножения и скалярного переставимы:

$$\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c}.$$

**Все свойства смешанного произведения
доказываются с помощью свойств
определителя!**

Условие компланарности трех векторов

Теорема 2.6. Чтобы векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю.
